Analisi Matematica I

Andrea Corli

12 settembre 2021

Indice

Introduzione

Queste note sono una presentazione sintetica degli argomenti del corso di Analisi Matematica I per Ingegneri Civili e Ambientali che da anni tengo presso l'Università di Ferrara.

Non si tratta di un vero e proprio libro quanto di "appunti" delle lezioni, cresciuti e adattati anno dopo anno in conseguenza delle reazioni degli studenti; per questo motivo, alcuni argomenti un po' tecnici sono trattati superficialmente e altri, più complessi, in maniera intuitiva. Carenza più grave, le applicazioni sono quasi mancanti.

Ho cercato invece di chiarire quanto più possibile l'aspetto logico-deduttivo dell'analisi, cioè come da una ipotesi si deduca una tesi, di motivare lo studio dei problemi affrontati, di spiegare ogni risultato con esempi e controesempi. In particolare, di fornire per quanto possibile grafici e figure: alle volte un disegno, anche approssimativo, rende meglio un'idea di tante parole.

> *... "and what is the use of a book", thought Alice, "without pictures ... ?"*
>
> Lewis Carroll, Alice's adventures in wonderland

L'ultima parola spetta però allo studente, che deve cercare di studiare in maniera attiva senza lasciarsi intimorire dalla materia.

> *Can one learn mathematics by reading it? I am inclined to say no. Reading has an edge over listening because reading is more active – but not much. Reading with pencil and paper on the side is very much better – it is a big step in the right direction. The very best way to read a book, however, with, to be sure, pencil and paper on the side, is*

> *to keep the pencil busy on the paper and throw the book away.*
>
> Paul Halmos

Nella bibliografia sono riportati alcuni testi e libri di esercizi; si consigliano [5, 14]. Lo studente interessato allo sviluppo storico degli argomenti qui trattati troverà qualche informazione in [9] e, più in generale, in [3].

Requisiti. Vengono date per acquisite le notazioni elementari relative agli insiemi e la conoscenza delle funzioni elementari.
Notazioni. Il simbolo log sta per il logaritmo *naturale*, cioè in base e. Le funzioni trigonometriche $\sin, \cos, \ldots$ sono funzioni di variabile reale, ovvero il loro argomento è pensato in radianti; perciò $\sin(1)$ vuole dire "seno di 1 radiante", $\sin(\pi/2) = 1$.

Ferrara, 12 settembre 2021

Andrea Corli

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Notazioni

Definiamo

- l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- l'insieme dei numeri relativi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

- l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$,
- l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

In matematica le notazioni suggeriscono spesso proprietà dell'oggetto a cui si riferiscono: così la lettera $\mathbb{Q}$ ricorda "quoziente", mentre la lettera $\mathbb{Z}$ proviene dal tedesco *Zahl*, numero.

1.2 Sommatorie, progressioni geometriche, fattoriali

1.2.1 Sommatorie

Dati n numeri reali $a_1, \ldots, a_n$ si indica la loro *somma* con il simbolo di *sommatoria* $\sum_{k=1}^{n} a_k$, ovvero si pone

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,.$$

La lettera k è l'*indice della sommatoria.*

Esempio 1.2.1

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{10}.$
- $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} 3^j = 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n.$

Ovviamente si ha $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$, cioè l'indice della sommatoria è un *indice muto.* Le sommatorie posseggono alcune proprietà elementari evidenti, ad esempio:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$, per ogni numero reale c.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$

Dalla prima proprietà, scegliendo $a_k = 1$ per ogni k, si ha $\sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n$.

Esempio 1.2.2 Alle volte la somma di una sommatoria può essere calcolata con tecniche elementari.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Infatti scriviamo

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} k \;&=\; \Big(1+2+\ldots+(n-1)+n\Big) \\
&\quad +\Big(1+2+\ldots+(n-1)+n\Big).
\end{aligned}
$$

  Sommiamo quindi il primo addendo della prima sommatoria (cioè 1) con l'ultimo della seconda (n), ottenendo $n+1$. Sommiamo poi il secondo addendo della prima sommatoria (2) con il penultimo della seconda ($n-1$), ottenendo di nuovo $n+1$ e così via. Ripetendo questo procedimento per gli n addendi, si ottiene

$$
2\sum_{k=1}^{n} k \;=\; n(n+1)\,,
$$

  da cui la tesi. Ad esempio, $\sum_{k=1}^{100} k = 5050\,$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

  Notiamo infatti che $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; dunque

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&=\; \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots \\
&\quad\ \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&=\; 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

  per cancellazione. Sommatorie di questo tipo sono dette *telescopiche*.

1.2.2 Progressioni geometriche

Definizione 1.2.1 *Si dice che* n *numeri* $a_1, \dots, a_n$*, diversi da* 0*, sono in* progressione geometrica *se il rapporto tra ogni termine e il precedente è costante, cioè se*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q\,.$$

La costante q *è detta* ragione della progressione.

Pertanto se $a_1, \dots, a_n$ sono in progressione geometrica allora

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q, \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2, \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^3, \end{aligned}$$

ovvero, in generale, $a_{k+1} = a_1 q^k$, per $k = 0, \dots, n-1$. Una *progressione geometrica* di n termini è dunque determinata dal primo termine e dalla ragione; posto $a_1 = c$, la si può dunque scrivere in forma generale come

$$c, cq, cq^2, \dots, cq^{n-1}\,.$$

Qual è la somma dei primi n *termini di una progressione geometrica?* Poiché

$$\sum_{k=0}^{n-1} cq^k = c \sum_{k=0}^{n-1} q^k,$$

è sufficiente calcolare $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$. Per semplicità, poiché n è arbitrario, calcoleremo

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Se $q = 1$ si ha evidentemente

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n+1 \text{ volte}} = n + 1. \tag{1.1}$$

Se $q \neq 1$ la seguente proposizione risolve la questione.

Proposizione 1.2.1 *Se q è un numero reale diverso da 1 si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo infatti che

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \Big(1+q+\ldots+q^n\Big)-\Big(q+q^2+\ldots+q^{n+1}\Big) = 1-q^{n+1}\,.$$

$\square$

Con la formula precedente il calcolo della somma dei termini di una progressione geometrica diventa molto semplice.

Esempio 1.2.3

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{10}}$.
- Abbiamo
$$\sum_{k=1}^{10} 3^{3-k} = 3^3\left(\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{3^k}-1\right) = 3^3\left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{11}}\right)-1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(3^3-\frac{1}{3^7}\right).$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\frac{2^{2k}}{3^k} = \sum_{k=0}^{5}\left(-\frac{4}{3}\right)^k = \frac{3}{7}\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^6\right]$.

1.2.3 Fattoriali

Il prodotto dei primi n numeri naturali (escluso lo 0) è detto il *fattoriale di n*:

$$n! = 1\cdot 2\cdots n\,.$$

Per definizione si pone $0! = 1$. Perciò

$$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,$$
$$5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040, \ldots$$

Dalla definizione segue che $n! = (n-1)! \cdot n$. Ad esempio, $8! = 7! \cdot 8 = 40320$. Nel calcolo di quozienti di fattoriali è spesso conveniente semplificare le frazioni invece di procedere al calcolo diretto dei singoli fattoriali; ad esempio

$$\frac{10!}{8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8} = 9 \cdot 10 = 90\,.$$

Osservazione 1.2.1 Una interpretazione combinatorica del fattoriale è la seguente: $n!$ dà il numero di modi (*permutazioni*) in cui si possono ordinare n oggetti distinti. Ad esempio, le tre lettere a, b, c, possono essere ordinate nei $3! = 6$ modi seguenti:

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba\,.$$

Per dimostrare che il numero delle permutazioni di n oggetti è $n!$ si ragiona nel modo seguente. Dato un gruppo di n oggetti, possiamo disporre al primo posto uno qualsiasi degli n oggetti (dunque abbiamo n diverse possibilità); nel secondo posto possiamo disporre uno qualsiasi dei restanti $n-1$ oggetti ($n-1$ diverse possibilità), e così via.

Esempio 1.2.4 Per disporre 10 libri in un scaffale abbiamo a disposizione 10! modi diversi; se vogliamo sostenere 4 esami abbiamo 24 diverse scelte di ordine; possiamo sistemare 6 persone attorno ad un tavolo in 720 modi diversi.

1.3 Numeri razionali e numeri reali

1.3.1 Numeri razionali

Le *frazioni* $\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, costituiscono l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Ricordiamo che una caratterizzazione dei numeri razionali attraverso la *rappresentazione decimale* è la seguente.

> Ogni numero razionale è univocamente determinato da un allineamento decimale *limitato o illimitato periodico*, e viceversa.

Precisiamo questa caratterizzazione.

- L'allineamento decimale comprende anche le cifre a sinistra della virgola: 5/4 ha allineamento decimale 1,25.

- La divisione di due interi non può dare un allineamento decimale con periodo 9. Tuttavia si ammettono anche tali allineamenti, con la convenzione seguente: un allineamento

$$z, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k 999 \dots,$$

con $a_k \neq 9$ e $z \in \mathbb{Z}$, è equivalente a $z, a_1 a_2 \dots a_{k-1}(a_k + 1)$. Così l'allineamento 1,1$\bar{9}$ è identificato all'allineamento 1,2 (e corrispondono al numero razionale 6/5) e l'allineamento 0,$\bar{9}$ a 1.

Esempio 1.3.1

- $\dfrac{1}{2} = 0,5$, $\dfrac{5}{6} = 0,8\bar{3}$, $\dfrac{6}{7} = 0,\overline{857142}$.

Naturalmente è possibile anche una *rappresentazione geometrica* dei numeri razionali, come punti sulla retta euclidea.

1.3.2 Numeri reali

Esistono numeri che non sono razionali? La risposta, affermativa, si basa sul seguente risultato elementare.

Proposizione 1.3.1 *Sia d un numero tale che $d^2 = 2$; allora d non può essere razionale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $d = \frac{m}{n}$ con m, n *primi tra loro*, cioè senza divisori comuni diversi da 1. Poiché $m^2 = 2n^2$, segue che m^2 è pari, dunque m è pari. Perciò $m = 2p$. Ma allora $2p^2 = n^2$ e così pure n deve essere pari, assurdo. $\square$

Nella dimostrazione precedente abbiamo sfruttato la seguente proprietà: se m^2 è un numero naturale pari, allora anche m è pari; di seguito diamo qualche dettaglio in più per chi non ha familiarità con le proprietà dei numeri naturali. Ogni numero naturale m diverso da 0 ammette una unica fattorizzazione in numeri primi, cioè m si scrive

$$m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k},$$

dove i numeri $p_1, p_2, \dots, p_k$ sono numeri primi (diversi da 1) e gli esponenti $r_1, r_2, \dots, r_k$ sono numeri naturali maggiori o uguali a 1. Ad esempio, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; in questo caso $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ e $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$. Abbiamo che $m^2 = p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \dots p_k^{2r_k}$. Se m^2 è pari, allora tra i primi che lo fattorizzano ci deve essere il numero 2. Del resto, ogni primo che compare nella fattorizzazione di m^2 ha esponente almeno 2. Pertanto $2^2 = 4$ è un fattore di m^2 e dunque 2 è un fattore di m, cioè m è pari.

Il significato geometrico della proposizione precedente è il seguente: la diagonale di un quadrato (di lato 1) è *incommensurabile* con il lato, ovvero la diagonale e il lato non hanno multipli comuni. In altre parole il punto sulla retta euclidea che corrisponde alla lunghezza della diagonale del quadrato (cioè $\sqrt{2}$) non è occupato da nessun numero razionale: *la retta razionale ha dei buchi*, vedi Figura 1.1. Una corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea è ottenuta introducendo i *numeri reali*.

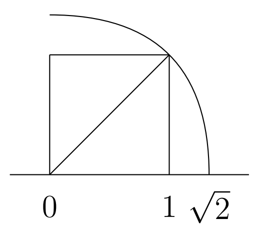

Figura 1.1: Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Definizione 1.3.1 *Un numero reale è un qualsiasi allineamento decimale; l'insieme dei numeri reali è indicato con* $\mathbb{R}$.

Dalla proposizione precedente vediamo che $\mathbb{Q}$ è strettamente contenuto in $\mathbb{R}$ (infatti $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). I numeri reali non razionali sono detti *irrazionali*. Sono irrazionali i numeri $\sqrt{2}, \pi, e$; i loro allineamenti decimali troncati alla quattordicesima cifra decimale sono i seguenti: $\sqrt{2} \sim 1,41421356237310$, $\pi \sim 3,14159265358979$, $e \sim 2,71828182845905$.

1.3.3 Intervalli

Alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono di frequente uso: gli *intervalli*. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ si definiscono gli intervalli

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}, \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}, \\ (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}. \end{aligned}$$

Si definiscono inoltre gli intervalli

$$\begin{aligned} [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\}, \\ (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\}, \\ (-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e analogamente $(a,+\infty)$ e $(-\infty,b)$.

Gli intervalli $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ sono *chiusi* (contengono i punti estremi); gli intervalli (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ sono *aperti* (non contengono i punti estremi). L'intervallo $[a,b)$ è quindi detto *chiuso a sinistra e aperto a destra*, e così via.

1.4 Massimo, minimo

Definizione 1.4.1 *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è detto* limitato *se esistono due numeri reali c, d tali che $E \subset [c,d]$, cioè per ogni $x \in E$ si ha*

$$c \leq x \leq d\,.$$

L'insieme E è detto:

- limitato superiormente *se $E \subset (-\infty, d]$, ovvero $x \leq d$ per ogni $x \in E$;*

- limitato inferiormente *se* $E \subset [c, +\infty)$, *ovvero* $c \leq x$ *per ogni* $x \in E$.

Pertanto un insieme è limitato se e solo se è limitato sia superiormente che inferiormente. Si faccia attenzione che i numeri c e d della Definizione 1.4.1 non sono necessariamente il minimo ed il massimo di E (che verranno definiti nella Definizione 1.4.2 ma che potrebbero non esistere) ma semplicemente due numeri reali, l'uno più piccolo e l'altro più grande di ogni elemento di E. In altre parole, essi definiscono un intervallo in modo che $E \subset [c, d]$.

Esempio 1.4.1

- L'insieme $[0, 1]$ è limitato: basta scegliere $c = 0$ e $d = 1$, ma anche $c = -1$ e $d = 2$ permettono di verificare la definizione. Analogamente l'insieme $(0, 1)$ è limitato.

- L'insieme $(-\infty, 0)$ è limitato superiormente ($d = 0$ o $d = 3$) ma non inferiormente.

- L'insieme $(-1, +\infty)$ è limitato inferiormente ($c = -2$ o $c = -3$) ma non superiormente.

Definizione 1.4.2 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; un numero reale r è un* massimo *per E se*

(i) $r \in E$;

(ii) $r \geq x$ *per ogni* $x \in E$.

Analogamente un numero reale r è un minimo *se $r \in E$ e $r \leq x$ per ogni $x \in E$.*

Osservazione 1.4.1

- Un insieme non limitato superiormente (inferiormente) non può avere massimo (minimo).

- Se un massimo (o un minimo) esiste, allora esso è unico. Siano infatti r_1 e r_2 due massimi di un insieme E; allora $r_1 \geq r_2$, poiché r_1 è massimo e $r_2 \in E$. Per lo stesso motivo si ha $r_2 \geq r_1$, dunque $r_1 = r_2$. Pertanto, se esiste, possiamo parlare *del* massimo (risp. *del* minimo) di un insieme; per identificarli si usano le notazioni

$$\max E\,, \quad \min E\,,$$

  rispettivamente.

- Se $E = \{x\}$, cioè E è costituito dal solo numero x, allora il massimo coincide col minimo (ed entrambi coincidono con x).

Esempio 1.4.2

- L'insieme $[0,1)$ ha minimo 0 ma non ha massimo. Supponiamo infatti per assurdo che $r \in \mathbb{R}$ sia il massimo. Allora si ha che:

  - non può essere $r \geq 1$ perché non varrebbe la *(i)*;
  - non può essere $0 \leq r < 1$ perché non varrebbe la *(ii)*: $r < \frac{r+1}{2} < 1$, e $\frac{r+1}{2} \in [0,1)$;
  - non può essere $r < 0$ perché non varrebbero né la *(i)* né la *(ii)*.

  Dunque $[0,1)$ non ha massimo.

  Pertanto la limitatezza di un insieme non è sufficiente a garantire l'esistenza del massimo o del minimo.

- L'insieme $\mathbb{N}$ ha minimo 0 ma non massimo; l'insieme $\mathbb{Z}$ non ha né massimo né minimo.

- L'insieme $\{\frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \ldots\}$ ha massimo 1 ma non ha minimo; l'insieme $\{\frac{n-1}{n} \colon n = 1, 2, \ldots\}$ ha minimo 0 ma non ha massimo.

- L'insieme $\{x \in \mathbb{Q} \colon x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ ha minimo 0 ma non ha massimo.

1.5 Estremo superiore ed estremo inferiore

Per ovviare al fatto che il massimo o il minimo di un insieme di numeri reali possono non esistere, introduciamo una loro "generalizzazione". Di questa daremo solo una presentazione intuitiva, rinviando a [5] per una costruzione assiomatica dei numeri reali.

Definizione 1.5.1 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Un numero $r \in \mathbb{R}$ è detto un* maggiorante *di E se $r \geq x$ per ogni $x \in E$. Analogamente, $r \in \mathbb{R}$ è detto un* minorante *di E se $r \leq x$ per ogni $x \in E$. Indichiamo con* $\operatorname{Magg} E$, $\operatorname{Minor} E$ *l'insieme dei maggioranti, rispettivamente, minoranti, di E.*

Osservazione 1.5.1

- Si noti che un maggiorante è caratterizzato dalla *(ii)* della Definizione 1.4.2; pertanto un massimo è un maggiorante, un minimo è un minorante. Tuttavia, diversamente dai massimi e dai minimi, ai maggioranti (minoranti) non viene richiesto di appartenere all'insieme.

- Se un insieme E non è limitato superiormente, allora non ha maggioranti, cioè $\operatorname{Magg} E = \emptyset$. Analogamente $\operatorname{Minor} E = \emptyset$ se E non è limitato inferiormente.

Esempio 1.5.1 Riprendiamo l'Esempio 1.4.2. Si trova subito che

$$\begin{aligned} \operatorname{Magg}[0,1) &= [1,+\infty)\,, \\ \operatorname{Magg} \mathbb{N} &= \emptyset\,, \\ \operatorname{Magg} \left\{ \frac{1}{n} \colon n = 1,2,\dots \right\} &= [1,+\infty)\,, \\ \operatorname{Magg} \left\{ x \in \mathbb{Q} \colon x \geq 0,\ x^2 \leq 2 \right\} &= [\sqrt{2},+\infty)\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

In tutti e quattro i casi, invece, l'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$.

L'insieme dei numeri reali ha la seguente proprietà.

> **(C)** Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, non vuoto e limitato superiormente; allora l'insieme dei maggioranti di E ha minimo in $\mathbb{R}$. Analogamente, se $E \subset \mathbb{R}$ non è vuoto e limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di E ha massimo in $\mathbb{R}$.

Questa proprietà, detta *di completezza*, *non* è conseguenza della Definizione 1.3.1 dei numeri reali; si tratta invece di una parte integrante della *costruzione assiomatica* dei numeri reali, che qui per semplicità non diamo.

La proprietà **(C)** permette di definire quanto segue.

Definizione 1.5.2 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, non vuoto e limitato superiormente; definiamo allora l'*estremo superiore *di E*

$$\sup E = \min \operatorname{Magg} E\,.$$

*Analogamente, se $E \subset \mathbb{R}$ non è vuoto e limitato inferiormente, si definisce l'*estremo inferiore *di E*

$$\inf E = \max \operatorname{Minor} E\,.$$

Nel caso in cui $E \neq \emptyset$ non sia limitato superiormente si pone $\sup E = +\infty$*, se non limitato inferiormente si pone* $\inf E = -\infty$*.*

Osservazione 1.5.2

- L'estremo superiore di un insieme E è *un numero reale* se E è non vuoto e limitato superiormente. Invece la scrittura "$\sup E = +\infty$" non identifica un numero reale, ma è solo un modo semplice e intuitivo per significare che E non è limitato superiormente.

  Tramite la Definizione 1.5.2 la proprietà **(C)** si può anche enunciare come segue.

  > **(C)$'$** Ogni insieme non vuoto e superiormente (inferiormente) limitato di numeri reali ha estremo superiore (inferiore).

- Si noti che $\sup E \in \operatorname{Magg} E$ e $\inf E \in \operatorname{Minor} E$; in generale, tuttavia, non è detto che $\sup E \in E$ o che $\inf E \in E$.

- Se E ha massimo allora $\sup E = \max E$. Infatti $\max E$ è un maggiorante di E, dunque $\sup E \leq \max E$ per la Definizione 1.5.2. Del resto $\sup E \in \operatorname{Magg} E$ e poiché $\max E \in E$ ne segue che $\sup E \geq \max E$. Questo prova la tesi.

  Analogamente, $\inf E = \min E$ se esiste il minimo di E.

Esempio 1.5.2 In riferimento agli Esempi 1.4.2 e 1.5.1 si trova che

$$\begin{aligned} \sup[0,1) &= 1, \\ \sup \mathbb{N} &= +\infty, \\ \sup\left\{\frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \ldots\right\} &= 1, \\ \sup\left\{x \in \mathbb{Q} \colon x \geq 0,\ x^2 \leq 2\right\} &= \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

In tutti i casi di sopra, invece, l'estremo inferiore è 0.

Si noti che la Definizione 1.5.1 può essere data rimpiazzando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$, considerando cioè maggioranti e minoranti razionali. Tuttavia si vede subito che la proprietà **(C)** è *falsa* per l'insieme $\mathbb{Q}$: ad esempio, l'insieme (1.2) non ha minimo *in* $\mathbb{Q}$.

La proprietà di completezza, che prende anche il nome di proprietà di continuità, o di proprietà dell'estremo superiore, o infine di *assioma di Dedekind*, si può parafrasare dicendo che *la retta reale non ha buchi*.

1.6 Disuguaglianze

Ricordiamo la definizione di *valore assoluto* (o *modulo*) di un numero reale a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si ha chiaramente $|-a| = |a|$; inoltre, se a è un numero positivo, allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a. \tag{1.3}$$

Se prendiamo $a = |x|$, allora ne segue che $-|x| \leq x \leq |x|$.

Nel seguito useremo frequentemente la *disuguaglianza triangolare*: se a, b sono numeri reali allora

$$|a+b| \leq |a| + |b| \,.$$

Essa è ottenuta sommando le due disuguaglianze $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$. Nel caso di n addendi si deduce facilmente

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \,.$$

Si ha inoltre la disuguaglianza

$$|a| - |b| \leq |a - b|, \tag{1.4}$$

che si dimostra facilmente osservando che $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$. Infine vale la disuguaglianza

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|, \tag{1.5}$$

che si ottiene scambiando a con b nella disuguaglianza (1.4).

Definiamo qui inoltre la *parte intera* di un numero reale x: è il più grande numero intero minore o uguale ad x, e si indica $[x]$. Si noti pertanto che $[3,45] = 3$, $[-2,71] = -3$, $[4] = 4$. La *parte frazionaria* $\{x\}$ di un numero reale x è definita da $\{x\} = x - [x]$; si tratta di quantità sempre maggiore o uguale a 0. Ad esempio $\{3,45\} = 0,45$, $\{-2,71\} = 0,29$, $\{4\} = 0$.

