Prove d'esame a.a. 2013–14

Andrea Corli*

8 settembre 2014

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2013–14, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

7/11/2013 - Prima prova parziale

1. Siano $0 < a < b$. Calcolare il $\lim_{n\to\infty}(b^n - a^n)$ e, nel caso $b > 1$, verificare il risultato ottenuto usando la definizione di limite.
2. Studiare la convergenza delle serie (1): $\displaystyle\sum_{n=1^\infty} \frac{a^{n^2}}{n!}$ per $a > 0$; (2): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
3. Calcolare: (1): $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$, (2): $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt[3]{8+x}-2}$.
4. (Matlab) Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_1 = \log 10$ e $a_n = \log(1 + a_{n-1})$ per $n \geq 2$. Calcolare e disegnare i primi dieci termini della successione.
5. Sia f la funzione definita in $[0, 2]$ da $f(x) = x/2$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 6 - 2x$ se $x \in (1, 2]$. Disegnare il grafico di f, dire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare f^{-1} e disegnarne il grafico.
6. Studiare gli asintoti della funzione $f(x) = \log(1 + e^x)$. Dedurre un grafico approssimativo di f.
7. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ per ogni $x \in [a, b]$. Come si traduce geometricamente tale condizione?
8. Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni, mostrando qualche passaggio intermedio del disegno: $f(x) = |e^{1-x} - 1|$; $g(x) = 10\sin\left(\dfrac{x}{10}\right) + \dfrac{1}{10}\sin(10x)$; $h(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

9/1/2014 - Seconda prova parziale

1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$ e f la funzione definita per $x > 0$ da $f(x) = x^\alpha \log x$. Dire per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo a 0 e per quali α tale prolungamento è derivabile.
2. Quante radici reali ha l'equazione $x(x^2 - a^2) = c$ al variare dei parametri $a > 0$ e $c \in \mathbf{R}$?
3. (MatLab) Scrivere uno script che calcola il più piccolo numero N tale che $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}} > 10$.
4. Calcolare $\displaystyle\int \log\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6. Dire se l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log|1-x^2|}{x^2}\,dx$ è convergente.

7. Calcolare $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_x^0 e^{-t-t^2}\,dt\right)$, motivando i passaggi.

8. Studiare la funzione $f(x) = \cos x + \sin^2 x$.

21/1/2014

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}}{n^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbf{R}$.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3(2^\alpha)^n}$ per $\alpha \geq 0$.

3. E' possibile applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, relativamente all'intervallo $[0,2]$?

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{4\cos x + 3\sin x}\,dx$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\,dx$.

6. Dire per quali valori di $\alpha > 0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^\alpha)}{x^2}\,dx$ è convergente.

7. (Matlab) Si consideri la successione $a_n = \sin n$ per $n = 1, \ldots, 10$. Si costruisca la successione $\{b_n\}$ tale che $b_n = a_n$ se $a_n > 1/10$ e $b_n = 0$ se $a_n \leq 10$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \log(e^x - e^{-x})$: dominio, asintoti, zeri, crescenza, convessità.

11/2/2014

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\log_a(n+1) - \log_b n)$ per $a > 1$, $b > 1$, $a \neq b$.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)$ per $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$. Disegnare in un piano cartesiano α-β l'insieme delle coppie (α, β) per le quali la serie converge.

3. Provare rigorosamente che la funzione $\cos(\sqrt{x})$ non è periodica.

4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 1+} (x-1)^{1-\cos(x-1)}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \left((e^x)^2 + 1\right) e^x\,dx$.

6. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{\sin x \log(1+x)}\,dx$ è convergente.

7. (Matlab) Scrivere uno script che calcola il primo numero intero n tale che $n! > 10^6$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$: dominio, asintoti, crescenza, massimi e minimi, convessità.

9/6/2014

1. Sia $k > 0$. Determinare un asintotico semplice della successione $a_n = (n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}}$ per $n \to \infty$.

2. Dire se esiste il $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x+1)}{\sin x}$.

3. Sia $g = g(x)$ una funzione invertibile. Calcolare l'inversa della funzione $f(x) = \frac{1-g(x)}{1-2g(x)}$.

4. Dire se la funzione $f(x) = (x^2-1)^2$ ha dei punti di flesso, motivando la risposta. Disegnare un grafico approssimativo di f.

5. (Matlab) Scrivere un breve script che disegni il grafico di e^{-x} e della sua derivata (numerica).

6. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{x}{1-\sqrt{x}}$. Usarla per stabilire la convergenza dell'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e positiva. Provare che $(b-a)\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ per ogni coppia di punti $a, b \in \mathbf{R}$.

8. Studiare la funzione $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$.

14/7/2014

1. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n - (-1)^n \log(1+2^n)}{(-1)^n n^2 - n}$, motivando tutti i passaggi.

2. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n}$ converge; indicata con s la sua somma, trovare dei numeri a, b il più possibile precisi tali che $s \in (a,b)$.

3. Provare che la funzione $f(x) = \log x - \dfrac{1}{\log x}$ è invertibile in $(1,+\infty)$ e calcolare la sua funzione inversa.

4. Dire se esiste il $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\log(1+x^2)}{\sin^2(2x)}$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\cos^2 x\right)\sin(2x)\,dx$.

6. Dire se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ converge.

7. Scrivere un breve script in Matlab che calcoli ascissa e ordinata del punto di intersezione dei grafici delle funzioni e^{-x} e $\sin x$ in $[0,\pi/2]$, tracci i grafici delle due funzioni e metta in evidenza il punto di intersezione.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}e^{-x}$, specificando in particolare il comportamento in 0 e i punti di flesso.

14/7/2014

1. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n - (-1)^n \log(1+2^n)}{(-1)^n n^2 - n}$, motivando tutti i passaggi.

2. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 4^n}$ converge; indicata con s la sua somma, trovare dei numeri a, b il più possibile precisi tali che $s \in (a, b)$.

3. Provare che la funzione $f(x) = \log x - \frac{1}{\log x}$ è invertibile in $(1, +\infty)$ e calcolare la sua funzione inversa.

4. Dire se esiste il $\lim_{x \to 0} \frac{3x \log(1 + x^2)}{\sin^2(2x)}$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

5. Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\cos^2 x\right) \sin(2x)\, dx$.

6. Dire se l'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ converge.

7. Scrivere un breve script in Matlab che calcoli ascissa e ordinata del punto di intersezione dei grafici delle funzioni e^{-x} e $\sin x$ in $[0, \pi/2]$, tracci i grafici delle due funzioni e metta in evidenza il punto di intersezione.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}e^{-x}$, specificando in particolare il comportamento in 0 e i punti di flesso.

8/9/2014

1. Calcolare il $\lim_{n \to \infty} (\log n!)^{\frac{1}{n}}$.

2. Dire se le seguenti serie sono convergenti, divergenti o indeterminate, motivando in dettaglio le risposte:

   (a): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, *(b):* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1-n}$.

3. Provare, usando la definizione di limite, che $\lim_{x \to 0} \log(1 + x) = 0$.

4. Provare che la funzione $f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{\cosh(x) + 1}$ è invertibile in $[0, +\infty)$ e calcolarne quindi la funzione inversa.

5. Calcolare $\int \frac{1}{x^2 + x + 1}\, dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx$.

7. (Matlab) Definire tramite una `function` la funzione $f(x) = \log(1+x) - \frac{1}{1+x}$; quindi richiamarla in un file per disegnarne il grafico in $[0, 2]$ e calcolarne uno zero.

8. Studiare la funzione $f(x) = x^{1/2} - x^{2/3}$.