Capitolo 2

Successioni

2.1 Definizioni

Definizione 2.1.1 *Una* successione *di numeri reali è una corrispondenza che associa ad ogni numero naturale n un unico numero reale a_n: $n \mapsto a_n$. L'insieme dei valori a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ della successione è indicato enumerativamente $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, o, in maniera più compatta, come $\{a_n\}$.*

Più in generale una successione può essere definita solo da un certo numero naturale in poi.

Esempio 2.1.1 Le successioni $a_n = n^2$, $a_n = (-1)^n$ sono definite per $n \geq 0$, la successione $a_n = \frac{1}{n}$ per $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$ per $n \geq 2$.

Nel seguito supporremo per semplicità che la generica successione $\{a_n\}$ sia definita per $n \in \mathbb{N}$. Graficamente le successioni si possono rappresentare su un piano, riportando le coppie (n, a_n), o più semplicemente su una retta, riportando i soli valori a_n, $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.1.2 *Una successione $\{a_n\}$ è* limitata *se esistono due numeri reali c, d tali che*

$$c \leq a_n \leq d \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

limitata superiormente *se $a_n \leq d$,* limitata inferiormente *se $a_n \geq c$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

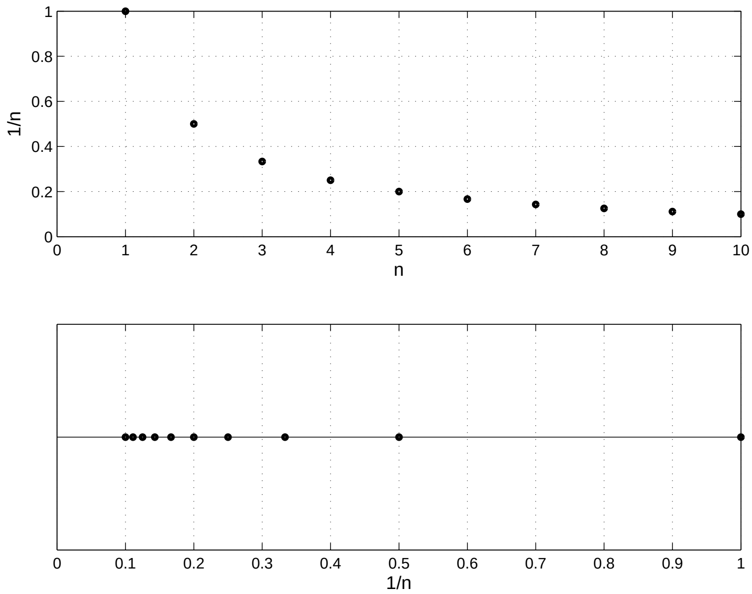

Figura 2.1: I primi dieci termini della successione $\{1/n\}$.

In altre parole una successione è limitata (superiormente, inferiormente) se l'insieme dei suoi valori lo è secondo la Definizione 1.4.1.

Esempio 2.1.2 Le successioni: $\{1/n\}$, $\{(-1)^n\}$ sono limitate, $\{n^2\}$ è limitata inferiormente ma non superiormente, $\{-n\}$ è limitata superiormente ma non inferiormente, $\{(-1)^n n\}$ non è limitata né superiormente né inferiormente.

Saremo interessati nel seguito al comportamento di una successione per valori di n sempre più grandi. Per precisare questo comportamento diamo la seguente definizione.

Definizione 2.1.3 *Una successione $\{a_n\}$ soddisfa* definitivamente *una proprietà se esiste un numero naturale N tale che la proprietà sia verificata dai termini a_n con $n \geq N$.*

Esempio 2.1.3 La successione $\{n^2 - 10n\}$ è definitivamente maggiore o uguale a 0 ($N = 10$); $1/n \leq 1/100$ definitivamente ($N = 100$); la successione $\{(-2)^n\}$ non è definitivamente positiva.

Il numero N nella Definizione 2.1.3 potrà essere scelto reale invece che naturale: se infatti la proprietà vale per $n \geq N \in \mathbb{R}$, $N > 0$, allora essa vale per $n \geq [N] + 1 \in \mathbb{N}$. Ad esempio, si ha che $n^2 \geq 5$ definitivamente; infatti, risolvendo la disequazione si trova $n \geq \sqrt{5}$. Poiché $2 < \sqrt{5} < 3$, si avrà che $n^2 \geq 5$ se $n \geq 3$.

2.2 Limiti di successioni

2.2.1 Successioni convergenti

Definizione 2.2.1 *Una successione* $\{a_n\}$ *è detta* convergente *se esiste un numero reale* l *per cui vale che: per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un numero* N *tale che*

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \textit{per ogni } n > N. \tag{2.1}$$

Osservazione 2.2.1

- In generale il numero N dipenderà da ϵ e crescerà al diminuire di ϵ.
- La definizione si può equivalentemente enunciare così: per ogni $\epsilon > 0$ risulta $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ definitivamente. Per chiarezza ci riferiremo spesso all'enunciato della definizione.
- Il numero l nella definizione è unico: se l_1, l_2 soddisfano (2.1), rispettivamente per

  $$n > N_1, N_2,$$

  allora per $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ si ha

  $$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\epsilon\,.$$

  Se fosse $l_1 \neq l_2$ basterebbe scegliere $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ per giungere a una contraddizione; dunque $l_1 = l_2$. Possiamo perciò chiamare l, se esiste, *il* limite della successione; si scrive

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to l \text{ per } n \to \infty\,. \tag{2.2}$$

  Si dice equivalentemente che la successione $\{a_n\}$ ha (converge al) limite l.

Vedremo in seguito limiti (di funzioni) in cui sarà necessario specificare $\pm\infty$ a seconda che la variabile (qui n) diventi sempre più grande (positivamente) o più piccola (negativamente); a rigore, la scrittura introdotta sopra si dovrebbe dunque specificare in $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$. Il segno $+$ è omesso per semplicità poiché per le successioni può presentarsi solo il primo caso.

- Graficamente una successione convergente ha punti (n, a_n) definitivamente compresi in una striscia orizzontale di ordinate $l-\epsilon$, $l+\epsilon$ (si veda la Figura 2.2), ovvero ha valori a_n definitivamente compresi nell'intervallo $[l-\epsilon, l+\epsilon]$.

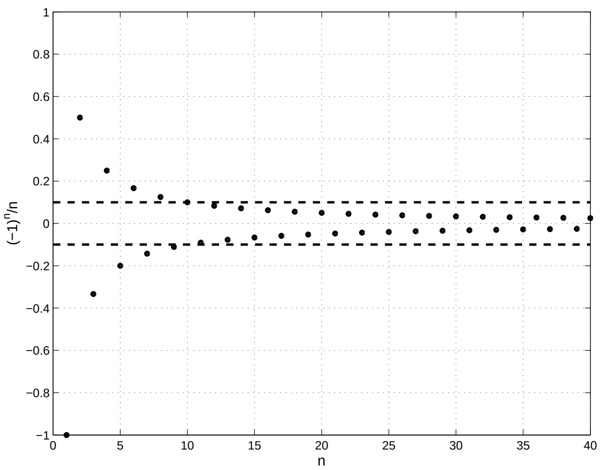

Figura 2.2: La successione convergente $\{(-1)^n/n\}$. Qui $l = 0$, $\epsilon = 1/10$.

- Per l'arbitrarietà di ϵ la disuguaglianza $|a_n - l| < \epsilon$ può essere rimpiazzata da $|a_n - l| \leq \epsilon$. La richiesta $n > N$ può essere rimpiazzata da $n \geq N$. Questa arbitrarietà nell'uso delle disuguaglianze sarà frequentemente utilizzata negli esempi.

Osservazione 2.2.2 La disuguaglianza $|a_n - l| < \epsilon$ in (2.1) può essere rimpiazzata da $|a_n - l| < C\epsilon$. Più precisamente $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se e solo se esiste $C > 0$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che

$$|a_n - l| < C\epsilon \quad \text{per ogni } n > N. \tag{2.3}$$

Se infatti vale (2.3), fissato arbitrariamente $\delta > 0$ applichiamo (2.3) a $\epsilon = \delta/C$ e ritroviamo (2.1) con δ al posto di ϵ. In maniera analoga si dimostra che (2.1) implica (2.3). Questa osservazione sarà di utilizzo frequente nel seguito.

Esempio 2.2.1

- Se $c \in \mathbb{R}$ e $a_n = c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. In questo caso possiamo scegliere $N = 0$ per ogni $\epsilon > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Basta prendere $N = 1/\epsilon$; notare che N dipende da ϵ e cresce al diminuire di ϵ.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1} = 1$. Infatti nella doppia disuguaglianza $1 - \epsilon < \frac{n-1}{n+1} < 1 + \epsilon$ la disuguaglianza di destra è sempre verificata, quella di sinistra per $n > N = \frac{2-\epsilon}{\epsilon}$. In particolare la doppia disuguaglianza è soddisfatta per ogni n se $\epsilon \geq 2$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$. Infatti nella disuguaglianza $1-\epsilon < 2^{1/n} < 1+\epsilon$ la disuguaglianza di sinistra è sempre verificata, quella di destra per $n > N = \frac{1}{\log_2(1+\epsilon)}$. Ad esempio per $\epsilon = 1/10$ si ha $N \sim 7.27$, per $\epsilon = 1/100$ si ha $N \sim 69.66$.

Proposizione 2.2.1 *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$; dalla definizione di limite segue allora che $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ se $n > N$. Sia poi $M = \max\{a_1, \ldots, a_N\}$, $m = \min\{a_1, \ldots, a_N\}$. Pertanto

$$\begin{array}{ll} m \leq a_n \leq M & \text{se } n \leq N, \\ l - \epsilon < a_n < l + \epsilon & \text{se } n > N, \end{array}$$

e dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\min\{l - \epsilon, m\} \leq a_n \leq \max\{l + \epsilon, M\}\,.$$

Si verifica pertanto la limitatezza della successione $\{a_n\}$ prendendo, con le notazioni della Definizione 2.1.2, $c = \min\{l - \epsilon, m\}$, $d = \max\{l + \epsilon, M\}$. $\square$

Esempio 2.2.2

- Consideriamo la dimostrazione della Proposizione 2.2.1 nel caso particolare della successione $a_n = \{(-1)^n/n\}$, si veda la Figura 2.2. In tal caso $l = 0$ e, con $\epsilon = 1/10$, si ha $N = 10$, $M = 1/2$, $m = -1$.

- La successione $\{n^2\}$ non può essere convergente: non è limitata (superiormente).

- Vi sono successioni limitate ma non convergenti, ad esempio la successione $\{(-1)^n\}$.

  Essa è limitata: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Supponiamo per assurdo che abbia limite l:

  - non può essere $l > 1$, poiché nell'intervallo $[l-\epsilon, l+\epsilon]$, con $\epsilon < (l+1)/2$, non cadono elementi della successione;
  - non può essere $l = 1$ poiché nell'intervallo $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$, con $\epsilon < 2$, non cadono gli elementi della successione relativi agli indici dispari;
  - non può essere $0 \leq l < 1$: nell'intervallo $[l-\epsilon, l+\epsilon]$, con $\epsilon < (l+1)/2$, non cadono elementi della successione;
  - non può essere $l < 0$, per simmetria.

  Pertanto la successione è limitata ma non ha limite.

In conseguenza della Proposizione 2.2.1 e dell'Esempio 2.2.2 abbiamo che, per una successione,

$$\text{convergente} \quad \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad \text{limitata.}$$

La locuzione "$\{a_n\}$ ha limite" *non* è dunque equivalente alla locuzione "$\{a_n\}$ è limitata".

Esempio 2.2.3 E' facile dimostrare che

$$\begin{array}{lcl}
\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|, \\
\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 & \Leftarrow & \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.
\end{array}$$

Per dimostrare l'implicazione della prima riga basta osservare che vale $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$ per la (1.5). Per dimostrare che l'implicazione opposta non vale basta considerare la successione $\{(-1)^n\}$. La seconda riga segue direttamente dalla definizione di limite.

L'Esempio 2.2.2 mostra due tipi diversi di successioni non convergenti. Esse vengono distinte nelle seguenti definizioni.

2.2.2 Successioni divergenti

Definizione 2.2.2 *Una successione $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un numero N tale che $a_n > M$ per ogni $n > N$. In tal caso si dice che la successione $\{a_n\}$ ha limite $+\infty$, in simboli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \textit{oppure} \quad a_n \to +\infty \textit{ per } n \to \infty\,.$$

Analogamente $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste N tale che $a_n < -M$ per ogni $n > N$, in simboli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, oppure $a_n \to -\infty$ per $n \to \infty$.

Nella definizione la richiesta che M sia positivo non è indispensabile; in generale il numero N dipenderà da M. La definizione di successione divergente a $+\infty$ si riformula anche così: per ogni $M > 0$ vale che $a_n > M$ definitivamente. Analogamente si riformula la definizione di successione divergente a $-\infty$.

Osservazione 2.2.3 Diversamente dalla notazione $\lim_{n\to\infty} a_n$, in cui il segno $+$ davanti al simbolo di infinito è tralasciato, nella notazione $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ tale segno è indispensabile per distinguerla da $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. In altre parole non useremo *mai* la notazione ambigua $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Osservazione 2.2.4 Benché le espressioni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

siano simili, si faccia attenzione al fatto che nel primo caso il limite l è un *numero reale*, nel secondo il limite $+\infty$ è un *simbolo*, non un numero. Nonostante questa differenza diremo che una successione *ha limite* se essa è convergente o divergente; tale limite sarà un numero reale o $\pm\infty$ a seconda del caso.

Esempio 2.2.4

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Basta prendere $N = \sqrt{M}$.
- $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$. Si prende $N = e^M$.
- $\lim_{n\to\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$. Si prende $N = M^2$.

Esempio 2.2.5 Sia $\{a_n\}$ una successione a termini strettamente positivi: $a_n > 0$ per ogni n. Se $b > 1$ si ha che

$$\begin{aligned} a_n \to +\infty &\;\Rightarrow\; \log_b a_n \to +\infty, \\ a_n \to l > 0 &\;\Rightarrow\; \log_b a_n \to \log_b l, \\ a_n \to 0 &\;\Rightarrow\; \log_b a_n \to -\infty. \end{aligned}$$

Infatti $\log_b a_n \to +\infty$ equivale a richiedere $\log_b a_n \geq M$ definitivamente, cioè $a_n \geq b^M$ definitivamente, e questo è vero se $a_n \to +\infty$.

Inoltre $|\log_b a_n - \log_b l| \leq \epsilon$ equivale a $\left|\log_b \frac{a_n}{l}\right| \leq \epsilon$, cioè $\frac{l}{b^\epsilon} \leq a_n \leq b^\epsilon l$. Mettiamo in evidenza il limite l in quest'ultima espressione, aggiungendo e togliendo l nei termini a sinistra e destra; otteniamo

$$l - \left(1 - \frac{1}{b^\epsilon}\right) l \leq a_n \leq l + (b^\epsilon - 1)l.$$

Poiché $l-\delta \leq a_n \leq l+\delta$ definitivamente, scelto $\delta \leq \min\{(1-\frac{1}{b^\epsilon})l, (b^\epsilon - 1)l\} = (b^\epsilon - 1)l$, in quanto $b > 1$, si ha la seconda implicazione.

La terza implicazione segue analogamente.

Se $0 < b < 1$ si ha che $\log_b a_n = -\log_{\frac{1}{b}} a_n$ e dunque

$$\begin{aligned} a_n \to +\infty &\;\Rightarrow\; \log_b a_n \to -\infty, \\ a_n \to l > 0 &\;\Rightarrow\; \log_b a_n \to \log_b l, \\ a_n \to 0 &\;\Rightarrow\; \log_b a_n \to +\infty. \end{aligned}$$

Concludiamo questa sezione con una definizione.

Definizione 2.2.3 *Una successione è detta* infinitesima *se ha limite* 0*. Una successione è detta* infinita *se ha limite* $+\infty$ *o* $-\infty$*.*

Esempio 2.2.6

- Le successioni $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $b_n = \log\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ sono infinitesime (la seconda per l'Esempio 2.2.5).
- Le successioni $a_n = n^2$ e $b_n = -n!$ sono infinite.

2.2.3 Successioni indeterminate

Definizione 2.2.4 *Una successione è detta* indeterminata *o* irregolare *se non è convergente né divergente.*

In altre parole, una successione indeterminata *non ha limite.* Ad esempio le successioni $\{(-1)^n\}$ e $\{(-2)^n\}$ sono indeterminate; si noti che la prima è limitata mentre la seconda non lo è. Esse sono casi particolari della *successione geometrica*, che esaminiamo qui sotto.

Abbiamo pertanto classificato le successioni, a seconda del loro comportamento al limite, in tre classi: *convergenti*, *divergenti*, *indeterminate*.

Esempio 2.2.7 (La successione geometrica) La successione geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$ è la successione $\{q^n\}$, dedotta dalla progressione geometrica relativa. Proviamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ 0 & \text{se } |q| < 1, \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Infatti, se $q > 1$ la disuguaglianza $q^n > M$ è soddisfatta se $n > N = \log_q M$.

Se $q = 1$ il risultato è evidente.

Se $|q| < 1$ la disuguaglianza $|q^n| < \epsilon$ equivale a $|q|^n < \epsilon$, soddisfatta se $n > N = \log_{|q|} \epsilon$ (il logaritmo in base $b < 1$ è decrescente).

Se $q = -1$ si è già visto che la successione non ha limite. Se $q < -1$ la successione non è limitata, dunque non può essere convergente; non è divergente perché non è né definitivamente positiva né definitivamente negativa. Dunque è indeterminata.

2.2.4 L'insieme $\mathbb{R}^*$

Un modo formale di esprimere l'Osservazione 2.2.4 è il seguente. Introduciamo *l'insieme completato dei numeri reali*

$$\mathbb{R}^* = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Si tratta dell'usuale insieme dei numeri reali al quale abbiamo aggiunto due "elementi". Ad essi non corrisponde alcun punto sulla retta reale, ma vedremo come le usuali operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{R}$ possano essere parzialmente estese a $\mathbb{R}^*$ (Osservazione 2.3.1). L'Osservazione 2.2.4 si precisa pertanto in: *una successione convergente o divergente ha limite* in $\mathbb{R}^*$.

Si noti infine che la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$, si veda l'Osservazione 1.5.2, può ancora essere enunciata come segue.

> **(C)$''$** Ogni insieme non vuoto di numeri reali ha estremo superiore e inferiore in $\mathbb{R}^*$.

2.2.5 Successioni monotòne

In questa sezione vogliamo rispondere alla seguente domanda: *Esistono condizioni generali che implicano l'esistenza del limite di una successione?*

Definizione 2.2.5 *Una successione $\{a_n\}$ è detta* crescente *(*decrescente*) se $a_n \leq a_{n+1}$ (risp. se $a_n \geq a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione $\{a_n\}$ è detta* strettamente crescente *(*strettamente decrescente*) se $a_n < a_{n+1}$ (risp. se $a_n > a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Queste successioni sono dette monotòne (strettamente monotòne)*.*

Esempio 2.2.8 La successione $\{n^2\}$ è strettamente crescente, $\{\frac{1}{n}\}$ strettamente decrescente, $\left[\frac{n}{2}\right]$ crescente non strettamente, $\{(-1)^n\}$ e $\{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\}$ non sono monotone.

Il risultato principale sulle successioni monotone è contenuto nel seguente teorema, del quale non si dà la dimostrazione.

Teorema 2.2.1 *Ogni successione monotòna $\{a_n\}$ ha limite. Più precisamente,*

$$\begin{aligned} \{a_n\} \quad \textit{crescente} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}\,,\\ \{a_n\} \quad \textit{decrescente} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}\,. \end{aligned}$$

Commentiamo l'enunciato del Teorema 2.2.1, considerando il caso di una successione $\{a_n\}$ crescente:

- se $\{a_n\}$ è limitata superiormente allora essa converge al valore reale $\sup\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}$;
- se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, e dunque $\sup\{a_n\colon n\in\mathbb{N}\}=+\infty$, essa diverge a $+\infty$.

Una successione che ha limite non deve necessariamente essere monotòna: si consideri ad esempio la successione convergente $\{(-1)^n/n\}$ o la successione divergente $\{n+(-1)^n\}$. Perciò per una successione

$$\text{monotòna} \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ \text{ha limite.}$$

2.3 Proprietà dei limiti

In questa sezione ci occupiamo delle proprietà dei limiti di successioni. Le dimostrazioni sono elementari e in molti casi tralasciate per brevità.

2.3.1 Limiti finiti

Proposizione 2.3.1 (Operazioni fondamentali) *Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono due successioni convergenti rispettivamente ai numeri reali a e b, allora*

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n \quad &\to \quad a\pm b,\\ a_n\cdot b_n \quad &\to \quad a\cdot b,\\ a_n/b_n \quad &\to \quad a/b \qquad \textit{se } b_n\neq 0,\ b\neq 0,\\ a_n^{b_n} \quad &\to \quad a^b \qquad \textit{se } a_n>0,\ a>0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Per la prima formula, nel caso della somma si osservi che
$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon$$
definitivamente, da cui la tesi per l'Osservazione 2.2.2. Nel caso della differenza basta porre $c_n = -b_n$ nella formula appena dimostrata.

Per la seconda, si ha
$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|.$$
La successione $\{b_n\}$ è limitata essendo convergente, dunque $|b_n| \leq C$ per ogni n. Segue che $|a_n b_n - ab| \leq (C + |a|)\epsilon$ definitivamente, da cui la tesi di nuovo per l'Osservazione 2.2.2.

Per la terza, osserviamo che
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - b_n a}{b_n b}\right| &= \frac{|a_n b - ab + ab - b_n a|}{|b_n b|} \\ &\leq \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a| \cdot |b_n - b|}{|b_n b|}.\end{aligned}$$
Inoltre $|b_n|$ converge a $|b|$ per l'Esempio 2.2.3; dunque, scelto $\epsilon = |b|/2$, risulta $|b_n| > |b|/2$ definitivamente. Pertanto per ogni $\epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \left(\frac{2}{|b|} + \frac{2|a|}{|b^2|}\right)\epsilon$ definitivamente, da cui la tesi.

Una dimostrazione elementare della quarta è un po' più complicata e viene omessa. $\square$

Esempio 2.3.1 La formula (2.4) implica che, scegliendo $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $b_n \to b$, si ha $\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^b$. Scegliendo invece $a_n \to a$ e $b_n = b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\lim_{n\to\infty}(a_n)^b = a^b$.

Esempio 2.3.2 I seguenti limiti sono dedotti immediatamente dalle proprietà enunciate sopra:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{n-1}{n+1}\right) = 1.$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n+1}{n-1}\right) = 0.$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-1/n} = 1.$

Teorema 2.3.1 (Permanenza del segno) *Sia* $\{a_n\}$ *una successione,* $a \in \mathbb{R}$, *e supponiamo* $a_n \to a$. *Si ha che:*

(i) *se* $a_n \geq 0$ *definitivamente, allora* $a \geq 0$*;*

(ii) *se* $a > 0$, *allora* $a_n > 0$ *definitivamente.*

Dimostrazione. Per ogni $\epsilon > 0$ si ha definitivamente che

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon\,. \tag{2.5}$$

Dimostriamo *(i)*: se fosse $a < 0$ allora, scelto $\epsilon = -a/2$, dalla disuguaglianza di destra in (2.5) si avrebbe $a_n < a/2 < 0$ definitivamente, assurdo.

Infine dimostriamo *(ii)*: scelto $\epsilon = a/2$, dalla disuguaglianza di sinistra in (2.5) si ha $0 < a/2 < a_n$ definitivamente. □

Il nome di *teorema della permanenza del segno* viene talvolta attribuito al solo enunciato *(i)*. Si noti che i segni di disuguaglianza negli enunciati *(i)* e *(ii)* sono precisi; infatti se $a_n \to a$ allora

$$\begin{aligned} a_n > 0 \text{ definitivamente} \quad &\not\Rightarrow \quad a > 0 \\ a \geq 0 \quad &\not\Rightarrow \quad a_n \geq 0 \text{ definitivamente.} \end{aligned}$$

Per la prima riga si prenda la successione $\{1/n\}$, per la seconda la successione $\{(-1)^n/n\}$.

Corollario 2.3.1 (Ordinamento) *Se* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sono due successioni convergenti ad* a *e* b, *allora*

$$a_n \geq b_n \textit{ definitivamente } \Rightarrow a \geq b\,.$$

Dimostrazione. Si applichi il punto *(i)* del Teorema 2.3.1 alla successione $a_n - b_n$. □

Teorema 2.3.2 (Confronto) *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *tre successioni, con* $a_n \leq b_n \leq c_n$. *Allora*

$$a_n \to l,\ c_n \to l \Rightarrow b_n \to l\,.$$

Dimostrazione. Definitivamente si ha $l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon$. □

Proposizione 2.3.2 *Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e $\{b_n\}$ una successione infinitesima. Allora il prodotto $\{a_n b_n\}$ è infinitesimo.*

Dimostrazione. Da $|a_n| \leq M$ segue $|a_n \cdot b_n| < M\epsilon$ definitivamente. □

Esempio 2.3.3 Con la proposizione precedente ritroviamo che

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

Inoltre, ad esempio, $(\sin n) \cdot \frac{1}{n} \to 0$.

2.3.2 Limiti infiniti

Proposizione 2.3.3 (Operazioni fondamentali) *Consideriamo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, $a \in \mathbb{R}$. Si ha*

$$\begin{aligned}
a_n \to a,\ b_n \to \pm\infty &\quad\Rightarrow\quad a_n + b_n \to \pm\infty, \\
a_n \to \pm\infty,\ b_n \to \pm\infty &\quad\Rightarrow\quad a_n + b_n \to \pm\infty, \\
a_n \to a > 0,\ b_n \to \pm\infty &\quad\Rightarrow\quad a_n \cdot b_n \to \pm\infty, \qquad (2.6) \\
a_n \to a > 0,\ b_n \to 0,\ b_n \gtrless 0 &\quad\Rightarrow\quad a_n / b_n \to \pm\infty, \qquad (2.7) \\
a_n \to a > 0,\ b_n \to \pm\infty &\quad\Rightarrow\quad a_n / b_n \to 0. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo ad esempio la prima implicazione nel caso $b_n \to +\infty$. Fissiamo $M > 0$; dobbiamo dimostrare che $a_n + b_n > M$ definitivamente.

Poiché la successione $\{a_n\}$ è convergente essa è limitata: $|a_n| \leq C$; perciò $a_n + b_n \geq b_n - C$. Poiché $b_n \to +\infty$ si ha che $b_n > M + C$ definitivamente e dunque, dalla disuguaglianza precedente, $a_n + b_n > M$ definitivamente. □

Si noti che da (2.7), (2.8) segue che

$$\begin{aligned}
b_n \to 0,\ b_n \gtrless 0 &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{b_n} \to \pm\infty, \\
b_n \to \pm\infty &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{b_n} \to 0. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Esempio 2.3.4

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Se $\alpha > 0$ si verifica la definizione di limite con $n > N = M^{1/\alpha}$. Se $\alpha < 0$ (e allora ovviamente $-\alpha > 0$) si noti che $n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}}$: il denominatore diverge a $+\infty$ per quanto provato nel primo caso, dunque n^α è infinitesimo per (2.8).

Esempio 2.3.5

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\log(1+\frac{1}{n})} = +\infty.$

  Infatti $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \to 1$ per (2.4), mentre $\log(1+\frac{1}{n}) \to 0$ per l'Esempio 2.2.5. Poiché $\log(1+\frac{1}{n}) > 0$ per ogni n, si conclude con la (2.7).

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(-2)^n} = 0.$

  Si noti che, diversamente dalla (2.9), la successione $\{\frac{1}{1+(-2)^n}\}$ ha limite 0 nonostante la successione a denominatore non abbia limite. Per dimostrare che la successione è infinitesima basta osservare che $\left|\frac{1}{1+(-2)^n}\right| < \epsilon$ se $\left|1+(-2)^n\right| > \frac{1}{\epsilon}$ e

  $$\left|1+(-2)^n\right| \geq 2^n - 1 > \frac{1}{\epsilon}$$

  se $n > \log_2\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)$.

Osservazione 2.3.1 La Proposizione 2.3.3 può essere enunciata in modo più conciso impiegando le seguenti notazioni. Scriviamo $a + \infty = +\infty$ per intendere che se $a_n \to a$ e $b_n \to +\infty$ allora $a_n + b_n \to +\infty$; notazioni analoghe si danno per gli altri casi. Scriveremo inoltre $0\pm$ per intendere una successione $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ $(0+)$ o $a_n < 0$

$(0-)$. Con queste notazioni la Proposizione 2.3.3 si enuncia:

$$
\begin{aligned}
a \pm \infty &= \pm\infty, && (2.10)\\
\pm\infty \pm \infty &= \pm\infty, && (2.11)\\
a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty, \quad a > 0, && (2.12)\\
\frac{a}{0\pm} &= \pm\infty, \quad a > 0, && (2.13)\\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0, \quad a > 0. && (2.14)
\end{aligned}
$$

L'ultima formula può essere precisata in $\frac{a}{\pm\infty} = 0\pm$, $a > 0$. Si noti invece che la scrittura $a/0 = \infty$ non ha senso: la successione $b_n = (-1)^n/n$ è infinitesima ma $1/b_n$ non ha limite.

I Teoremi della permanenza del segno e del confronto, dati nella Sezione 2.3.1, non sono significativi nel caso di limiti infiniti. Il Corollario di ordinamento, invece, si traduce così:

$$
\left.\begin{array}{c} a_n \geq b_n \text{ definitivamente} \\ b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \to +\infty\,. \qquad (2.15)
$$

Il caso $a_n \leq b_n$ (definitivamente) è analogo: se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$.

2.3.3 Forme indeterminate

La Proposizione 2.3.3 permette di risolvere parecchi casi; mancano quelli relativi alle espressioni (si confronti con le formule (2.11)–(2.14))

$$
+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}\,.
$$

Il simbolo ∞ indica qui sia $+\infty$ che $-\infty$. Questi casi sono detti *forme indeterminate*; facciamo vedere ora come risolvere alcuni di questi casi.

Esempio 2.3.6 Nel caso della forma indeterminata $+\infty - \infty$ può essere utile trasformare la differenza in un prodotto o in un quoziente.

- $\lim_{n\to\infty} (3^n - 2^n) = +\infty$.

  Siamo in presenza di una forma indeterminata $+\infty - \infty$. Si raccoglie dunque 3^n e si trova $3^n - 2^n = 3^n(1 - (\frac{2}{3})^n)$. Si ha che $3^n \to +\infty$ e $(\frac{2}{3})^n \to 0$ per l'Esempio 2.2.7; pertanto $1-(\frac{2}{3})^n \to 1$ e in conclusione $3^n - 2^n \to +\infty$ a causa di (2.10).

- $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0$.

  Abbiamo una forma indeterminata $+\infty - \infty$. Si moltiplica numeratore e denominatore per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ e si trova $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$. Poiché $\sqrt{n \pm 1} \to +\infty$, deduciamo che $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \to +\infty$ per la (2.11). Si conclude grazie alla (2.14).

Esempio 2.3.7 Nel caso della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e in presenza di successioni potenze, si possono dividere numeratore e denominatore per una stessa quantità in modo che uno dei due non diverga più.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n + \sqrt{n}} = +\infty$.

  Abbiamo una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; si divide numeratore e denominatore per n in modo che la successione a denominatore converga: $\frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n-1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{1 + n^2} = 0$.

  Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; si divide numeratore e denominatore per $\sqrt{n}$ in modo che la successione a numeratore converga: $\frac{\sqrt{n}}{1+n^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+n\sqrt{n}}$.

Esempio 2.3.8 I seguenti due limiti sono fondamentali; vengono enunciati ora anche se verranno dimostrati in seguito (Esempio 6.10.2). Per una dimostrazione elementare si veda ad esempio [9, Capitolo 2, Esempi 4.1 e 4.4]. In entrambi i casi si è in presenza di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$, con $b > 1$, $\alpha > 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, con $\alpha > 0$, $a > 1$.

Esempio 2.3.9

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_b n)^k}{n} = 0$, con $b > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

  Infatti $\frac{(\log_b n)^k}{n} = \left(\frac{\log_b n}{n^{\frac{1}{k}}}\right)^k$ e $\frac{\log_b n}{n^{\frac{1}{k}}} \to 0$ per l'Esempio 2.3.8.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{n}}{3^n} = 0$.

Infatti $\frac{2^n\sqrt{n}}{3^n} = \frac{\sqrt{n}}{(3/2)^n}$ e si conclude per l'Esempio 2.3.8.

Consideriamo ora le successioni del tipo ${a_n}^{b_n}$, con $a_n > 0$. Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno limiti finiti allora (2.4) risolve il problema del calcolo del limite se $a > 0$. Altrimenti, usando la formula

$$x = e^{\log x}, \quad x > 0\,,$$

si scrive ${a_n}^{b_n} = e^{b_n \log a_n}$; sempre per (2.4) si è ricondotti allo studio del $\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n$. La successione $\{b_n \log a_n\}$ può dar luogo ad una forma indeterminata $0 \cdot \infty$ o $\infty \cdot 0$.

Nel primo caso, per l'Esempio 2.2.5, la successione $\{a_n\}$ deve divergere a $+\infty$ o essere infinitesima: dunque ${a_n}^{b_n}$ ha una espressione (al limite) del tipo $(+\infty)^0$ o 0^0. Nel secondo $\{a_n\}$ deve convergere a 1: perciò ${a_n}^{b_n}$ è del tipo $1^{\pm\infty}$. Concludendo, espressioni del tipo

$$0^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^{\pm\infty}$$

sono indeterminate in quanto riconducibili alla forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Esempio 2.3.10

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

  Poiché $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$, ci troviamo di fronte ad un forma indeterminata del tipo $(+\infty)^0$. Ma $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \to 1$ per (2.4).

2.4 Il numero e

In questa sezione studieremo la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Come motivazione premettiamo un semplice esempio in cui appare questa successione.

Esempio 2.4.1 (Un problema di interessi) Supponiamo di avere a disposizione un capitale C (ad esempio, $C = 1000$ euro) e di volerlo investire ad un tasso di interesse annuale t (ad esempio, $t = 0.1$). Questo vuol dire che, se l'interesse viene pagato *annualmente*, dopo un anno ci ritroviamo con un capitale

$$C + Ct = C(1 + t),$$

dove Ct rappresenta la rendita annuale. Nel caso dell'esempio ci ritroveremo con 1100 euro.

Supponiamo invece che l'interesse sia pagato *mensilmente* e che reinvestiamo mensilmente sia il capitale iniziale che le sue rendite; allora abbiamo quanto segue:

(i) dopo il primo mese abbiamo un capitale $C_1 = C + C\frac{t}{12} = C(1 + \frac{t}{12})$;

(ii) dopo il secondo mese, avendo reinvestito tutto il capitale C_1, abbiamo un capitale $C_2 = C_1(1 + \frac{t}{12}) = C(1 + \frac{t}{12})^2$;

(iii) dopo il terzo mese, reinvestendo tutto il capitale C_2, abbiamo un capitale $C_3 = C_2(1 + \frac{t}{12}) = C(1 + \frac{t}{12})^3$;

e così via. Ci ritroviamo alla fine dell'anno con un capitale di

$$C\left(1 + \frac{t}{12}\right)^{12}.$$

Nel caso dell'esempio, questo ammonta a $1104,70$ euro. Si capisce allora che se l'interesse è pagato ogni n-esimo di anno, dopo un anno il nostro capitale è

$$C\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n}.$$

Se $n = 365$, nel caso dell'esempio precedente questo ammonta a 1105,20 euro. La successione introdotta sopra corrisponde al caso particolare $t = 1$; il calcolo del suo limite corrisponde ad un interesse calcolato con continuità.

Consideriamo dunque la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$; siamo in presenza di una forma indeterminata $1^{+\infty}$. Per questa successione si può dimostrare quanto segue.

Proposizione 2.4.1 *La successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è monotòna crescente e limitata.*

La successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ ha dunque limite, essendo monotòna, e tale limite è finito, poiché è limitata. Si può dimostrare che il suo limite è il numero e, base dei logaritmi naturali o Neperiani:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71\,. \tag{2.16}$$

Si veda la Figura 2.3. In effetti, in una trattazione rigorosa, si *definisce* e come il limite della successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$, e partendo da questa definizione si studiano poi i logaritmi naturali.

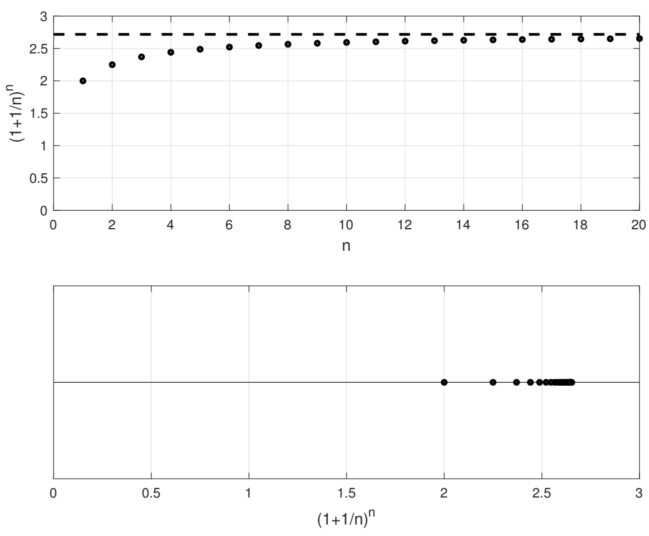

Figura 2.3: I primi venti termini della successione $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$. La retta tratteggiata ha equazione $y = e$.

Esempio 2.4.2

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e.$

  Infatti

  $$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\to e\,.\end{aligned}$$

  Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che

  $$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\to e;$$

  infatti i valori della successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right\}$, per $n\geq 2$, coincidono con quelli della successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ per $n\geq 1$.

Esempio 2.4.3

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}.$

  Infatti $(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{-n}}$ e si conclude con l'Esempio 2.4.2.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}=e^{\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

  Infatti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\alpha}.$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=1.$

  Per dimostrare questo limite osserviamo che

  $$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Inoltre si ha che $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$ dalla definizione (2.16): se $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \epsilon$ per $n > N$, allora $\left|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} - e\right| < \epsilon$ per $n > \sqrt{N}$. Il risultato da dimostare segue allora da (2.4).

Esempio 2.4.4 Si può dimostrare [5] che per ogni successione $\{a_n\}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e\,.$$

Abbiamo sfruttato questo fatto nel caso $a_n = n$ per definire e e lo abbiamo verificato nei casi $a_n = -n$ (Esempio 2.4.2) e $a_n = n^2$ (Esempio 2.4.3).

Osservando che $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right)^\alpha$ se $\alpha \neq 0$, si deduce che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (il caso $\alpha = 0$ è banale) si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha\,.$$

Ricordando l'Esempio 2.4.1, nel caso (ovviamente non reale) di un interesse calcolato con continuità, dopo un anno ci ritroviamo con un capitale Ce^t.

2.5 Ordini di infinito e di infinitesimo

Abbiamo visto, ad esempio, che le successioni di termine generale

$$\log n, \quad \sqrt{n}, \quad n^2, \quad 2^n$$

sono *infinite*. Cosa possiamo dire della loro "velocità di crescita"? Per confrontare due successioni infinite $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ possiamo studiare il limite del loro quoziente. Si possono presentare quattro possibilità, che danno luogo ad altrettante definizioni.

Definizione 2.5.1 *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni infinite. Si dice che la successione $\{a_n\}$ è un* infinito di ordine inferiore, dello stesso ordine, di ordine superiore, non è confrontabile con la successione $\{b_n\}$ *a seconda dei casi seguenti:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$
$$= \begin{cases} 0: & \{a_n\} \textit{ è un infinito di ordine } \text{inferiore } a \ \{b_n\}, \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: & \{a_n\} \ e \ \{b_n\} \textit{ sono infiniti } \text{dello stesso ordine}, \\ \pm\infty: & \{a_n\} \textit{ è un infinito di ordine } \text{superiore } a \ \{b_n\}, \\ \nexists: & \{a_n\} \ e \ \{b_n\} \text{ non sono confrontabili.} \end{cases}$$

Da quanto visto finora possiamo dunque dire che le successioni $\log n$, $\sqrt{n}$, n^2, 2^n sono infinite *di ordine crescente*, ovvero ognuna è un infinito di ordine superiore della precedente. Più in generale vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.5.1 *Le seguenti successioni sono infinite di ordine crescente:*

$$\log_b n, \quad n^\alpha, \quad a^n, \qquad \textit{per } b > 1,\ \alpha > 0,\ a > 1\,.$$

Dimostrazione. Basta applicare l'Esempio 2.3.8. □

In altre parole le successioni potenze tendono all'infinito più rapidamente di quelle logaritmiche e quelle esponenziali più rapidamente delle potenze.

Esempio 2.5.1

- Un infinito di ordine inferiore a $\log n$ è, ad esempio, $\sqrt{\log n}$. Un infinito di ordine superiore a 2^n è 3^n. Un infinito di ordine superiore ad ogni a^n, $a > 1$, è 2^{n^2}: $2^{n^2}/a^n = (2^n/a)^n > 2^n$ definitivamente.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$

  Infatti $\frac{3^n}{n!} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdots3}{1\cdot2\cdot3\cdots n} = \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n} \le \frac{9}{2}\frac{3}{n} \to 0$ e si conclude con il Teorema del confronto. Analogamente si prova che $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ per ogni $a > 1$. Perciò $n!$ è un infinito di ordine superiore ad ogni a^n con $a > 1$.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per successioni *infinitesime* $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$
$$= \begin{cases} 0 : & \{a_n\} \text{ è un } \textit{infinitesimo di ordine superiore a } \{b_n\}, \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono } \textit{infinitesimi dello stesso ordine}, \\ \pm\infty : & \{a_n\} \text{ è un } \textit{infinitesimo di ordine inferiore a } \{b_n\}, \\ \nexists : & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \textit{ non sono confrontabili.} \end{cases}$$

Pertanto

$$\frac{1}{\log_b n}, \quad \frac{1}{n^\alpha}, \quad \frac{1}{a^n}, \qquad \text{per } b > 1,\ \alpha > 0,\ a > 1,$$

sono successioni infinitesime di ordine crescente.

Un caso importante di successioni dello stesso ordine (anche se non necessariamente infinite o infinitesime) è quando $l = 1$.

Definizione 2.5.2 *Due successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono* asintotiche *se* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. *In tal caso si scrive* $a_n \sim b_n$.

Osservazione 2.5.1 Nella definizione precedente, né $\{a_n\}$ né $\{b_n\}$ possono essere definitivamente nulle. Infatti, se $\{a_n\}$ lo fosse (ma $\{b_n\}$ no), allora il limite sarebbe 0; se invece $\{b_n\}$ fosse definitivamente nulla, allora la frazione stessa non avrebbe senso.

Successioni asintotiche hanno lo stesso comportamento al limite, come precisato dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.5.2 *Se* $a_n \sim b_n$ *allora vale una (e una sola) delle tre seguenti possibilità:*

- *convergono entrambe allo stesso limite;*
- *divergono entrambe;*
- *entrambe non hanno limite.*

Dimostrazione. Consideriamo i casi che si possono presentare.

- Sia $a_n \to l \in \mathbb{R}$; poiché $a_n \neq 0$ definitivamente per l'Osservazione 2.5.1, allora $b_n = \frac{b_n}{a_n} a_n \to 1 \cdot l = l$.
- Se $a_n \to l = \pm\infty$ si ragiona nello stesso modo. Scambiando il ruolo delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si deduce che se $b_n \to l \in \mathbb{R}^*$ allora anche $a_n \to l$.
- Se infine $\{a_n\}$ non ha limite allora $\{b_n\}$ non può essere convergente (si contraddirebbe il primo punto) né divergente (si contraddirebbe il secondo); dunque neanche $\{b_n\}$ può avere limite.

□

Osservazione 2.5.2 Non vale l'implicazione contraria nella Proposizione 2.5.2. Ad esempio le successioni $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ convergono allo stesso limite 0 ma non sono neanche confrontabili: $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ non ha limite.

E' immediato verificare inoltre che

$$a_n \sim b_n,\ b_n \sim c_n \ \Rightarrow\ a_n \sim c_n, \tag{2.17}$$

$$a_n \sim \alpha_n,\ b_n \sim \beta_n,\ c_n \sim \gamma_n \ \Rightarrow\ \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{\alpha_n \beta_n}{\gamma_n}. \tag{2.18}$$

La (2.17) è la proprietà transitiva; la (2.18) stabilisce che le operazioni di moltiplicazione e divisione sono compatibili con la proprietà di essere asintotico.

Osservazione 2.5.3 Una proprietà analoga alla (2.18) *non* vale in generale per la *somma* o la *differenza*:

$$a_n \sim \alpha_n,\ b_n \sim \beta_n \not\Rightarrow a_n \pm b_n \sim \alpha_n \pm \beta_n\,. \tag{2.19}$$

Infatti siano $a_n = n+\sqrt{n}$, $\alpha_n = b_n = \beta_n = n$; allora $a_n \sim \alpha_n$, $b_n \sim \beta_n$ ma $a_n - b_n = n + \sqrt{n} - n = \sqrt{n} \not\sim n - n = 0 = \alpha_n - \beta_n$. Scegliendo $b_n = \beta_n = -n$ si ha il controesempio per la somma.

Si noti come la (2.19) sia dovuta alla *cancellazione* dei termini di ordine più alto nelle due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. La ricerca di asintotici semplici di somme di successioni può essere fatta tramite fattorizzazione: si veda il seguente Esempio 2.5.2.

Analogamente:

- $a_n \sim b_n$ non implica $a^{a_n} \sim a^{b_n}$, si considerino ad esempio le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di sopra;
- $a_n \sim b_n$ non implica ${a_n}^{c_n} \sim {b_n}^{c_n}$, si prenda $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1$, $c_n = n$.

Esempio 2.5.2

- $n + 2^n = 2^n(1 + \frac{n}{2^n}) \sim 2^n$.

  Si noti la trasformazione di una somma in prodotto per aggirare l'Osservazione 2.5.3.
- $\log(n+1) \sim \log n$.

  Infatti per il teorema del confronto $1 \leq \frac{\log(n+1)}{\log n} \leq \frac{\log(2n)}{\log n} = \frac{\log 2}{\log n} + 1 \to 1$.
- $\dfrac{n^2 + \sin n}{n + \log n} \sim n$.

Esempio 2.5.3

- $\lim_{n\to\infty}(n^2 - n + 1) = +\infty$.

  Infatti $n^2 - n + 1 \sim n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \sim n^2 \to +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - n + 1}{3n^2 + 1} = \frac{4}{3}$.

  Infatti $\frac{4n^2-n+1}{3n^2+1} \sim \frac{4n^2}{3n^2} = \frac{4}{3}$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n}{5^n} = 0$.

  Infatti $\frac{n^2+2^n}{5^n} \sim \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n! - (n-1)!}{n^2} = +\infty$.

  Infatti $n! - (n-1)! \sim n!$, dunque $\frac{n!-(n-1)!}{n^2} \sim (n-2)! \to +\infty$.

- $\lim_{n\to\infty}(\log(n+1) - \log n) = 0$.

  Abbiamo visto che $\log(n+1) \sim \log n$ ma *non* possiamo dedurre che il limite è zero, a causa dell'Osservazione 2.5.3. Però $\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \log 1 = 0$ per l'Esempio 2.2.5.

Esempio 2.5.4 (La formula di Stirling) La *formula di Stirling*

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,, \tag{2.20}$$

di cui non diamo la dimostrazione, dà un utile asintotico di $n!$. Tramite questa formula si può dedurre che $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty\,.$$

Capitolo 3

Serie numeriche

3.1 Definizioni e primi esempi

Può la somma di infiniti numeri positivi dare un numero? Il significato di "somma di infiniti numeri" è per il momento vago ma, intuitivamente, la risposta a questa domanda è *sì*.

Consideriamo infatti un segmento di lunghezza 2, vedi Figura 3.1, ed effettuiamo una misura della sua lunghezza nel seguente modo: dividiamo dapprima il segmento in due parti uguali e misuriamo la parte di sinistra (lunga 1); dividiamo quindi la parte rimanente in due parti e misuriamo la parte di sinistra (lunga $\frac{1}{2}$), e così via. La misura del segmento è dunque ottenuta sommando le (infinite) misure precedenti: $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$.

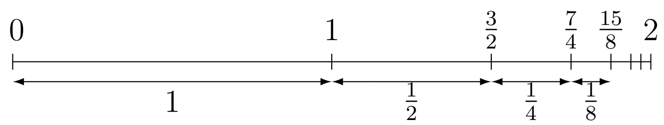

Figura 3.1: Suddivisione di un segmento di lunghezza 2 in infiniti segmenti.

Per dare un senso rigoroso a questo procedimento (ineseguibile, poiché coinvolge infinite somme) effettuiamo la seguente costruzione.

Sia $\{a_n\}$ una successione, e da questa si definisca la successione $\{s_n\}$ definita da $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; dunque

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ \dots .$$

Definizione 3.1.1 *La successione $\{s_n\}$ definita sopra è la* serie di termini a_n*. Il termine s_n è la* somma parziale n*-esima della serie. La serie è indicata con*

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_k + \ldots \qquad \textit{oppure} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, .$$

Come per le successioni l'uso di ∞ senza segno non dà luogo qui ad ambiguità (gli indici sono tutti positivi). Se si effettua la somma partendo da un indice h, si scrive $\sum_{k=h}^{\infty} a_k$. Le notazioni precedenti possono essere abbreviate in $\sum_k a_k$ o addirittura $\sum a_k$ se non è indispensabile specificare da quale indice la somma inizia.

Definizione 3.1.2 *La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è* convergente, divergente o indeterminata *a seconda che la successione $\{s_n\}$ della somme parziali sia* convergente, divergente o indeterminata*.*

Se la successione $\{s_n\}$ converge a s si scrive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$; il valore s è la somma della serie*.*

Si noti come lo stesso simbolo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sia usato tanto per indicare la *serie*, cioè la successione $\{s_n\}$, quanto la *somma* della serie, cioè il limite s. Se $s_n \to \pm\infty$ si scrive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$.

Schematicamente, il processo (intuitivo) di "sommare infiniti addendi" è stato dunque rimpiazzato dal processo (rigoroso) di passaggio al limite:

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{s_n} + a_{n+1} + \ldots & = & s \\ & \to & s \, . \end{array}$$

Esempio 3.1.1 (Serie geometrica) E' la serie di termini $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ \text{è indeterminata} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

In questo caso abbiamo

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Se $q = 1$, da (1.1) si ha $s_n = n + 1$ e dunque $s_n \to +\infty$.
Se $q \neq 1$, per la Proposizione 1.2.1 si ha

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{3.1}$$

Si ricordi adesso l'Esempio 2.2.7:

(i) se $q > 1$ allora $q^n \to +\infty$ e dunque $s_n \to +\infty$ (il denominatore di s_n è negativo poiché $q > 1$);

(ii) se $|q| < 1$ allora $q^n \to 0$ e dunque $s_n \to \frac{1}{1-q}$;

(iii) se $q \leq -1$ allora la successione $\{q^n\}$ è indeterminata e dunque anche la successione $\{s_n\}$ è indeterminata. Infatti $s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}q^{n+1}$; se per assurdo s_n avesse limite, dovrebbe avere limite anche la successione $(1-q)s_n - 1 = q^{n+1}$, che non ha limite. Abbiamo raggiunto una contraddizione e dunque s_n non può avere limite.

Esempio 3.1.2 (Serie armonica) E' la serie di termini $a_n = \frac{1}{n}$. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Per provarlo si considerino i termini della successione delle somme parziali relativi agli indici che sono potenze di 2:

$$\begin{array}{lrcl} 2^0: & s_1 & = & 1, \\ 2^1: & s_2 & = & s_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \\ 2^2: & s_4 & = & s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + 2\frac{1}{2}, \end{array}$$

in quanto $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4}$. Analogamente,

$$2^3: \qquad s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} \geq 1 + 2\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1 + 3\frac{1}{2},$$

poiché $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4\frac{1}{8}$ e così via. Dunque

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $M > 0$; avremo $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \geq M$ se $k \geq 2(M-1)$, cioè se $2^k \geq 4^{M-1}$. Poiché la successione $\{s_n\}$ è crescente avremo $s_n \geq M$ se $n \geq N = 4^{M-1}$.

Ad esempio, avremo $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 10$ se $n \geq 4^9$.

Un risultato qualitativo interessante, la cui dimostrazione esula dagli scopi di questo corso ma che mostra quanto rapidamente diverga la successione $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, è che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = \gamma \approx 0,5772.$$

La costante γ è detta costante di Eulero-Mascheroni. In altri termini (si veda la Figura 3.2),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \gamma + \log n.$$

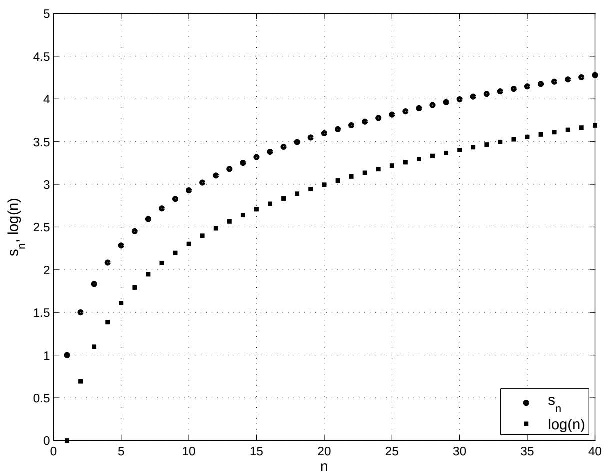

Figura 3.2: Le successioni $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ e $\log n$.

Esempio 3.1.3 (Serie telescopiche) Le *serie telescopiche* sono serie di cui è facile stabilire la convergenza ed eventualmente calcolare la somma. Esse sono del tipo $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$; dunque $s_n = b_0 - b_{n+1}$. Ad esempio, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Infatti $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, dunque $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

Diamo ora una importante condizione di convergenza.

Proposizione 3.1.1 (Condizione necessaria per la convergenza) *Se la serie* $\sum a_n$ *è convergente allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Si ha $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$. □

Osservazione 3.1.1 La condizione che la successione $\{a_n\}$ sia infinitesima è solo *necessaria* per la convergenza della serie e *non sufficiente*, come provato dalla serie armonica. In altri termini per una serie

$$\sum a_n \text{ convergente } \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} a_n \to 0\,.$$

Esempio 3.1.4 La proposizione precedente è spesso usata per dimostrare che una serie *non* converge. Ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$ non può convergere: $\frac{n-1}{n} \to 1$.

Diversamente dalle successioni, dove il calcolo esplicito del limite è possibile in molti casi elementari, il calcolo della somma di una serie è molto più difficile e di solito ci si accontenta di stabilire il *comportamento* di una serie, ovvero se essa converge, diverge o è indeterminata. I criteri di convergenza saranno l'oggetto dei prossimi paragrafi.

3.2 Serie a termini positivi

Consideriamo una serie $\sum a_n$ a termini positivi, cioè $a_n \geq 0$. La locuzione "serie a termini non negativi" sarebbe dunque più corretta, ma useremo la precedente, più diretta. Una prima informazione ci viene dal seguente lemma: le serie a termini positivi non possono essere indeterminate.

Lemma 3.2.1 *Se $a_n \geq 0$, allora la serie $\sum a_n$ è convergente o divergente.*

Dimostrazione. Per le serie a termini positivi la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente: infatti $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Perciò la successione $\{s_n\}$ ha limite per il Teorema 2.2.1. Per il Teorema della permanenza del segno tale limite sarà positivo o nullo; se è finito, la serie converge (a quel numero), se è $+\infty$, la serie diverge (a $+\infty$). □

Per brevità se una serie a termini positivi è convergente scriveremo $\sum a_n < +\infty$.

Proposizione 3.2.1 (Criterio del confronto) *Siano $\sum a_n$, $\sum b_n$ due serie a termini positivi, con $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora*

$$\begin{aligned} \sum a_n \ \textit{diverge} \quad &\Rightarrow \quad \sum b_n \ \textit{diverge}, \\ \sum a_n \ \textit{converge} \quad &\Leftarrow \quad \sum b_n \ \textit{converge}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo ad esempio la prima implicazione. Per ipotesi esiste N tale che $a_n \leq b_n$ se $n \geq N$. Pertanto, posto $s_n = \sum_{k=N}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=N}^{n} b_k$ per $n \geq N$, si ha che $s_n \leq t_n$ e la tesi segue da (2.15). La seconda implicazione si dimostra analogamente dal corollario di ordinamento per le successioni. □

Esempio 3.2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ se $\alpha \leq 1$.

Infatti se $\alpha \leq 1$ si ha $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Pertanto, ad esempio, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Proposizione 3.2.2 (Criterio del confronto asintotico) *Siano $\sum a_n$, $\sum b_n$ due serie a termini positivi, con $a_n \sim b_n$. Allora le serie hanno lo stesso comportamento, cioè*

$$\begin{aligned} \sum a_n \ \textit{diverge} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum b_n \ \textit{diverge}, \\ \sum a_n \ \textit{converge} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum b_n \ \textit{converge}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Fissato $0 < \epsilon < 1$ si ha $1 - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \epsilon$ definitivamente in quanto $a_n \sim b_n$. Dunque, poiché $b_n > 0$ definitivamente, deduciamo

$$(1 - \epsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \epsilon)b_n \quad \text{definitivamente.}$$

Si conclude applicando il criterio di confronto per le serie. $\square$

Esempio 3.2.2

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$

  Infatti $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$, e si conclude con l'Esempio 3.1.3.

  Si noti che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, mentre si può dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$: la Proposizione 3.2.2 garantisce soltanto che se $a_n \sim b_n$ allora le serie relative hanno lo stesso comportamento, e *non*, se convergenti, che hanno la stessa somma.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ se $\alpha \geq 2$.

  Infatti se $\alpha \geq 2$ si ha $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ e si conclude per confronto. In particolare, ad esempio, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty$.

Esempio 3.2.3 (Serie armonica generalizzata)

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1, \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

  Dagli esempi precedenti resta da dimostrare solo il caso $1 < \alpha < 2$, che verrà dimostrato nell'Esempio 7.9.6.

Proposizione 3.2.3 (Criterio della radice) *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, con $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$. Allora*

$$l < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \ \textit{converge},$$
$$l > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \ \textit{diverge}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul confronto della serie data con la serie geometrica. Sia $l \in \mathbb{R}$; allora definitivamente si ha

$$(l-\epsilon)^n < a_n < (l+\epsilon)^n.$$

Se $l < 1$ possiamo scegliere ϵ in modo che $l+\epsilon = p < 1$ (basta prendere $\epsilon < 1-l$), si veda la Figura 3.3; dunque $a_n < p^n$ definitivamente e la serie converge per il criterio del confronto. Se $l > 1$ si sceglie ϵ in modo che $l-\epsilon = q > 1$ (basta scegliere ora $\epsilon < l-1$), dunque $a_n > q^n$ definitivamente e la serie diverge sempre per il criterio del confronto. Se $l = +\infty$ allora se $M > 1$ si ha $a_n > M^n$ definitivamente e dunque la serie diverge per confronto.

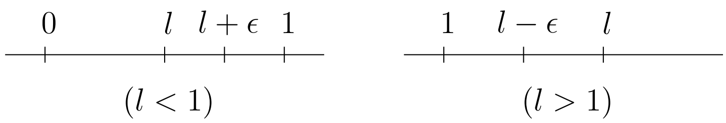

Figura 3.3: Scelta di ϵ nella dimostrazione del criterio della radice.

□

Se $l = 1$ il criterio della radice non si applica. Ad esempio, le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ danno entrambe $l = 1$, ma la prima diverge mentre la seconda converge. Pertanto, nel caso $l = 1$, il comportamento della serie deve essere studiato per altra via.

Esempio 3.2.4

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n} < +\infty$ se $a \geq 0$.

  Infatti $\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{a}{n} \to 0$.

- $$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } 0 < a < 1, \\ \text{diverge} & \text{se } a > 1, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

  Se $a = 1$ si ha la serie armonica generalizzata, già studiata sopra. Per dimostrare il risultato si consideri $\sqrt[n]{n^\alpha a^n} = a\sqrt[n]{n^\alpha} = a(\sqrt[n]{n})^\alpha \to a$. Pertanto, ad esempio, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < +\infty$.

Proposizione 3.2.4 (Criterio del rapporto) *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$*, con* $l \in \mathbb{R}$ *o* $l = +\infty$*. Allora*

$$\begin{aligned} l < 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum a_n \quad \textit{converge,} \\ l > 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum a_n \quad \textit{diverge.} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $l \in \mathbb{R}$. Si ha $l - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon$ per $n > N$, cioè

$$(l-\epsilon)a_n < a_{n+1} < (l+\epsilon)a_n \tag{3.2}$$

per ogni $n > N$. Se $n - 1 \geq N$, possiamo applicare la disuguaglianza (3.2) con $n-1$ al posto di n, ottenendo

$$(l-\epsilon)a_{n-1} < a_n < (l+\epsilon)a_{n-1}. \tag{3.3}$$

I termini a_n che compaiono in (3.2) possono essere stimati con la disuguaglianza (3.3), ottenendo

$$(l-\epsilon)^2 a_{n-1} < a_{n+1} < (l+\epsilon)^2 a_{n-1}.$$

Il procedimento può essere iterato fino a quando l'indice dei due termini estremi diventa N, ottenendo finalmente

$$(l-\epsilon)^{n-N+1} a_N < a_{n+1} < (l+\epsilon)^{n-N+1} a_N.$$

Questa disuguaglianza si scrive anche

$$C_1(l-\epsilon)^n < a_{n+1} < C_2(l+\epsilon)^n,$$

dove $C_1 = (l-\epsilon)^{-N+1}a_N$ e $C_2 = (l+\epsilon)^{-N+1}a_N$ sono costanti indipendenti da n. Si conclude come nella dimostrazione del criterio della radice.

Se $l = +\infty$, scelto $M > 1$ si ha $a_{n+1} > Ma_n$ se $n > N$, dunque $a_{n+1} > M^{n-N+1}a_N$. $\square$

Anche in questo caso vale l'osservazione fatta alla fine della Proposizione 3.2.3.

Esempio 3.2.5

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} < +\infty$ se $a \geq 0$.

  Infatti $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \to 0$. Si può dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n!} = e^a$; in particolare si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty$.

  Infatti

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1\,.$$

Osservazione 3.2.1 Come si vede dagli esempi, il criterio della radice si usa con profitto in presenza di potenze, quello del rapporto in presenza di fattoriali. Si noti tuttavia che la formula di Stirling (2.20) dà un asintotico di $n!$ tramite delle potenze e permette quindi l'uso del criterio della radice anche in presenza di fattoriali. Ad esempio, in riferimento all'Esempio 3.2.5, si ha che

$$\frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi}\,\frac{\sqrt{n}}{e^n}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n}$ converge per il criterio della radice e dunque, per il criterio del confronto asintotico, si ritrova la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Osservazione 3.2.2 Si noti come sia il criterio della radice che quello del rapporto si applichino con successo alla determinazione del carattere della serie geometrica nel caso $q > 0$, con $q \neq 1$, ma non diano informazioni sulla sua somma nei casi in cui la serie converge.

Ripercorrendo le dimostrazioni delle Proposizioni 3.2.3 e 3.2.4 si deducono i seguenti due criteri di convergenza relativi alle *successioni.*

Corollario 3.2.1 (Criterio della radice o del rapporto per successioni) *Sia $\{a_n\}$ una successione, $a_n \geq 0$ per ogni n, e supponiamo che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\,,$$

con $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$. Allora

$$\begin{aligned} l < 1 \quad &\Rightarrow \quad a_n \to 0, \qquad (3.4) \\ l > 1 \quad &\Rightarrow \quad a_n \to +\infty. \end{aligned}$$

Naturalmente (3.4) segue anche direttamente dalla Proposizione 3.1.1.

3.3 Serie a termini di segno variabile

3.3.1 Convergenza assoluta

Definizione 3.3.1 *Una serie $\sum a_n$ è detta* assolutamente convergente *se è convergente la serie dei valori assoluti $\sum |a_n|$.*

Per distinguere la convergenza della serie $\sum a_n$ da quella della serie $\sum |a_n|$ diremo che $\sum a_n$ converge *semplicemente*. La convergenza semplice e assoluta coincidono per le serie a termini positivi considerate nella sezione precedente.

Proposizione 3.3.1 *Se una serie converge assolutamente allora converge semplicemente. In tal caso si ha*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,.$$

Dimostrazione. Sia $[a_n]_+ = \max\{a_n, 0\}$, $[a_n]_- = \max\{-a_n, 0\}$; pertanto

$$a_n = [a_n]_+ - [a_n]_-, \qquad (3.5)$$

$$0 \leq [a_n]_\pm \leq |a_n|. \qquad (3.6)$$

A causa di (3.6) e per il teorema del confronto sono convergenti entrambe le serie $\sum[a_n]_\pm$. Inoltre, da (3.5), $\sum a_n = \sum[a_n]_+ - \sum[a_n]_-$ e pertanto la serie $\sum a_n$ è convergente. Per la seconda affermazione basta usare la disuguaglianza $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$ e il Teorema 2.3.1. $\square$

Per le serie a termini di segno variabile la notazione $\sum a_n < +\infty$, impiegata per indicare la convergenza di una serie a termini positivi, non ha più senso: la serie potrebbe divergere a $-\infty$.

Esempio 3.3.1

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è convergente.

  Infatti $|\frac{\sin n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$. Perciò la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge assolutamente e dunque semplicemente.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ è convergente, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ è convergente se $a \in \mathbb{R}$.

  Infatti le serie convergono assolutamente per gli Esempi 3.2.4 e 3.2.5.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ è convergente se $\alpha > 1$.

  Infatti $|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}| \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Anche in questo caso la serie converge assolutamente e dunque semplicemente. Nel caso $\alpha = 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *non* converge assolutamente; per il momento non abbiamo criteri per stabilire se essa converge o meno.

3.3.2 Serie a termini di segno alterno

Una classe importante di serie a termini di segno variabile è quella delle serie *a termini di segno alterno*, cioè $\sum(-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$.

Proposizione 3.3.2 (Criterio di Leibniz) *Consideriamo la serie $\sum(-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$. Allora*

$$\left.\begin{array}{c} \{a_n\} \textit{ decrescente} \\ \textit{e} \;\; a_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum(-1)^n a_n \textit{ converge.}$$

Si veda [5] per una dimostrazione elementare. La condizione $a_n \to 0$, *necessaria* per la convergenza, è qui una delle due condizioni *sufficienti*. Il criterio di Leibniz vale ovviamente anche nel caso in cui la successione $\{a_n\}$ sia definitivamente decrescente.

Esempio 3.3.2

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (semplicemente).

  Infatti la successione $\{\frac{1}{n}\}$ è decrescente e $\frac{1}{n} \to 0$. Non c'è invece convergenza assoluta.

Osservazione 3.3.1 La Proposizione 3.3.1 e l'esempio precedente mostrano che per una serie

$$\text{convergenza assoluta} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; \text{convergenza semplice.}$$

Esempio 3.3.3

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ converge (semplicemente).

  Non c'è convergenza assoluta: $\frac{n-1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n}$. Si applica tuttavia il criterio di Leibniz: se $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ allora $a_{n+1} \leq a_n$ se $n \geq 2$ e $\frac{n-1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n} \to 0$.

Capitolo 4

Funzioni di una variabile reale

In questo capitolo si inizia lo studio delle funzioni reali di una variabile reale (brevemente: funzioni); esempi di tali funzioni sono le successioni, viste nei capitoli precedenti. Alcune definizioni e risultati già visti per le successioni vengono dunque riformulati, in maniera necessariamente stringata, per le funzioni.

4.1 Funzioni

Definizione 4.1.1 *Una* funzione reale f di una variabile reale *è una corrispondenza che associa ad ogni numero reale x, appartenente ad un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$, un unico numero reale, indicato $f(x)$. Si scrive $f : D \to \mathbb{R}$ o, più compiutamente,*

$$\begin{array}{rcc} f : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\,. \end{array}$$

L'insieme D è detto dominio della funzione, *il valore $f(x)$ l'*immagine *di x tramite f. L'*immagine *$f(D)$ di f è l'insieme di tutte le immagini degli elementi di D, cioè $f(D) = \{f(x) \colon x \in D\}$.*

Una successione è pertanto una funzione definita su $D = \mathbb{N}$. Di solito l'insieme D sarà un intervallo o un'unione di intervalli. Nella maggior parte degli esempi verrà considerato il *campo di esistenza* o *dominio naturale* della funzione, cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui l'espressione che definisce la funzione ha senso.

Esempio 4.1.1 (Campi di esistenza)

- La funzione $f(x) = x^2$ ha come campo di esistenza $\mathbb{R}^2$, $\log x$ ha $\{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$, $\frac{1}{x}$ ha $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sqrt{x^2-1}$ ha $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Negli ultimi due casi il dominio naturale non è un intervallo.
- La funzione $f(x) = \frac{1}{[|\cos x|]}$ è definita in $\pi\mathbb{Z} = \{\pi m\colon m \in \mathbb{Z}\}$, $g(x) = \sqrt{-x^2}$ è definita solo in $\{0\}$.

L'aggettivo *unico* nella Definizione 4.1.1 specifica che una funzione non può associare ad un valore x due o più valori, ma solo uno. In alcuni casi è importante evidenziare simbolicamente l'immagine di una funzione; si usa allora la scrittura $f : D \to f(D)$.

Definizione 4.1.2 *Il* grafico *di una funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ *è l'insieme* $\Big\{\big(x, f(x)\big) : x \in D\Big\}$.

Il grafico di una funzione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; in una rappresentazione grafica l'insieme D è di solito riportato sull'asse orizzontale (*asse delle ascisse*) e l'immagine di f sull'asse verticale (*asse delle ordinate*). In conseguenza del fatto che una funzione associa ad ogni elemento del dominio una unica immagine si ha che

ogni retta *parallela all'asse* y, che interseca l'asse x in un punto del dominio, interseca il grafico di una funzione in un unico punto. (4.1)

Abbiamo usato finora alcune *funzioni elementari*; ne facciamo adesso una rapida rassegna. A queste se ne aggiungeranno altre (inverse delle funzioni trigonometriche e iperboliche).

Esempio 4.1.2 (Funzioni elementari)

- Funzioni potenza. Sono del tipo $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Il loro campo di esistenza è $[0, +\infty)$ se $\alpha > 0$, $(0, +\infty)$ se $\alpha < 0$.

  Nel caso particolare $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ primi tra loro si intende $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. In tal caso, indicato con D il campo di esistenza, si ha che, supposto per semplicità $m \neq 0$,

$$D = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari e } m > 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ è dispari e } m < 0. \end{cases}$$

Se infine $m = 0$ allora $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Funzioni esponenziali. Sono del tipo $f(x) = a^x$, con $a > 0$. Sono definite in $\mathbb{R}$.

- Funzioni logaritmiche. Sono del tipo $f(x) = \log_b x$ con $b > 0$, $b \neq 1$. Sono definite in $(0, +\infty)$.

- Funzioni trigonometriche. Sono le funzioni $\sin x$, $\cos x$, definite in $\mathbb{R}$; $\operatorname{tg} x$, definita in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$; $\operatorname{cotg} x$, definita in $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Esempio 4.1.3 Altre funzioni di uso frequente sono le funzioni *parte intera* $[x]$ e *parte frazionaria* $\{x\}$, già definite. La *funzione di Heaviside* è

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

La *funzione segno* sgn è definita da

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Esempio 4.1.4 (Funzioni iperboliche) Le funzioni *seno iperbolico* e *coseno iperbolico* sono definite in $\mathbb{R}$ rispettivamente da

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

Il loro nome viene dal fatto che godono di alcune proprietà analoghe a quelle delle funzioni seno e coseno. Ad esempio si verifica facilmente che

- $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$;

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;

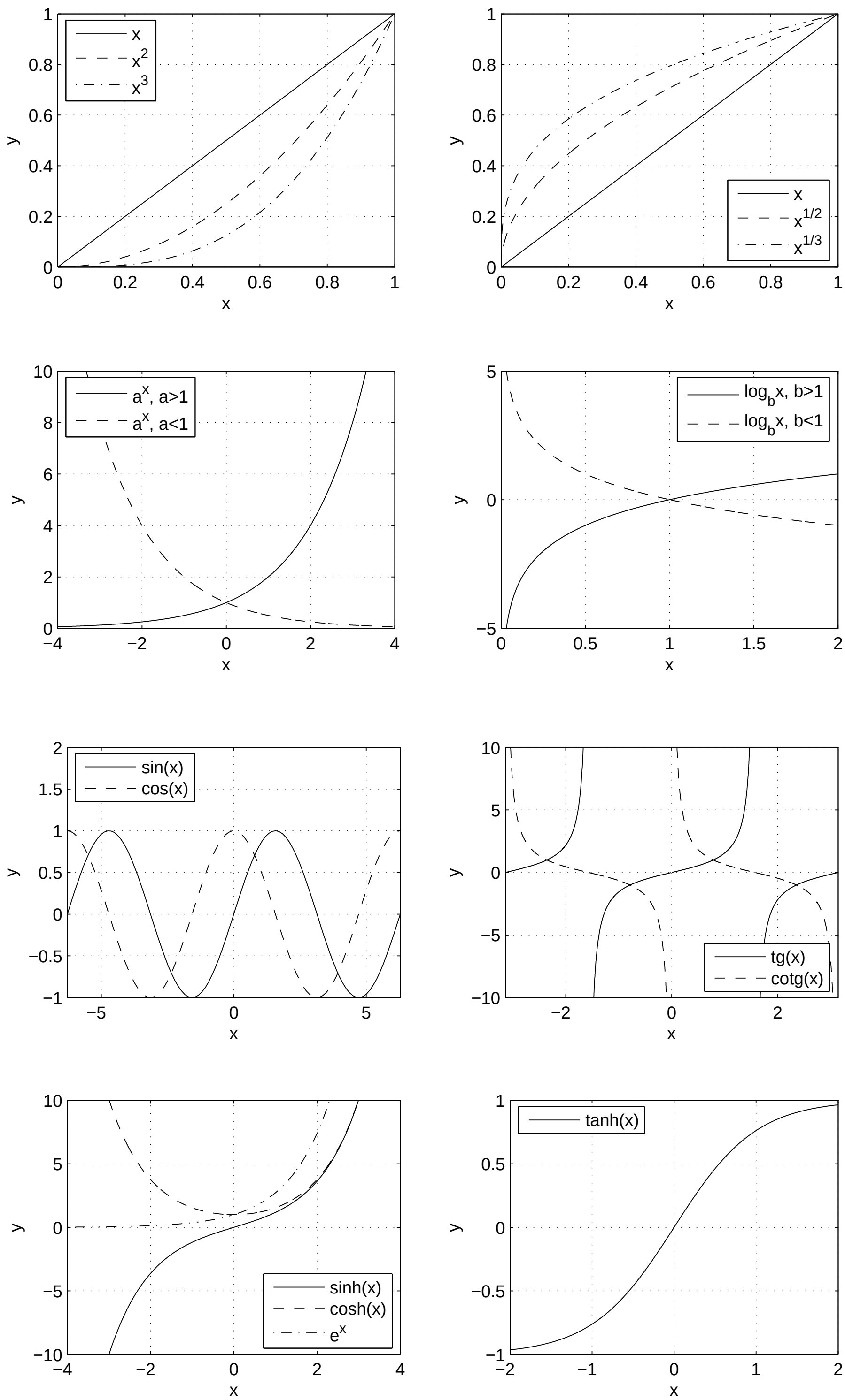

Figura 4.1: Alcuni grafici di funzioni elementari, si vedano gli Esempi 4.1.2, 4.1.4. Si notino le scale.

- $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$,

  $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$.

La seconda proprietà è quella che dà il nome di *iperboliche* a queste funzioni: se poniamo $y = \cosh x$ e $z = \sinh z$, allora al variare di x in $\mathbb{R}$ le variabili y e z descrivono l'iperbole $y^2 - z^2 = 1$ (così come se $y = \cos x$ e $z = \sin x$ allora $y^2 + z^2 = 1$, da cui il nome di funzioni *circolari* dato alle funzioni seno e coseno).

Si ha inoltre $\sinh x < \frac{e^x}{2} < \cosh x$. La funzione *tangente iperbolica* è definita da

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Si verifica facilmente che $|\tanh x| < 1$.

Nota 4.1.1 Da dove provengono i nomi dati alle funzioni trigonometriche? Perché la funzione seno si chiama così? Pare che questo nome sia dovuto ad un errore di traduzione. Il concetto del seno di un angolo era essenzialmente sconosciuto ai greci, ma non agli indiani (d'India); questi avevano attribuito il nome di *jiva* alla misura di metà (PH) di una corda (PQ) in trigonometria, proprio quello che noi indichiamo oggi con $\sin x$, si veda la Figura 4.2. Gli arabi, a conoscenza della matematica indiana, modificarono questo termine specifico in *jiba*. Poiché in arabo le vocali sono spesso omesse, un traduttore medievale di un testo di matematica araba confuse questo nome con un altro che aveva le stesse consonanti (*jaib*) ma che significava "insenatura". Così lo chamò, in latino, "sinus". Si veda [3, §14.5] per maggiori informazioni.

Le altre etimologie sono semplici: coseno sottintende "seno del complemento", cioè il fatto che $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$; infatti $\frac{\pi}{2} - \alpha$ è l'angolo complementare di α. Infine abbiamo che $\mathrm{tg}(x) = AT$, e la retta che contiene il segmento AT è tangente alla circonferenza nel punto A.

Il termine logaritmo fu invece coniato nel Seicento da John Napier (italianizzato in Nepero) fondendo due parole greche che tradotte danno "il numero della ragione", dove "ragione" ha il significato di "rapporto". Questo strano nome viene dal fatto che la definizione data da Napier del logaritmo (originariamente in base $\frac{1}{e}$) coinvolgeva

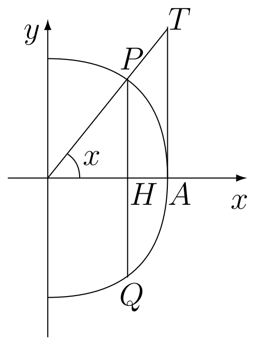

Figura 4.2: La circonferenza goniometrica.

il rapporto tra due distanze percorse in un problema di cinematica. Si veda [3, §16.10] per maggiori informazioni.

Infine, il simbolo e per indicare la base dei logaritmi naturali, venne introdotto da L. Euler (Eulero) all'inizio del Settecento, forse dedotta dalla parola "esponente".

4.2 Operazioni con i grafici

Data una funzione f è facile dedurre il grafico di alcune funzioni dedotte da f tramite operazioni elementari.

- $f(x-a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Il grafico si ottiene traslando quello di f *orizzontalmente* di a: dunque a destra se $a > 0$, a sinistra se $a < 0$.

- $f(x) + a$, con $a \in \mathbb{R}$. Il grafico si ottiene traslando quello di f *verticalmente* di a: verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

- $f(c \cdot x)$, con $c > 0$. Il grafico è ottenuto da quello di f per *contrazione* delle ascisse (dunque, in orizzontale) se $c > 1$, per *dilatazione* se $0 < c < 1$.

- $c \cdot f(x)$, con $c > 0$. Il grafico è ottenuto da quello di f per *dilatazione* delle ordinate (dunque, in verticale) se $c > 1$, per *contrazione* se $0 < c < 1$.

- $-f(x)$. Il grafico si ottiene da quello di f per *simmetria rispetto all'asse x*.

- $f(|x|)$. Il grafico si ottiene da quello della parte di f relativa a $x \geq 0$ per *simmetria rispetto all'asse y*.

- $|f(x)|$. Il grafico si ottiene da quello di f lasciando invariati i punti del grafico ad ordinata positiva e trasformando per *simmetria rispetto all'asse x* gli altri.

Esempio 4.2.1

- Si consideri $f(x) = x^2$, il cui grafico è una parabola convessa di vertice il punto $(0, 0)$. La funzione $f(x-1) = (x-1)^2$ è la parabola di vertice $(1, 0)$; $f(x) - 1$ è la parabola di vertice $(0, -1)$. La funzione $f(2x) = (2x)^2$ è una parabola più stretta, $f(x/2) = (x/2)^2$ è una parabola più larga. La funzione $-f(x) = -x^2$ è una parabola concava. Si veda la Figura 4.3.

- Sia $f(x) = \sin x$. Allora $f(2x) = \sin(2x)$ oscilla due volte più rapidamente di $\sin x$; $f(x/2) = \sin(x/2)$ oscilla due volte più lentamente di $\sin x$. Si noti la differenza tra $\sin(2x)$ (contrazione delle ascisse) e $2 \sin x$ (dilatazione delle ordinate). Si veda la Figura 4.3.

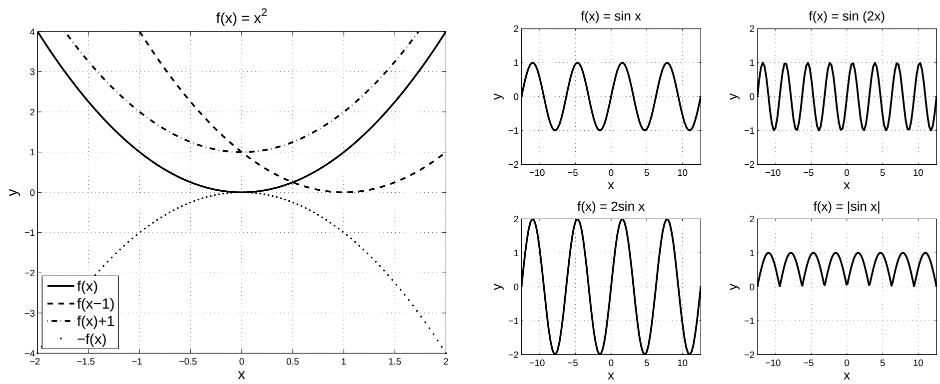

Figura 4.3: A sinistra, la funzione $f(x) = x^2$ e le funzioni $f(x-1)$, $f(x)+1$, $-f(x)$. A destra, la funzione $f(x) = \sin x$ e le funzioni $f(2x)$, $2f(x)$, $|f(x)|$; notare che gli assi hanno la stessa scala.

Dalle precedenti operazioni elementari sui grafici è facile disegnare in maniera approssimativa altri grafici di funzioni, come si vede dal seguente esempio.

Esempio 4.2.2

- $f(x) = x + \sin x$. In questa somma di funzioni le oscillazioni della funzione seno avvengono "attorno" alla retta $y = x$; ovviamente $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$. Si veda la Figura 4.4.
- $f(x) = x \sin x$. In questo prodotto di funzioni l'ampiezza delle oscillazioni della funzione seno è modificata del fattore variabile e^x. Si noti che $-x \leq x \sin x \leq x$. Si veda la Figura 4.4.
- $f(x) = e^x \sin x$. Anche in questo caso l'ampiezza delle oscillazioni della funzione seno è aumentata (se $x > 0$) o diminuita (se $x < 0$) del fattore variabile e^x; si ha $-e^x \leq e^x \sin x \leq e^x$.

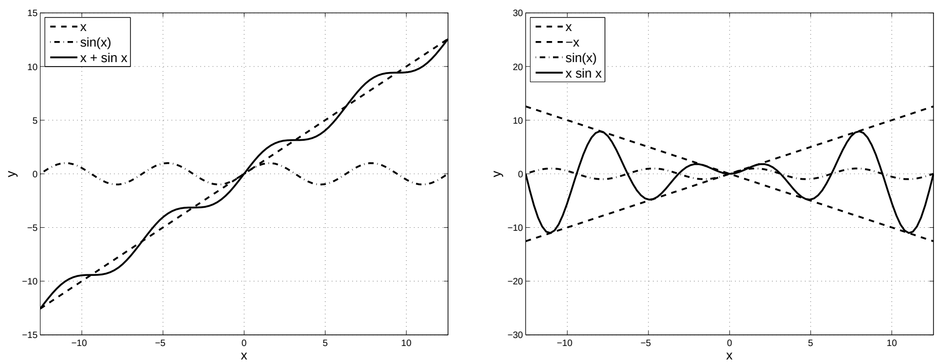

Figura 4.4: A sinistra, la funzione $f(x) = x + \sin x$. A destra, la funzione $f(x) = x \sin x$.

Definizione 4.2.1 *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione; dati $x_1, x_2 \in D$, con $x_1 \neq x_2$, il quoziente $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ è il* rapporto incrementale *di f relativo ai punti x_1, x_2.*

Si noti che $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$: il rapporto incrementale è una quantità intrinseca alla *coppia* di punti, non all'*ordine* in cui essi vengono presi.

Osservazione 4.2.1 Il significato del rapporto incrementale, da cui il nome, è evidente: infatti $f(x_2) - f(x_1)$ è la variazione dei valori della funzione (ordinate), mentre $x_2 - x_1$ è la variazione delle variabili (ascisse). Se ad esempio $x_1 < x_2$, allora $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 3$ significa che la variazione dei valori della funzione è stata più di tre volte superiore alla variazione delle variabili. Si noti tuttavia che il rapporto incrementale non tiene conto dei valori assunti dalla funzione nell'intervallo (x_1, x_2): ad esempio il rapporto incrementale delle funzioni $\sin x$, $\cos x$, relativo ai punti 0, 2π, è nullo.

Da un punto di vista geometrico $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, si veda la Figura 4.5.

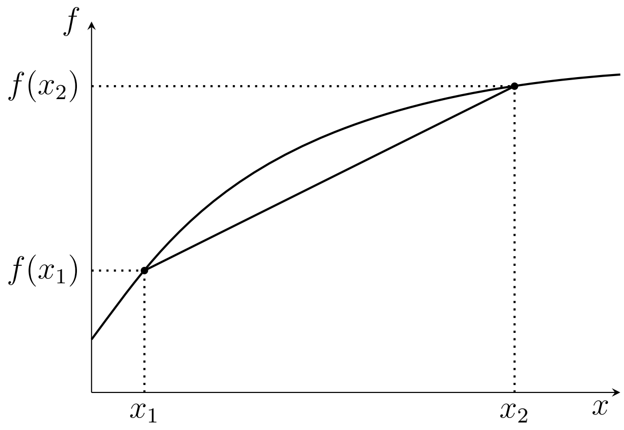

Figura 4.5: Interpretazione geometrica del coefficiente angolare.

4.3 Composizione di funzioni

Definizione 4.3.1 *Siano* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ *due funzioni,* $D, E \subseteq \mathbb{R}$. *Se* $f(D) \subseteq E$ *definiamo la* funzione composta $g \circ f$:

$D \to \mathbb{R}$ *come* $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$*:*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f : D & \xrightarrow{f} & f(D) \subseteq E & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & & \\ & & y & \mapsto & g(y) \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g\big(f(x)\big)\,. \end{array} \tag{4.2}$$

Esempio 4.3.1

- Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$; le funzioni sono definite in $\mathbb{R}$. Entrambe le composizioni $g \circ f$ $(f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R})$ e $f \circ g$ $(g(\mathbb{R}) = [-1, 1] \subset \mathbb{R})$ sono possibili:

  $$(g \circ f)(x) = \sin(x^2), \quad (f \circ g)(x) = (\sin x)^2.$$

  Questo mostra che, in generale, la composizione di due funzioni non è una operazione commutativa, cioè che $g \circ f \neq f \circ g$; ad esempio, nel caso di sopra, $f \circ g$ è positiva mentre $g \circ f$ non ha segno.

- Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ allora entrambe le composizioni sono possibili. Infatti $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) \subset [0, +\infty)$, dunque $(g \circ f)(x) = \sqrt{e^x}$; $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, dunque $(f \circ g)(x) = e^{\sqrt{x}}$.

- Se $f(x) = -x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, allora la composizione $g \circ f$ è possibile, ma il suo dominio è ridotto al punto 0.

- Se $f(x) = -x^2$ e $g(x) = \log x$ la composizione $g \circ f$ non è definita, mentre lo è $f \circ g$.

4.4 Funzioni limitate

Definizione 4.4.1 *Una funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ *è detta* limitata *se la sua immagine* $f(D)$ *è limitata, cioè se esistono due numeri reali* m, M *tali che*

$$m \leq f(x) \leq M \text{ per ogni } x \in D\,.$$

La funzione è limitata superiormente *se* $f(x) \leq M$, limitata inferiormente *se* $f(x) \geq m$*, per ogni* $x \in D$*.*

Esempio 4.4.1 La funzione $f(x) = \sin x$ è limitata: $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione x^2 è limitata inferiormente non superiormente: $x^2 \geq 0$. La funzione x^3 non è limitata né inferiormente né superiormente.

Esempio 4.4.2 Un esempio di una funzione definita in $[0, 1]$ ma non limitata è

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in (0, 1]\,, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

4.5 Funzioni simmetriche

Definizione 4.5.1 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta*

$$\begin{array}{rll} \textit{pari} & \textit{se} & f(-x) = f(x) \ \ \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}, \\ \textit{dispari} & \textit{se} & f(-x) = -f(x) \ \ \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Funzioni pari o dispari sono dette funzioni simmetriche*.*

Una funzione pari calcolata in punti opposti (x e $-x$) assume pertanto valori uguali, mentre i valori relativi di una funzione dispari sono anch'essi opposti. Pertanto il grafico di una funzione pari sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (*simmetria assiale*), il grafico di una funzione dispari sarà simmetrico rispetto all'origine degli assi (*simmetria puntuale*). Si veda la Figura 4.6.

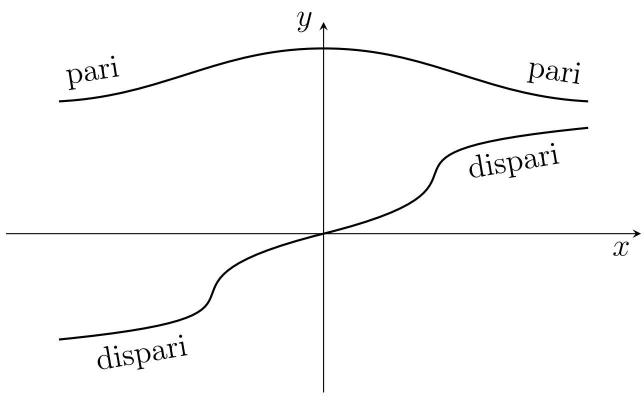

Figura 4.6: Esempi di funzioni pari e dispari.

Nella Definizione 4.5.1 si è richiesto che il dominio fosse tutto $\mathbb{R}$; più in generale si può supporre che esso sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ *simmetrico* rispetto al punto 0, ad esempio un intervallo del tipo $(-a, a)$ o $[-a, a]$.

Esempio 4.5.1

- Le funzioni 1, x^2 e in generale x^{2n}, potenze di esponente pari, sono funzioni pari. Sono funzioni pari anche $\cos x$ e $\cosh x$.
- Le funzioni x, x^3 e in generale x^{2n+1}, potenze di esponente dispari, sono funzioni dispari. Sono funzioni dispari anche $\sin x$, $\sinh x$ e $\tanh x$.
- Le funzioni log o $\sqrt{x}$ non sono simmetriche (il dominio non è simmetrico); la funzione e^x non è simmetrica (il dominio è simmetrico ma non la funzione).

Proposizione 4.5.1 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Allora*

$$\begin{aligned} f \text{ pari}, g \text{ dispari} \quad &\Rightarrow \quad f \cdot g \text{ dispari}, \\ f \text{ pari}, g \text{ pari} \ \text{ o } f \text{ dispari}, g \text{ dispari} \quad &\Rightarrow \quad f \cdot g \text{ pari}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Basta applicare la definizione. □

Si noti che il prodotto di due funzioni pari o dispari segue le regole del segno ($\pm\cdot\pm = +$, $\pm\cdot\mp = -$), *diversamente* dal prodotto di numeri (dati due numeri: pari · dispari o pari · pari = pari, dispari · dispari = dispari). In altre parole il prodotto di due funzioni simmetriche di tipo diverso (uguale) dà una funzione dispari (pari).

Esempio 4.5.2 Le funzioni $x \cdot (1 + x^2)$, $x^3 \cdot \cos x$ sono dispari, le funzioni $\frac{x^2}{1+x^2}$, $x \cdot \sin x$ sono pari. Sono dispari anche le funzioni $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$, definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ simmetrici rispetto al punto 0.

4.6 Funzioni periodiche

Definizione 4.6.1 *Una funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ *è* periodica *se esiste* $T \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x+T) = f(x)$ *per ogni* $x \in D$. *Il numero* T *è detto* periodo *della funzione.*

Il periodo T di una funzione periodica non è definito univocamente: ogni multiplo intero di T, ad esempio $2T$, $3T$ e così via, è un periodo:

$$f(x + 2T) = f\big((x + T) + T\big) = f(x + T) = f(x).$$

Di norma intenderemo per *periodo* il più piccolo numero positivo per cui vale la definizione. Una funzione periodica è nota quando si conosce il suo comportamento in un qualsiasi intervallo $[a, a + T)$ (detto *intervallo di periodicità*) di lunghezza T.

Esempio 4.6.1 Le funzioni sin e cos sono periodiche di periodo 2π, le funzioni tg e cotg sono periodiche di periodo π, le funzioni parte frazionaria $\{x\}$ e $\sin(2\pi x)$ sono periodiche di periodo 1.

4.7 Funzioni monotòne

Definizione 4.7.1 *Una funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ *è detta* crescente *(*decrescente*) se per ogni* $x, y \in D$

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \le f(y)\,, \ \ (\textit{risp. } f(x) \ge f(y))\,.$$

Una funzione f *è detta* strettamente crescente *(*strettamente decrescente*) se per ogni* $x, y \in D$ *con* $x < y$ *si ha* $f(x) < f(y)$, *(risp.* $f(x) > f(y)$*). Queste funzioni sono dette* monotòne *(*strettamente monotòne*).*

Si noti come la terminologia sia leggermente fuorviante: ogni funzione costante $f(x) = c$ è sia crescente che decrescente (non strettamente). Questa nomenclatura imprecisa serve per evitare locuzioni più precise ma complesse come “non decrescente”, “non crescente”.

Esempio 4.7.1

- Le funzioni $2x+1$, x^3, e^x sono strettamente crescenti (in $\mathbb{R}$), le funzioni $2-x$, e^{-x} sono strettamente decrescenti.
- La funzione x^2 non è monotòna nel suo dominio naturale $\mathbb{R}$. E' però strettamente crescente in $[0,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,0]$.
- La funzione $\sinh x$ è strettamente crescente: se $x<y$ allora $e^x<e^y$, dunque $-e^{-x}<-e^{-y}$ e quindi, sommando, $e^x-e^{-x}<e^y-e^{-y}$. Perciò $\frac{e^x-e^{-x}}{2}<\frac{e^y-e^{-y}}{2}$, cioè $\sinh(x)<\sinh(y)$.

  La funzione $\cosh x$ non è monotòna essendo pari; essa è tuttavia strettamente crescente in $[0,+\infty)$. Infatti $e^x+e^{-x}<e^y+e^{-y}$ se e solo se $e^x+e^{-x}-2<e^y+e^{-y}-2$, cioè se $(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2<(e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}})^2$; questo è vero, se $0<x<y$, per la monotonia di sinh.
- La funzione $[x]$ è crescente non strettamente e non costante.

La seguente proposizione mostra come la monotonìa di una funzione sia caratterizzata dal segno dei suoi rapporti incrementali.

Proposizione 4.7.1 *Sia $f: D\to\mathbb{R}$ una funzione. Allora*

$$f \text{ è crescente} \iff \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0 \quad \text{per ogni } x,y\in D,\ x\ne y,$$
$$f \text{ è decrescente} \iff \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le 0 \quad \text{per ogni } x,y\in D,\ x\ne y.$$

Dimostrazione. Vediamo ad esempio il primo caso; il secondo è analogo.

$\Rightarrow$ Se f è crescente, allora per definizione per ogni $u,v\in D$ con $u>v$, si ha $f(u)-f(v)\ge 0$. Consideriamo due punti $x,y\in D$ con $x\ne y$; dobbiamo dimostrare che $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0$.

Se $x>y$ allora $x-y>0$ e $f(x)-f(y)\ge 0$; possiamo dividere entrambi i membri di quest'ultima disuguaglianza per $x-y$ senza che il segno cambi e dedurre $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0$.

Se $x<y$ allora $x-y<0$ e $f(x)-f(y)\le 0$; di nuovo dividiamo entrambi i membri di quest'ultima disuguaglianza per $x-y$ cambiando il segno e deduciamo $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge 0$.

Abbiamo perciò dimostrato che in ogni caso vale $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ per ogni $x, y \in D$ con $x \neq y$.

$\Leftarrow$ Viceversa, supponiamo che valga $\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \geq 0$ per ogni $u, v \in D$, $u \neq v$; dobbiamo dimostrare che f è crescente. Prendiamo allora $x, y \in D$, con $x > y$; dobbiamo dimostrare che $f(x) \geq f(y)$. Se applichiamo l'ipotesi con $u = x$ e $v = y$ deduciamo $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$. Poiché $x > y$, il denominatore di questa frazione è positivo; essendo tutta la frazione positiva deduciamo che $f(x)-f(y) \geq 0$, che è proprio quello che dovevamo dimostrare. $\square$

4.8 Funzioni invertibili e inverse

Definizione 4.8.1 *Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è* invertibile *se per ogni $y \in f(D)$ esiste un unico $x \in D$ tale che $y = f(x)$. In tal caso indichiamo $x = f^{-1}(y)$, ovvero*

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad x \in D,\ y \in f(D)\,.$$

Questo definisce una funzione $f^{-1} : f(D) \to D$, detta funzione inversa *di f.*

Commentiamo ora la definizione precedente, analizzando dapprima l'invertibilità di una funzione. Chiaramente per ogni $y \in f(D)$ esiste, per definizione di funzione, (almeno) un $x \in D$ tale che $y = f(x)$; l'invertibilità di una funzione richiede l'unicità di x, al variare di y in $f(D)$. Se f è una funzione invertibile allora

(i) ad ogni $x \in D$ corrisponde una *unica* immagine $y = f(x)$ (definizione di funzione);

(ii) viceversa, ad ogni $y \in f(D)$ corrisponde un *unico* $x \in D$ (detto *controimmagine* di y) tale che $y = f(x)$ (definizione di invertibilità).

Si dice perciò che f realizza una *corrispondenza biunivoca* tra gli elementi di D e quelli di $f(D)$. In tal caso si ha che (confronta con (4.1))

> ogni retta *parallela all'asse* x, che interseca l'asse y in un punto dell'immagine $f(D)$, interseca il grafico di f in un unico punto.

Analizziamo ora l'inversa di una funzione. In simboli si ha che

$$D \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(D).$$

Si noti che se (x, y) è un punto del grafico di f, e dunque $y = f(x)$, allora (y, x), con $x = f^{-1}(y)$, è un punto del grafico di f^{-1}. Questo vuol dire che il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Osservazione 4.8.1 Si faccia attenzione a non confondere *l'inversa* di una funzione f con *la reciproca* $\frac{1}{f}$, poiché si indicano entrambe con la stessa notazione f^{-1}.

Esempio 4.8.1

- La funzione $f(x) = 2x+1$ è invertibile nel suo dominio naturale $\mathbb{R}$: dato $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = 2x + 1$ ha l'unica soluzione $x = \frac{y-1}{2}$. La funzione inversa di $f(x) = 2x + 1$ è dunque $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

  Analogamente la funzione x^3 è invertibile in $\mathbb{R}$: $y = x^3$ ha l'unica soluzione $x = \sqrt[3]{y}$. La funzione inversa di $f(x) = x^3$ è perciò $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

  Si noti che in entrambi i casi l'invertibilità poteva essere verificata graficamente attraverso le intersezioni con rette parallele all'asse x. Infine, la reciproca della prima funzione è $\frac{1}{2x+1}$, della seconda $\frac{1}{x^3}$, che non hanno nulla a che vedere con le inverse, si veda l'Osservazione 4.8.1.

- La funzione $f(x) = x^2$ non è invertibile nel suo dominio naturale $\mathbb{R}$: la sua immagine è l'intervallo $[0, +\infty)$, e per ogni $y > 0$ l'equazione $y = x^2$ ha le due soluzioni $y = \pm\sqrt{|x|}$.

  Tuttavia f è invertibile nel dominio $[0, +\infty)$, e $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Più in generale le funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha > 0$, sono invertibili in $[0, +\infty)$ con inversa $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

- La funzione $f(x) = a^x$, con $a > 0$, è invertibile se $a \neq 1$: infatti $y = a^x$ dà $x = \log_a y$. Se $a = 1$ la funzione è costante, dunque non invertibile. La funzione inversa di a^x, con $a > 0$ e $a \neq 1$, è dunque $f^{-1}(y) = \log_a y$.

Diamo ora una condizione sufficiente per l'invertibilità di una funzione.

Teorema 4.8.1 *Sia $f : D \to \mathbb{R}$. Se f è strettamente monotòna allora f è invertibile. In tal caso, anche la funzione f^{-1} è strettamente monotòna.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia strettamente crescente; l'altro caso è analogo.

Cominciamo col dimostrare che f è invertibile. Presi $x_1, x_2 \in D$, con $x_1 \neq x_2$, dobbiamo dimostrare che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Questo è conseguenza immediata del fatto che f è strettamente crescente: se ad esempio $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto f è invertibile.

Proviamo ora che f^{-1} è strettamente crescente. Siano $y_1 < y_2$ due punti di $f(D)$; dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Poiché $y_1, y_2 \in f(D)$, esistono $x_1, x_2 \in D$ tali che $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ovvero $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$. Dobbiamo perciò dimostrare che $x_1 < x_2$. Se fosse $x_1 \geq x_2$ allora sarebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$ per la crescenza di f, cioè $y_1 \geq y_2$, assurdo. Quindi f^{-1} è strettamente crescente. $\square$

Osservazione 4.8.2 Non vale l'implicazione inversa del teorema: la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{se } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

si veda la Figura 4.7, non è monotòna ma invertibile. Si noti che la funzione inversa f^{-1} ha la stessa espressione di f.

Perciò

$$f \text{ strettamente monotòna } \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \; f \text{ invertibile.}$$

Esempio 4.8.2 Le funzioni sin e cos nel loro dominio naturale $\mathbb{R}$ non sono invertibili in quanto periodiche. Tuttavia possono essere invertite se ristrette ad opportuni domini in cui sono strettamente monotone.

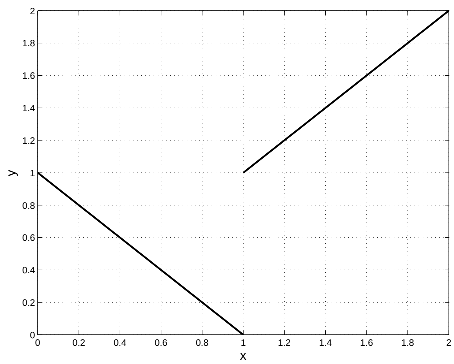

Figura 4.7: Una funzione non monotòna ma invertibile.

- La funzione $f(x) = \sin x$ è invertibile nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in quanto strettamente crescente. La sua inversa è la funzione *arcoseno*: $f^{-1}(y) = \arcsin y$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- La funzione $f(x) = \cos x$ è invertibile nell'intervallo $[0, \pi]$ in quanto strettamente decrescente. La sua inversa è la funzione *arcocoseno*: $f^{-1}(y) = \arccos y$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

- Anche la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ non è invertibile nel suo dominio naturale. Tuttavia essa è invertibile nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in quanto strettamente crescente. La sua inversa è la funzione *arcotangente*: $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Nota 4.8.1 Perché l'arcoseno ha questo nome? Consideriamo una circonferenza unitaria e misuriamo gli angoli in radianti; questo vuol dire (per definizione di radiante) che la lunghezza dell'arco corrispondente ad un angolo y (e il cui seno è ovviamente $x = \sin y$) è precisamente $y = \arcsin x$. Si veda la Figura 4.9.

Esempio 4.8.3 Abbiamo visto nell'Esempio 4.7.1 che la funzione sinh è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e che cosh è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Pertanto esse sono invertibili in questi insiemi per il Teorema 4.8.1. Si veda la Figura 4.10.

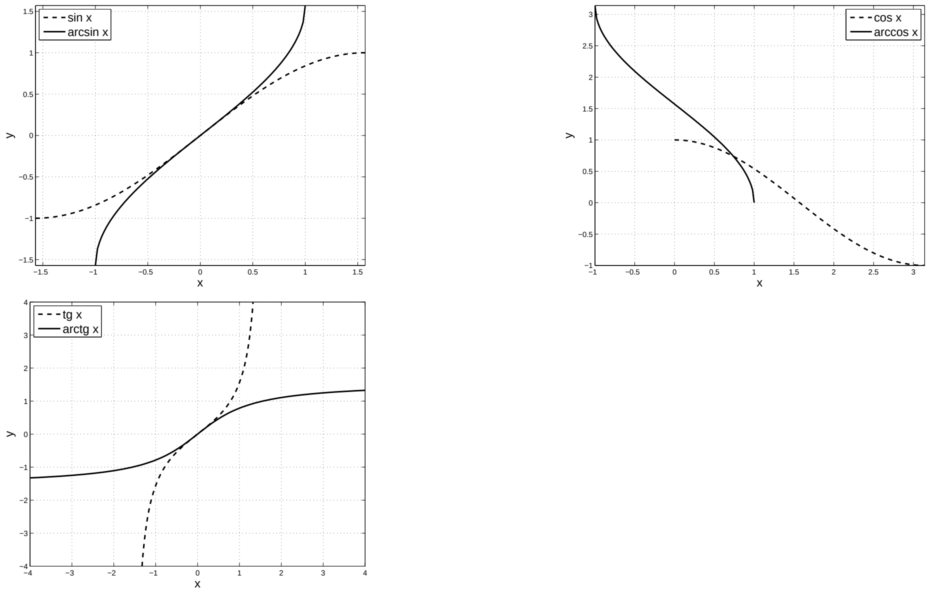

Figura 4.8: Grafici delle funzioni inverse (linea continua) delle restrizioni di alcune funzioni trigonometriche (linea tratteggiata). A sinistra, la funzione $f(x) = \sin x$ ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ e $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Al centro, la funzione $f(x) = \cos x$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$ e $f^{-1}(x) = \arccos x$. A destra, la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ ristretta all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

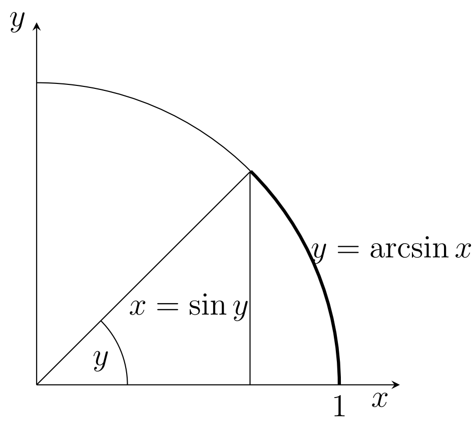

Figura 4.9: Seno e arcoseno.

- L'inversa della funzione $\sinh x$ si ottiene risolvendo l'equazione $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = y$ rispetto ad x. Per chiarezza poniamo $e^x = z$ e risolviamo dunque $z - \frac{1}{z} = 2y$, cioè $z^2 - 2yz - 1 = 0$. Troviamo
$$z = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$
Poiché $z = e^x > 0$, la determinazione negativa della radice va scartata (in quanto $y < \sqrt{y^2+1}$). Dunque $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ e, passando ai logaritmi, $x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. La funzione
$$g(y) = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$
è la funzione inversa, definita in $\mathbb{R}$, di $\sinh x$.

- Come nel caso precedente, dobbiamo risolvere l'equazione
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$
rispetto ad $x \geq 0$. Posto $e^x = z$ risolviamo dunque $z + \frac{1}{z} = 2y$, cioè $z^2 - 2yz + 1 = 0$ e troviamo
$$z = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$
Si noti che il radicando è positivo perché $y = \cosh x \geq 1$. Poiché stiamo considerando $x \geq 0$, abbiamo di conseguenza $z = e^x \geq 1$. La determinazione negativa della radice, cioè $y - \sqrt{y^2-1}$, risulta invece strettamente minore di 1: infatti l'espressione $y - \sqrt{y^2-1} < 1$ è equivalente a $y - 1 < \sqrt{y^2-1} = \sqrt{y-1}\sqrt{y+1}$ e dunque a $\sqrt{y-1} < \sqrt{y+1}$, che è ovviamente vera.
Dunque $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$ e, passando ai logaritmi,
$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$
La funzione
$$g(y) = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),$$
definita in $[1, +\infty)$, è la funzione inversa della funzione cosh considerata in $[0, +\infty)$.

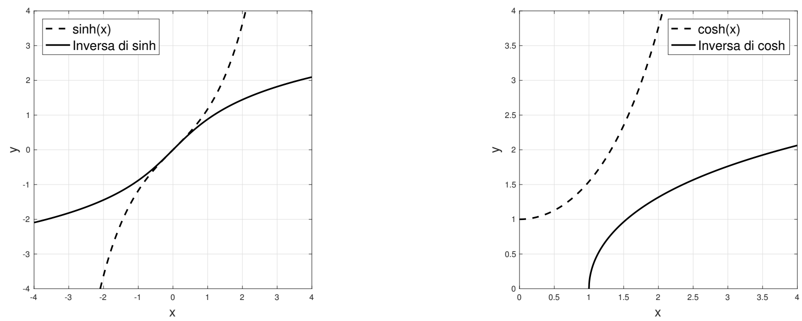

Figura 4.10: A sinistra, la funzione $f(x) = \sin x$ (tratteggiata) e la sua inversa $f^{-1}(x)$ (tratto continuo). A destra, la funzione $f(x) = \cosh x$ ristretta all'intervallo $[0, +\infty)$ e la sua inversa $f^{-1}(x)$.

Esempio 4.8.4 Consideriamo la funzione $f(x) = x + e^x$; entrambe le funzioni x e e^x sono strettamente crescenti, dunque anche la funzione f lo è. Per il Teorema 4.8.1 la funzione f è dunque invertibile. Si noti però che non si riesce ad esplicitare la x nell'equazione $y = x + e^x$; in altri termini, la funzione inversa esiste, ma non si riesce a scriverla tramite una combinazione di funzioni elementari.

Capitolo 5

Limiti di funzioni e continuità

In questo capitolo si introducono dapprima i limiti di funzioni, generalizzando così il concetto di limite già visto nel caso più semplice relativo alle successioni. Si studia infine la continuità delle funzioni.

5.1 Limiti di funzioni

5.1.1 Definizioni

Definiamo in questa sezione i limiti di funzioni. Per semplicità considereremo funzioni definite in intervalli, eccettuato al più un punto. Indicheremo con I un intervallo (non vuoto) di $\mathbb{R}$ e assumeremo pertanto che una funzione f sia definita in $I \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in I$. Si noti che questo non esclude che f sia definita *anche* in x_0.

Definizione 5.1.1 *Sia I un intervallo, x_0 un punto di I, f una funzione definita in $I \setminus \{x_0\}$. Si dice che un numero reale l è il* limite *della funzione f per x che tende a x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che: per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$ si ha che*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \,. \tag{5.1}$$

Si scrive allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \textit{oppure } f(x) \to l \textit{ per } x \to x_0 \,.$$

Questa definizione fondamentale richiede numerosi commenti.

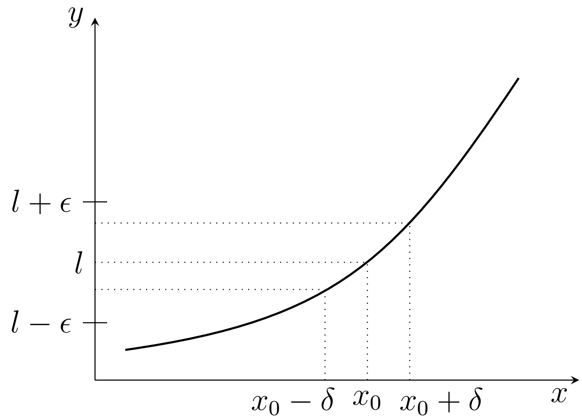

Figura 5.1: Rappresentazione intuitiva del limite di una funzione.

Osservazione 5.1.1

- Non serve che la funzione sia definita nel punto x_0: la (5.1) è richiesta per $x \neq x_0$. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, della quale calcoleremo il limite nella Sezione 5.2.2, è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- La richiesta che il dominio sia un intervallo serve per eliminare casi del tipo $f(x) = \frac{1}{[|\cos x|]}$, vedi Esempio 4.1.1. In questo caso, benché la (5.1) dia il valore 1, è il senso stesso di limite che manca: non vi sono punti del dominio di f "vicini" ai punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Così come per le successioni il limite è unico. Supponiamo infatti che esistano due limiti l_1 e l_2 diversi; allora, fissato un qualunque $\epsilon > 0$, esisterebbero $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che
$$|f(x) - l_1| < \epsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta_1$$
$$\text{e}$$
$$|f(x) - l_2| < \epsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta_2.$$
Allora $|l_1-l_2| = |l_1-f(x)+f(x)-l_2| \leq |f(x)-l_1|+|f(x)-l_2| < 2\epsilon$ se $|x-x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Scelto $0 < \epsilon < \frac{|l_1-l_2|}{2}$ si avrebbe allora $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$, assurdo.

- Si noti che (5.1) si esplicita in
$$x_0-\delta < x < x_0+\delta,\ x \in I\setminus\{x_0\} \ \Rightarrow\ l-\epsilon < f(x) < l+\epsilon\,. \quad (5.2)$$
- Si verifica subito che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = l$. Supponiamo infatti che $|x-x_0| < \delta$ implichi $|f(x)-l| < \epsilon$; allora se $|h| < \delta$ risulta $|x_0+h-x_0| < \delta$ e dunque $|f(x_0+h)-l| < \epsilon$. L'implicazione inversa si dimostra nello stesso modo.

Esempio 5.1.1

- $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$.
  Infatti $|x^2-1| < \epsilon$ equivale, se $x \geq 0$, a $\sqrt{1-\epsilon} < x < \sqrt{1+\epsilon}$. Aggiungendo e togliendo 1 a sinistra e a destra si ottiene
  $$1-\left(1-\sqrt{1-\epsilon}\right) < x < 1+\left(\sqrt{1+\epsilon}-1\right). \quad (5.3)$$
  Se poniamo $\delta_1 = 1-\sqrt{1-\epsilon}$ e $\delta_2 = \sqrt{1+\epsilon}-1$, allora $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ e (5.3) si scrive
  $$1-\delta_1 < x < 1+\delta_2.$$
  Questa espressione è simile a quella che compare a sinistra in (5.2) ma non coinvolge un unico "δ"; in altre parole, l'intervallo $(1-\delta_1, 1-\delta_2)$ non è centrato in 1. Se poniamo però $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} = \min\{1-\sqrt{1-\epsilon}, \sqrt{1+\epsilon}-1\} = \sqrt{1+\epsilon}-1$, si veda la Figura 5.2, allora l'intervallo $(1-\delta, 1+\delta)$ è centrato in 1 e poiché $(1-\delta,1+\delta) \subset (1-\delta_1, 1-\delta_2)$ vale $|x^2-1| < \epsilon$.
- Il limite di una funzione non dipende dal *valore* della funzione nel punto in cui si calcola il limite. Sia infatti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
  $$f(x) = \begin{cases} c & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$$
  dove $c \in \mathbb{R}$. Si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, indipendentemente dal valore c.

La Definizione 5.1.1, come già visto per le successioni, si estende ai casi $l = \pm\infty$ e $x_0 = \pm\infty$. Raccogliamo queste estensioni nella seguente definizione, si veda la Figura 5.3.

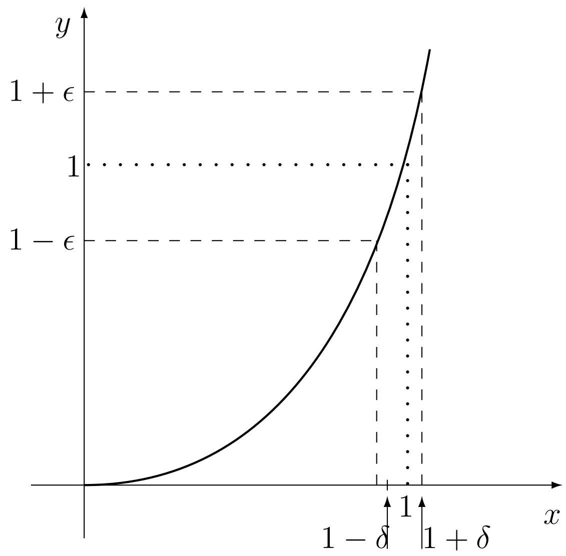

Figura 5.2: Il limite della funzione $f(x) = x^2$ nel punto 1.

Definizione 5.1.2

(i) *Sia I un intervallo, $x_0 \in I$, f una funzione definita in $I \setminus \{x_0\}$. Si definisce*

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$ si ha che*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

(risp., $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$).

(ii) *Sia f una funzione definita in $I = (a, +\infty)$ (risp. in $(-\infty, a)$). Si definisce*

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $K > 0$ tale che per ogni $x \in I$ si ha che*

$$x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

(risp., $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se $x < -K \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$).

(iii) *Sia f una funzione definita in $I = (a, +\infty)$ (risp. in $(-\infty, a)$). Si definisce*

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *esiste* $K > 0$ *tale che per ogni* $x \in I$ *si ha che*

$$x > K \Rightarrow f(x) > M$$

(risp., $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *se* $x < -K \Rightarrow f(x) > M$*).*

Si definisce inoltre

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *esiste* $K > 0$ *tale che per ogni* $x \in I$ *si ha che*

$$x > K \Rightarrow f(x) < -M$$

(risp., $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *se* $x < -K \Rightarrow f(x) < -M$*).*

La terminologia già introdotta per i limiti di successioni è usata anche per i limiti di funzioni: nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ la funzione f è detta *infinitesima* se ha limite 0, *infinita* se ha limite $\pm\infty$.

Esempio 5.1.2

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
  Si prende $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.
- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
  Se $\epsilon \geq 1$ ogni numero positivo K va bene; se $0 < \epsilon < 1$ si prende $K = -\log \epsilon$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
  Si prende $K = M^2$.

Diamo ora la definizione di limite *destro* e *sinistro* di una funzione in un punto.

Definizione 5.1.3 *Sia* I *un intervallo,* x_0 *un punto di* I*,* f *una funzione definita in* $I \cap \{x > x_0\}$ *(risp. in* $I \cap \{x < x_0\}$*). Si dice che un numero* l *è il* limite destro *(*sinistro*) della funzione* f *per* x *che tende a* x_0 *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in I$ *si ha*

$$\begin{array}{rcl} x_0 < x < x_0 + \delta & \Rightarrow & |f(x) - l| < \epsilon \\ (\textit{risp.}\ x_0 - \delta < x < x_0 & \Rightarrow & |f(x) - l| < \epsilon)\,. \end{array}$$

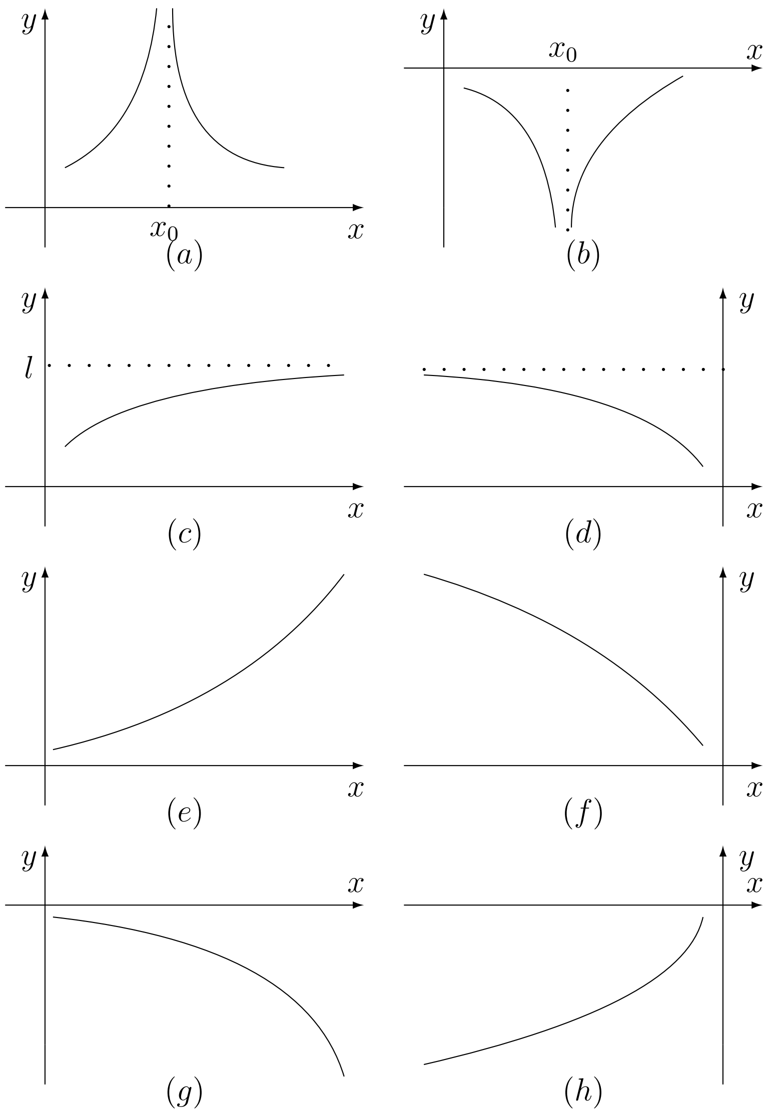

Figura 5.3: Alcune rappresentazioni dei limiti relativi alla Definizione 5.1.2. *(a)*: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$; *(b)*: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; *(c)*: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$; *(d)*: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$; *(e)*: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; *(f)*: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; *(g)*: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; *(h)*: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Si scrive allora $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = l$ *oppure* $f(x) \to l$ *per* $x \to x_0\pm$. *Il caso* $l = \pm\infty$ *è definito analogamente.*

Esempio 5.1.3

- $\lim_{x\to 0+} H(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} H(x) = 0$.

  Si prende $\delta > 0$ arbitrario.

- $\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1$.

  Si prende $\delta > 0$ arbitrario.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

  Si prende $\delta = \frac{1}{M}$. Analogamente si prova che $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty$.

Che rapporto c'è tra limite e limite destro/sinistro? Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ allora chiaramente la definizione di $\lim_{x\to a} f(x)$ coincide con quella di $\lim_{x\to a+} f(x)$ e analogamente $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x)$. Si può dimostrare senza difficoltà il seguente risultato generale.

Proposizione 5.1.1 *Sia* I *un intervallo,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di* I, f *una funzione definita in* $I \setminus \{x_0\}$. *Allora* ($l \in \mathbb{R}^*$)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0+} f(x) .$$

Esempio 5.1.4

- Non esiste il $\lim_{x\to 0} H(x)$.

  Dall'Esempio 5.1.3 si ha $\lim_{x\to 0+} H(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0-} H(x)$. Analogamente non esiste il $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$: $\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1$.

- Non esiste il $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

  Infatti dall'Esempio 5.1.3 si ha $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}$.

5.1.2 Complementi alla definizione di limite

Le precedenti definizioni di limite si possono riformulare tramite gli *intorni*. Per semplicità ci limitiamo alle Definizioni 5.1.1 e 5.1.2.

Definizione 5.1.4 *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$; un* intorno di x_0 *è un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0. Un* intorno di $\pm\infty$ *è un qualsiasi intervallo del tipo $(a, +\infty)$, risp. $(-\infty, a)$.*

I "punti" $\pm\infty$ sono detti appartenere agli intervalli $(a, +\infty)$, risp. $(-\infty, a)$.

Esempio 5.1.5 Gli insiemi $(0, 2)$, $(1/2, 5/4)$, $(0, +\infty)$ sono intorni di 1; non sono intorni di 1 gli insiemi $(-1, 0)$ (non contiene 1), $[0, 2)$ (non è aperto), $(0, 1/4) \cup (1/2, 5/4)$ (non è un intervallo). L'insieme $(0, +\infty)$ è un intorno di $+\infty$.

Il concetto di intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, come suggerisce la parola, serve a specificare un comportamento "vicino" a x_0. Pertanto gli intervalli tipici che bisogna avere in mente sono del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta > 0$ abbastanza piccolo. Le Definizioni 5.1.1 e 5.1.2 sono equivalenti alla seguente.

Definizione 5.1.5 (Definizione di limite tramite gli intorni) *Sia I un intervallo, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di I, f una funzione definita in $I \setminus \{x_0\}$. Si dice che un numero $l \in \mathbb{R}^*$ è il* limite *della funzione f per x che tende a x_0 se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che: per ogni $x \in (U \cap I) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V$.*

Si noti che, nel caso $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$, la Definizione 5.1.5 si esplicita in: per ogni intervallo aperto V contenente l esiste un intervallo aperto U contenente x_0 tale che se $x \in U \cap I$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$. In altre parole gli intervalli U e V non devono necessariamente essere *centrati* in x_0 e l, rispettivamente, come era richiesto dalla Definizione 5.1.1; si veda l'Esempio 5.1.1.

Introducendo gli intorni destri e sinistri di un punto si riformula senza difficoltà anche la Definizione 5.1.3.

I limiti di funzioni possono essere caratterizzati tramite i limiti di successioni, come si vede dal seguente risultato fondamentale; ne omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 5.1.2 (Limiti di funzioni attraverso limiti di successioni) *Sia I un intervallo, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di I, f una funzione definita in $I \setminus \{x_0\}$. Allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ se e soltanto se per ogni successione $\{x_n\} \subset I \setminus \{x_0\}$, con $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, si ha che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

Il risultato della proposizione precedente si scrive più concisamente come segue:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff$$
$$\iff \forall\{x_n\} \subset I \setminus \{x_0\} : \; x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l \text{ per } n \to \infty \,.$$

La proposizione precedente vale anche con ovvie modifiche per i limiti destro ($x_n > x_0$) e sinistro ($x_n < x_0$).

Tramite la Proposizione 5.1.2 molte proprietà dei limiti di successioni vengono ereditati dai limiti di funzione; in particolare si possono dedurre l'unicità del limite (già provata indipendentemente nell'Osservazione 5.1.1), la permanenza del segno (che verrà comunque ridimostrata per chiarezza nel Teorema 5.1.1), la proprietà di confronto (anch'essa ridimostrata nel Teorema 5.1.2).

Esempio 5.1.6

- Non esiste il $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.

  Si prendano le due successioni $x_n = 2\pi n$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$: $\sin(x_n) \equiv 0$, $\sin(y_n) \equiv 1$. Oppure basta considerare l'unica successione $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$: $\sin(z_n) = (-1)^{n-1}$.

5.1.3 Funzioni continue

Introduciamo ora una classe di funzioni in cui il calcolo del limite è banale.

Definizione 5.1.6 *Sia I un intervallo, $x_0 \in I$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è* continua in x_0 *se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. La funzione f è* continua nell'intervallo I *se è continua in ogni punto di I. Una funzione non continua si dice* discontinua.

Infine, la funzione f è continua a destra *(risp.* a sinistra*) in x_0 se $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (risp. $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$).*

Osservazione 5.1.2

- Una funzione continua in x_0 deve *necessariamente* essere definita nel punto x_0, mentre nella definizione di limite di una funzione questo non è necessario.

- Se f è continua in x_0, il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ si esplicita così: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in I$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

  Si noti che non occorre precisare che $x \neq x_0$: la funzione f è definita in x_0 e la disuguaglianza di destra è ovviamente soddisfatta se $x = x_0$.

- La continuità nel punto x_0 si può scrivere anche $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, come si verifica immediatamente dalla definizione di limite.

- Nel caso in cui una funzione f sia definita in un intervallo $I = [a, b]$ e $x_0 = a$ il limite si riduce al limite destro; in tal caso, nel punto a la continuità è equivalente alla continuità a destra. Il caso $x_0 = b$ è analogo (*continuità a sinistra*).

Esempio 5.1.7

- Ogni funzione costante $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ è continua (nel suo campo di esistenza): il numero $\delta > 0$ può essere scelto arbitrariamente.

  Ogni funzione lineare affine $f(x) = ax+b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, è continua: dalla definizione si verifica che si può scegliere $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$. Si noti che in questo caso δ dipende solo da ϵ e non da x_0.

- Le funzioni potenza x^α, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono continue nel loro campo di esistenza. Basta ragionare infatti come nell'Esempio 5.1.1.

- Le funzioni logaritmiche $\log_b x$, con $0 < b \neq 1$, sono continue nel loro campo di esistenza $\{x > 0\}$. Questo segue dall'Esempio 2.2.5 via la Proposizione 5.1.2.

Si può anche dare una dimostrazione diretta come segue; a causa della formula $\log_b x = \frac{\log_e x}{\log_e b}$, basta considerare il caso $b = e$.

- Proviamo dapprima la continuità di $\log x$ in 1. Fissato $\epsilon > 0$ cerchiamo $\delta > 0$ tale che $x > 0$ allora

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |\log x| < \epsilon\,, \tag{5.4}$$

ovvero che

$$-\delta < x - 1 < \delta \Rightarrow -\epsilon < \log x < \epsilon\,.$$

Le disuguaglianze a sinistra equivalgono a $e^{-\epsilon} - 1 < x - 1 < e^{\epsilon} - 1$. Si conclude prendendo $\delta = \min\{e^{\epsilon} - 1, 1 - e^{-\epsilon}\} = 1 - e^{-\epsilon}$, in quanto $e^{\epsilon} - 1 > 1 - e^{-\epsilon}$ se e soltanto se $e^{\epsilon} - 2 + e^{-\epsilon} = (e^{\epsilon/2} - e^{\epsilon/2})^2 > 0$. Si poteva anche sfruttare la nozione di intorno per evitare di prendere l'intervallo centrato nel punto 1.

- Per dimostrare la continuità nel generico punto $x_0 > 0$ si noti che si deve dimostrare che, fissato $\epsilon > 0$, esiste $\delta_0 > 0$ tale che $x > 0$ e $|x - x_0| < \delta_0$ implicano $|\log x - \log x_0| < \epsilon$, cioè che

$$\left|\frac{x}{x_0} - 1\right| < \frac{\delta_0}{x_0} \Rightarrow \left|\log \frac{x}{x_0}\right| < \epsilon\,. \tag{5.5}$$

L'implicazione (5.5) è riconducibile alla (5.4) rimpiazzando $\frac{x}{x_0}$ con x e $\frac{\delta_0}{x_0}$ con δ. Pertanto (5.5) è soddisfatta se $\delta_0 = x_0\delta = x_0(1 - e^{-\epsilon})$.

- Le funzioni esponenziali a^x sono continue nel loro campo di esistenza $\mathbb{R}$. Segue dall'Esempio 2.3.1 via la Proposizione 5.1.2.

- Le funzioni $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ sono continue nel loro campo di esistenza $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consideriamo ad esempio la funzione $\frac{1}{x}$; il risultato è conseguenza della Proposizione 2.3.1 via la Proposizione 5.1.2. Una dimostrazione diretta può essere fatta come segue. Poiché la funzione $\frac{1}{x}$ è dispari possiamo limitarci a dimostrare la continuità in un punto $x_0 > 0$. Possiamo inoltre scegliere $\delta \leq \frac{x_0}{2}$;

pertanto, se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, allora $\frac{x_0}{2} < x$. Dunque

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{2}{x_0^2}|x - x_0| < \epsilon$$

se si sceglie $\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2} \cdot \epsilon\}$.

- La funzione di Heaviside H non è continua in 0 per l'Esempio 5.1.3. Tuttavia essa è continua a destra in 0; infatti

  $$\lim_{x \to 0+} H(x) = 1 = H(0).$$

  Essa è continua in ogni altro punto $x_0 \neq 0$.

  Analogamente la funzione sgn non è continua in 0; in 0 essa non è né continua a destra né continua a sinistra. Anch'essa è continua in ogni altro punto $x_0 \neq 0$.

- La funzione $[x]$ non è continua nei punti interi: se $m \in \mathbb{Z}$ si ha $\lim_{x \to m-}[x] = m - 1$ ma $\lim_{x \to m+}[x] = m = [m]$; essa è continua a destra. Analogamente la funzione $\{x\}$ non è continua nei punti interi (anch'essa è continua a destra). In $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ entrambe le funzioni sono continue.

Osservazione 5.1.3 Si noti che sebbene le funzioni $\frac{1}{x}$ e $H(x)$ abbiano grafici "costituiti da due rami", la prima è continua e la seconda no (nei loro rispettivi domini naturali). Il fatto è che la funzione $\frac{1}{x}$ non è definita in 0, mentre la funzione H lo è. In particolare se definiamo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ c & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

per un valore arbitrario $c \in \mathbb{R}$, allora la funzione f risulta definita in tutto $\mathbb{R}$ e *discontinua* in 0.

5.1.4 Proprietà dei limiti

Questa sezione è analoga alle Sezioni 2.3.1 e 2.3.2, relative alle successioni. Non tutti i risultati (e citeremo solo i principali) saranno dimostrati: essi sono conseguenza di quelli già visti per le successioni (via la Proposizione 5.1.2), oppure possono essere dimostrati direttamente senza difficoltà. In particolare si estendono banalmente le Proposizioni 2.3.1 e 2.3.3. Nel seguito di questa sezione x_0 e l sono in $\mathbb{R}^*$.

La definizione seguente è la versione *continua* della Definizione *discreta* 2.1.3.

Definizione 5.1.7 *Una funzione soddisfa* definitivamente per $x \to x_0$ *una proprietà se tale proprietà è vera in un intorno di* x_0*, eccettuato al più il punto* x_0*.*

Esempio 5.1.8 Si ha che $x^2 > 10x$ definitivamente per $x \to +\infty$, $\cos x < 1$ definitivamente per $x \to 0$.

Questa terminologia semplifica gli enunciati delle definizioni dei limiti; ad esempio, in riferimento alla Definizione 5.1.1, si ha che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se per ogni $\epsilon > 0$ si ha $|f(x)-l| < \epsilon$ definitivamente.

Teorema 5.1.1 (Permanenza del segno) *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, eccettuato al più x_0; si ha che*

(i) se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$, allora $l \geq 0$;

(ii) viceversa, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $l > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2.3.1. Prima di tutto, ricordiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ equivale a richiedere che per ogni $\epsilon > 0$ esista un $\delta > 0$ tale che

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \quad \text{se} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

(i) Se per assurdo fosse $l < 0$, potremmo scegliere $\epsilon = -\frac{l}{2} > 0$ e dedurre $f(x) < l + \epsilon = \frac{l}{2} < 0$ per $|x - x_0| < \delta$, assurdo.

(ii) Scegliendo $\epsilon = \frac{l}{2}$, si ha che $l - \epsilon < f(x)$ diventa $f(x) > \frac{l}{2} > 0$ per $|x - x_0| > \delta$.

□

Teorema 5.1.2 (Confronto) *Siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno di x_0, eccettuato al più x_0, con $f(x) \le g(x) \le h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$. Allora per $x \to x_0$*

$$f(x) \to l,\ h(x) \to l \Rightarrow g(x) \to l\,.$$

Dimostrazione. Si ha, definitivamente, $l - \epsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < l + \epsilon$ da cui la tesi. □

Esempio 5.1.9

- Dal Teorema 5.1.2 si deduce che se $|g(x)| \le h(x)$ e $h(x) \to 0$ allora $g(x) \to 0$: infatti $-h(x) \le g(x) \le h(x)$.
- In particolare se f è una funzione limitata in un intorno di x_0 e g una funzione infinitesima per $x \to x_0$, allora il prodotto fg è infinitesimo per $x \to x_0$: $|f(x)g(x)| \le M|g(x)|$. Ad esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ poiché $|\frac{\sin x}{x}| \le \frac{1}{x}$.

Un aspetto nuovo dei limiti di funzione rispetto ai limiti di successioni è la possibilità di cambiare variabile nel calcolo dei limiti. La dimostrazione del seguente risultato viene omessa per semplicità.

Proposizione 5.1.3 (Cambiamento di variabili nei limiti) *Siano f e g due funzioni e supponiamo che $g \circ f$ sia definita in un intorno di x_0, eccettuato al più x_0. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \ne y_0$ definitivamente ed esiste il $\lim_{y\to y_0} g(y)$, allora*

$$\lim_{x\to x_0} g\Big(f(x)\Big) = \lim_{y\to y_0} g(y)\,.$$

Schematicamente:

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{f} & f(D) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g\big(f(x)\big) \\ x \to x_0 & \Rightarrow & f(x) \to y_0 & & \\ & & y \to y_0 & \Rightarrow & g(y) \to l \\ x \to x_0 & & \Rightarrow & & g\big(f(x)\big) \to l\,. \end{array}$$

Esempio 5.1.10

- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$

  Formalmente, col cambiamento di variabili $y = x - 1$ si ha $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} = +\infty$. Più rigorosamente, in riferimento alla Proposizione 5.1.3, si ha che $x \to 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 \to 0$ e $y \to 0 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{y^2} \to +\infty$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} +\infty, \\ 0\,. \end{cases}$

  Infatti $x \to 0\pm \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty \Rightarrow g(y) = e^y \to \begin{cases} +\infty, \\ 0\,. \end{cases}$

  Formalmente, col cambiamento di variabili $y = 1/x$ si ha

  $$\lim_{x\to 0\pm} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\pm\infty} e^y,$$

  da cui il risultato.

Osservazione 5.1.4 La condizione "$f(x) \neq y_0$ definitivamente" della proposizione precedente non può essere omessa in quanto è insita nella definizione di limite. Ad esempio, se $f(x) = 0$ e $g(x) = [\cos x]$, si ha che $g\big(f(x)\big) = 1$ (e dunque ovviamente $\lim_{x\to 0} g\big(f(x)\big) = 1$) mentre $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$.

Osservazione 5.1.5 I cambiamenti di variabili hanno senso solo per i limiti di *funzioni*; in generale non hanno invece senso per i limiti di *successioni*. Consideriamo ad esempio il $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n}$; se poniamo $m = \frac{1}{n}$ otteniamo sì $\lim \sin m$, ma ... dove varia m? Il numero m non è più un numero naturale, ma il *reciproco* di un numero naturale, cioè $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$, e dunque non siamo più nell'ambito delle successioni.

Esempio 5.1.11 Si ritrova che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$ col cambiamento di variabili $h = x - x_0$, si veda l'Osservazione 5.1.2.

Esempio 5.1.12 Le funzioni seno e coseno sono continue:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

La dimostrazione consiste di tre passi.

(i) Cominciamo col dimostrare che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Si consideri il punto P, sulla circonferenza di centro l'origine O e raggio 1, corrispondente a $x > 0$ radianti, si veda la Figura 5.4; sia $A = (1, 0)$ l'intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse. Il triangolo OPA, di area $\frac{\sin x}{2}$, è contenuto nel settore circolare OPA, di area $\frac{x}{2}$. Dunque $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2}$. Per simmetria $|\sin x| \leq |x|$, e si conclude con il teorema di confronto.

(ii) Proviamo ora che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. Si ricordi che $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ in un intorno di 0; il risultato segue allora da *(i)* e dalla Proposizione 5.1.3 col cambiamento di variabili $y = \sin x$. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \sqrt{1 - \sin x^2} = \lim_{y\to 0} \sqrt{1 - y^2} = 1.$$

(iii) Proviamo che $\lim_{x\to x_0} \sin x = \lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$. Infatti

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \to \sin x_0$$

per $h \to 0$ a causa di *(i)* e *(ii)*. Analogamente si ottiene il secondo limite.

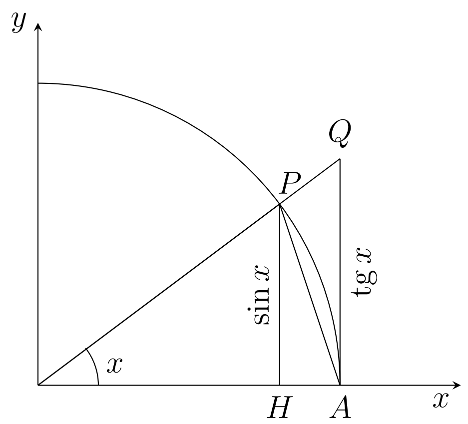

Figura 5.4: La circonferenza goniometrica e il calcolo di $\lim_{x\to 0} \sin x$.

Come per le successioni anche per le funzioni si definiscono gli ordini di infinito o infinitesimo e le funzioni asintotiche. Queste definizioni sono completamente analoghe a quelle date nella Sezione 2.5 e quindi omesse. In particolare due funzioni f e g sono *asintotiche* per $x \to x_0$ (in notazioni: $f \sim g$ per $x \to x_0$) se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, e vale l'analogo della Proposizione 2.5.2.

Osservazione 5.1.6 In conseguenza della Proposizione 5.1.3 di cambiamento di variabili nei limiti vale che se $f(y) \sim g(y)$ per $y \to z_0 \in \mathbb{R}^*$, $z(x) \to z_0 \in \mathbb{R}^*$ per $x \to x_0$ e $z(x) \neq z_0$ definitivamente per $x \to x_0$, allora $f\big(z(x)\big) \sim g\big(z(x)\big)$ per $x \to x_0$. Infatti, col cambiamento di variabili $y = z(x)$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f\big(z(x)\big)}{g\big(z(x)\big)} = \lim_{y\to z_0} \frac{f(y)}{g(y)} = 1\,.$$

Schematicamente e in modo un po' impreciso: se $z(x) \to z_0$ per $x \to x_0$, allora

$$\underset{(y\to z_0)}{f(y) \sim g(y)} \quad\Longrightarrow\quad \underset{(x\to x_0)}{f\big(z(x)\big) \sim g\big(z(x)\big)}\,.$$

Questo risultato sarà spesso applicato nel caso $z_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{c} f(y) \sim g(y) \text{ per } y \to 0 \\ z(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f\big(z(x)\big) \sim g\big(z(x)\big) \text{ per } x \to x_0\,.$$

5.2 Limiti notevoli

In questa sezione si studiano alcuni limiti fondamentali che verranno utilizzati frequentemente nel seguito.

5.2.1 Polinomi e funzioni razionali

Limiti all'infinito di polinomi. Il comportamento all'infinito di un polinomio è stabilito dal suo termine di grado massimo. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, è un polinomio (o, più correttamente, una *funzione polinomiale*) di grado n, allora $p(x) \sim a_n x^n$ per $x \to \pm\infty$. Infatti per $x \to \pm\infty$

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n} \to 1\,.$$

Pertanto $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$.

Esempio 5.2.1 $\lim_{x\to+\infty}(2x^4 - x^3 + x - 1) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(-x^3 + x + 1) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-x^3 + x + 1) = +\infty$.

Limiti all'infinito di funzioni razionali. Una funzione razionale r è un quoziente di polinomi:

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\,,$$

con $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Il limite per $x \to \pm\infty$ si presenta nella forma ∞/∞. Come per i polinomi si ha che $r(x) \sim \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ per $x \to \pm\infty$, dunque $\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Esempio 5.2.2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-1}{2x^3+1} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+2x-1}{x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+2x-1}{3x^3-x^2+1} = -\frac{2}{3}$.

Limiti all'infinito di quozienti con potenze razionali. Il procedimento precedente può essere esteso a quozienti con potenze razionali.

Esempio 5.2.3 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/3}+2x^{2/3}}{x+x^{5/4}} = 0$.

5.2.2 Funzioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche, potenza

Consideriamo dapprima due limiti fondamentali relativi alle funzioni seno e coseno.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

  Il limite si presenta nella forma $0/0$. Poiché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, basta calcolare il limite destro. Ragioniamo come nell'Esempio 5.1.12, si veda la Figura 5.4, osservando che il settore circolare OPA è contenuto nel triangolo OQA. Poiché

$QA = \operatorname{tg} x$ si ha $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ e dunque, dividendo per $\sin x$, $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Perciò $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Si conclude con il teorema di confronto e la continuità della funzione coseno.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

  Il limite si presenta nella forma 0/0. Per $x \to 0$ si ha
$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \to \frac{1}{2},$$
  a causa del limite precedente e della continuità della funzione coseno in 0.

Consideriamo ora un limite fondamentale relativo alla funzione esponenziale, dal quale numerosi altri verranno dedotti.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

  Segue dall'Esempio 2.4.4 e dalla Proposizione 5.1.2.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \log \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = 1$.

  Eseguiamo infatti il cambiamento di variabili $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; dal limite precedente deduciamo che $y \to e$ quando $x \to \pm\infty$. Perciò
$$\lim_{x \to \pm\infty} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to e} \log y = 1,$$
  a causa della continuità della funzione logaritmo nel punto e.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{x} = 1$.

  Dal limite precedente, facendo il cambiamento di variabili $y = \frac{1}{x}$ (con $x \gtrless 0$), si ha
$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \to \pm\infty} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \pm\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{y \to 0\pm} \frac{\log(1 + y)}{y}. \end{aligned}$$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

  Si applica il cambiamento di variabili $y = e^x - 1$ e si usa il limite precedente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1\,.$$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Col cambiamento di variabili $y = (1+x)^\alpha - 1$ si trova

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \log(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)^\alpha - 1} \frac{\log(1+x)}{x} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)^\alpha - 1}\,, \end{aligned}$$

  da cui il risultato. Ad esempio se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

In termini di asintotici i limiti precedenti si possono riassumere così: per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x, \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2}, \\ \log(1+x) &\sim x, \qquad (5.6) \\ e^x - 1 &\sim x, \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x. \qquad (5.7) \end{aligned}$$

Esempio 5.2.4

- Dalla Osservazione 5.1.6 deduciamo ad esempio che, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &\sim 2x\,, \\
1-\cos(x^3) &\sim \frac{x^6}{2}\,, \\
\log(2+3x) = \log\left(2\left(1+\frac{3}{2}x\right)\right) &\sim \log 2 + \frac{3}{2}x\,, \\
e^{\sin x} &\sim 1+\sin x \sim 1+x\,, \\
\sqrt{1+x^2} &\sim 1+\frac{1}{2}x^2\,.
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{e^{2x}-1} = \frac{3}{2}$.

  Infatti $\frac{\log(1+3x)}{e^{2x}-1} \sim \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin((x-1)^2)}{x-1} = 0$.

  Infatti $\frac{\sin((x-1)^2)}{x-1} \sim x-1$ per $x \to 1$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1+2x+x^3} - x) = 0$.

  Chiaramente $\sqrt[3]{1+2x+x^3} \sim x$ per $x \to +\infty$; la sostituzione (procedimento non giustificato!) darebbe 0. Cerchiamo pertanto un asintotico più preciso. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+2x+x^3} - x = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} - 1\right) &\sim \frac{x}{3}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) \\
&\sim \frac{2}{3x}\,.
\end{aligned}$$

  Da questo asintotico segue immediatamente il limite di sopra.

- Cerchiamo un asintotico della funzione $\sqrt[3]{x}$ per $x \to 1$. Se poniamo $x = 1+y$, ci riduciamo a cercare un asintotico per $y \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{1+y}$: è come se facessimo il cambiamento di variabili $y = x-1$ nel limite. Da (5.7) deduciamo $\sqrt[3]{1+y} \sim 1+\frac{1}{3}y$ per $y \to 0$ e dunque

$$\sqrt[3]{x} \sim 1+\frac{1}{3}(x-1) \quad \text{per} \quad x \to 1. \tag{5.8}$$

5.2.3 Ordini di infinito e di infinitesimo

Dalla Proposizione 2.5.1, passando per la Proposizione 5.1.2, si deduce il seguente risultato, che verrà dimostrato di nuovo in seguito (Esempio 6.10.1).

Proposizione 5.2.1 *Per $x \to +\infty$ le seguenti funzioni sono infinite di ordine crescente:*

$$\log_b x, \quad x^\alpha, \quad a^x, \qquad \textit{per } b > 1,\ \alpha > 0,\ a > 1\,.$$

Ricordiamo che ciò è equivalente a dire che per $b > 1$, $\alpha > 0$, $a > 1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0\,.$$

L'enunciato analogo a quello della proposizione precedente ma relativo agli infinitesimi è lasciato per esercizio.

Esempio 5.2.5

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0.$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x \log x = 0.$

  Infatti, col cambiamento di variabili $x = 1/y$, si ha

  $$\lim_{x\to 0+} x \log x = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y}{y} = 0.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x = 1.$

  Infatti $x^x = e^{x\log x}$; il risultato segue allora dall'esempio precedente e dalla continuità della funzione esponenziale.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$

  Infatti $\lim_{x\to 0+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$

5.2.4 Asintoti

Il significato geometrico di alcune definizioni precedenti relative ai limiti è messo in rilievo introducendo la terminologia degli *asintoti.*

Definizione 5.2.1 *La retta $x = x_0$ è un* asintoto verticale da destra *(risp.* da sinistra*) per la funzione f se* $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty$ *(risp.* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$*).*

La retta $y = l$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ *(risp. $-\infty$) per la funzione f se* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ *(risp.* $\lim_{x - \infty} f(x) = l$*).*

Esempio 5.2.6

- La funzione $\frac{1}{x}$ ha come asintoto verticale (da destra e da sinistra) la retta $x = 0$, come asintoto orizzontale (a $\pm\infty$) la retta $y = 0$.
- Le funzioni $\log x$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ hanno in 0 un asintoto verticale da destra (e sono definite solo per $x > 0$). La funzione $e^{\frac{1}{x}}$ (vedi Esempio 5.1.10) ha in 0 un asintoto verticale da destra ma non da sinistra.
- La funzione $\operatorname{arctg} x$ ha per asintoto orizzontale a $\pm\infty$ la retta $y = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Si noti che il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto orizzontale in più punti: basta considerare la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, che ha un asintoto orizzontale $y = 0$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$, si veda la Figura 5.5.

Definizione 5.2.2 *La retta $y = mx + q$ è un* asintoto obliquo a $+\infty$ *(risp. $-\infty$) per la funzione f se* $\lim_{x \to +\infty} \Big(f(x) - (mx + q) \Big) = 0$ *(risp.* $\lim_{x \to -\infty} \Big(f(x) - (mx + q) \Big) = 0$*).*

Geometricamente l'esistenza di un asintoto obliquo esprime il fatto che la "distanza" $f(x) - (mx + q)$ tra il grafico della funzione f e la retta $y = mx + q$ è infinitesima per $x \to \pm\infty$, si veda la Figura 5.6.

La condizione della Definizione 5.2.2 è equivalente alle due seguenti.

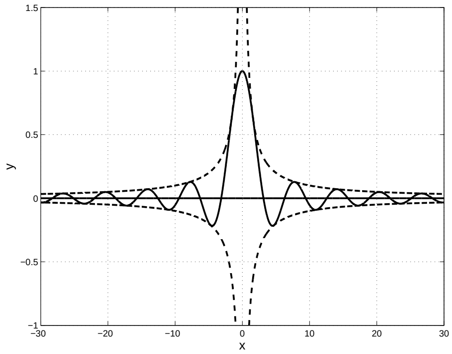

Figura 5.5: La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ e il suo asintoto $y = 0$, in linea continua. In linea tratteggiata i grafici delle funzioni $\pm\frac{1}{x}$.

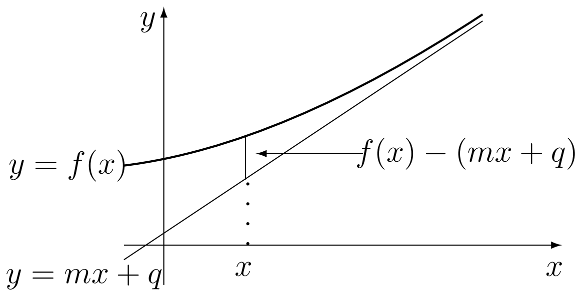

Figura 5.6: Un asintoto obliquo.

Proposizione 5.2.2 *Si ha*

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-(mx+q)\Big)=0 \iff \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m, \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-mx\Big)=q\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $f(x)-(mx+q)\to 0$ per $x\to+\infty$; poiché anche $\frac{1}{x}\to 0$ per $x\to+\infty$, ne segue che

$$\big(f(x)-(mx+q)\big)\cdot\frac{1}{x}=\frac{f(x)-(mx+q)}{x}\to 0$$

dunque $\frac{f(x)}{x}\to m$. La seconda condizione segue. L'implicazione opposta è ovvia. $\square$

Un risultato del tutto analogo vale nel caso $\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)-(mx+q)\Big)=0$.

Esempio 5.2.7

- La funzione $x+\frac{1}{x}$ ha per asintoto obliquo (a $\pm\infty$) la retta $y=x$.
- La funzione $x+\log x$ non ha asintoto obliquo ($m=1$ ma $q=+\infty$).
- La funzione x^2 non ha asintoto obliquo ($m=+\infty$).
- Si noti che il grafico di una funzione può intersecare (anche infinite volte) un suo asintoto. Basta considerare infatti la funzione $f(x)=x+\frac{\sin x}{x}$, il cui grafico è simile a quello riportato in Figura 5.5.

Nota 5.2.1 La parola "asintoto" ha origine greca e significa "che non si incontra". E' intuitivamente quello che fanno il grafico di una funzione e il suo asintoto. Attenzione però che questa etimologia inganna: abbiamo visto infatti che il grafico di una funzione può incontrare (e anche infinite volte) il suo asintoto.

5.3 Risultati fondamentali sulle funzioni continue

5.3.1 Proprietà delle funzione continue

Abbiamo visto nella Sezione 5.1.3 la definizione di funzione continua e alcuni semplici esempi. In particolare sono funzioni continue nel loro dominio le funzioni x^α, $\log_b x$, a^x, $\sin x$, $\cos x$. Vediamo ora altre proprietà della continuità.

Teorema 5.3.1 (Operazioni fondamentali) *Se f e g sono funzioni continue in un intorno del punto x_0, allora anche $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (se $g(x_0) \neq 0$) sono continue in x_0.*

Dimostrazione. Segue dalle proprietà dei limiti. □

Esempio 5.3.1 Sono pertanto continui i polinomi e le funzioni razionali, così come le funzioni $\sin x - e^x$, $x \sin x$, $\frac{\log x}{1+e^x}$.

Teorema 5.3.2 (Composizione) *Supponiamo che la funzione composta $g \circ f$ sia definita in un intorno di x_0, con f continua in x_0 e g continua in $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione di limite. □

Osservazione 5.3.1 La condizione "$g \circ f$ definita in un intorno di x_0" serve per evitare che $g \circ f$ sia definita solo in un punto (vedi Esempio 4.3.1): la definizione di continuità qui data non comprende tali casi.

Esempio 5.3.2 Sono pertanto continue le funzioni e^{x^2}, $\sqrt{1 + \sin^2 x}$, $\log(\log x)$.

I teoremi precedenti si applicano immediatamente al calcolo dei limiti.

Esempio 5.3.3 (Applicazione della continuità al calcolo dei limiti) Dalla continuità delle funzioni precedenti si ricava immediatamente che $\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x - 1) = -2$, $\lim_{x\to 0}\log(1+\sin x) = 0$.

In certi casi una funzione continua in un intervallo aperto (a, b) può essere prolungata ad una funzione continua in uno o in entrambi gli estremi.

Definizione 5.3.1 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che esista finito il $\lim_{x\to a+} f(x) = l$. Si dice allora che f è* prolungabile per continuità all'intervallo $[a, b)$ *o* in a *e*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in (a, b), \\ l & se\ x = a, \end{cases}$$

è il suo prolungamento.

La definizione di prolungamento all'intervallo $(a, b]$ o $[a, b]$ è analoga. Ovviamente $\bar{f}$ è continua in $[a, b)$.

Esempio 5.3.4

- Consideriamo le tre funzioni
$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x\sin\frac{1}{x}.$$
Tutte e tre sono definite in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e in tale insieme sono continue. Le funzioni f e g non sono prolungabili per continuità in 0: i $\lim_{x\to 0\pm}\sin\frac{1}{x}$ non esistono e i $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}$ non sono finiti. Invece h è prolungabile per continuità in 0 con valore 0: infatti dall'Esempio 5.1.9 si ha che $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
- La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, è prolungabile con continuità a $\mathbb{R}$ ponendo $\bar{f}(0) = 1$.

5.3.2 I principali teoremi sulle funzioni continue

In questa sezione riportiamo alcuni risultati fondamentali relativi alle funzioni continue. Le dimostrazioni dei primi due (Teorema degli zeri e Teorema di Weierstrass) non sono immediate e non vengono qui riportate.

Ricordiamo che un punto x_0 è detto uno *zero* di una funzione f se $f(x_0) = 0$.

Teorema 5.3.3 (Zeri di funzioni continue) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e supponiamo che*

$$f(a) < 0 < f(b) \qquad \textit{oppure} \qquad f(b) < 0 < f(a)\,. \tag{5.9}$$

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = 0$.

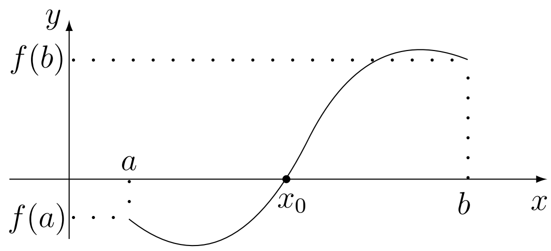

Figura 5.7: Il teorema degli zeri, caso $f(a) < 0 < f(b)$.

Osservazione 5.3.2 In generale il punto x_0 in cui f si annulla non è unico: si prenda $f(x) = \cos x$ in $[0, 3\pi]$. Si verifica subito che esso è unico se f è strettamente monotòna.

Esempio 5.3.5 La funzione f definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1]\,, \end{cases} \tag{5.10}$$

soddisfa (5.9) ma non ha zeri. Questo mostra che l'ipotesi di continuità nel teorema è essenziale.

Esempio 5.3.6 Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$, ne segue che esiste un intervallo $[-K, K]$ tale che $p(x) < 0$ se $x \le -K$ e $p(x) > 0$ se $x \ge K$. Dal Teorema 5.3.3 deduciamo che tale polinomio ha almeno uno zero (nell'intervallo $[-K, K]$).

Il ragionamento precedente si estende ad ogni polinomio di grado *dispari*: ogni polinomio di grado dispari ha *almeno* uno zero reale. I polinomi di grado *pari* possono non avere zeri reali: $x^2 + 1$.

Il risultato seguente riguarda i massimi e minimi di una funzione continua. Premettiamo una definizione.

Definizione 5.3.2 *Il massimo (minimo) di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è il massimo (minimo) dell'immagine $f(I)$. Ciò vuol dire che esiste $x_1 \in I$, detto* punto di massimo*, tale che $f(x_1) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$; il numero $f(x_1)$ è il* massimo *o* valore massimo *di f in I. Nel caso di minimo la definizione è analoga ($f(x_2) \leq f(x)$ per ogni $x \in I$). Con il termine* estremo *(*punto estremo*) si intende indifferentemente sia il massimo che il minimo di una funzione (risp. i punti in cui questi sono assunti).*

Come già visto nella Sezione 1.4, non è detto che gli estremi esistano; se esistono, essi sono però unici, e questo spiega la locuzione: *il* massimo (minimo).

Teorema 5.3.4 (Weierstrass) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ha massimo e minimo.*

La tesi del teorema si enuncia, in simboli, come segue: esistono $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]\,.$$

Osservazione 5.3.3

- La funzione $f(x) = \sin x$ in $[0, 4\pi]$ soddisfa le ipotesi del teorema; essa ha massimo 1, minimo -1. Si noti che, mentre i *massimi (minimi)* sono unici, il Teorema di Weierstrass non garantisce però l'*unicità* dei *punti di massimo*. In questo caso infatti vi sono due punti di massimo ($\pi/2$, $5\pi/2$) e due punti di minimo ($3\pi/2$, $7\pi/2$).

- I punti di massimo possono essere interni all'intervallo $[a, b]$, cioè appartenenti a (a, b) (si pensi alla funzione $\sin x$ in $[0, 2\pi]$), o coincidere con uno degli estremi (si pensi alle funzioni $\arcsin x$ o $\arccos x$ in $[-1, 1]$).

- Nel Teorema di Weierstrass sono racchiuse tre ipotesi: la *continuità* di f e il fatto che essa sia definita in un intervallo *chiuso* e *limitato*. Nessuna di queste ipotesi può essere omessa:

  - la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

    $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{se } x = \pm 1, \end{cases} \tag{5.11}$$

    non ha né massimo né minimo ($f([-1, 1]) = (-1, 1)$): manca la continuità;
  - la funzione $f(x) = x$ in $(-1, 1)$ non ha né massimo né minimo: l'intervallo è limitato ma non chiuso;
  - la funzione $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$ non ha né massimo né minimo: l'intervallo non è limitato.

- Conseguenza del Teorema di Weierstrass è che una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è anche limitata; indicati con m, M il minimo e il massimo di f si ha

  $$m \leq f(x) \leq M$$

  per ogni $x \in [a, b]$. Ovviamente una funzione può essere limitata in $[a, b]$ senza essere continua: si veda ad esempio la funzione definita in (5.11).

Esempio 5.3.7 Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua; supponiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; allora f ha massimo. Questo risultato estende il Teorema di Weierstrass al caso di intervalli chiusi ma non limitati.

Infatti: se $f \equiv 0$ allora il massimo è 0; altrimenti vi è almeno un punto $x_0 \geq 0$ tale che $f(x_0) = a > 0$. Poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ne segue che esiste K tale che $f(x) \leq a/2$ per ogni $x \geq K$. Nell'intervallo $[0, K]$ la funzione f ha massimo (Weierstrass), e poiché $x_0 \in [0, K]$ tale massimo coincide col massimo nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Si noti che non è detto che una funzione soddisfacente quelle ipotesi abbia minimo: $f(x) = e^{-x}$. Inoltre l'ipotesi di positività della funzione non può essere omessa: $f(x) = -e^{-x}$.

Il risultato presentato di seguito è una estensione del Teorema degli zeri: ogni valore compreso tra il minimo ed il massimo di una funzione continua è assunto.

Teorema 5.3.5 (Valori intermedi) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, con massimo* M *e minimo* m. *Allora, per ogni* $c \in [m, M]$ *esiste* $x_0 \in [a,b]$ *tale che* $f(x_0) = c$.

Dimostrazione. Si osservi intanto che i valori M, m esistono per il Teorema di Weierstrass; siano $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$ e supponiamo per esempio che $x_1 \leq x_2$, si veda la Figura 5.8.

Se $c = M$ (o $c = m$) allora si sceglie $x_0 = x_1$ (risp. $x_0 = x_2$).

Se $c \in (m, M)$ si applica il Teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - c$ nell'intervallo $[x_1, x_2]$: poiché $g(x_1) = M - c > 0 > m - c = g(x_2)$, si ha che esiste $x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x_0) = 0$, dunque $f(x_0) = c$. □

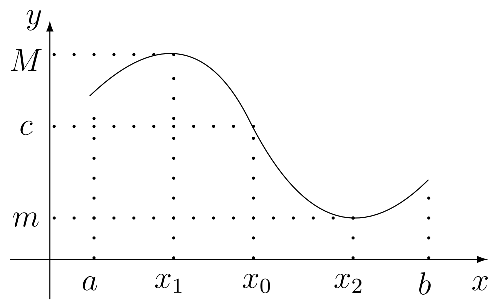

Figura 5.8: Il teorema dei valori intermedi.

Osservazione 5.3.4

- Come nel caso del Teorema dei valori intermedi, l'ipotesi di continuità è essenziale: la funzione f definita in (5.10) non assume alcun valore c strettamente compreso tra il minimo -1 e il massimo 1.

- Una conseguenza del Teorema dei valori intermedi è che

  $$f([a,b]) = [m, M],$$

  cioè una funzione continua trasforma intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati.

Veniamo ora alla continuità della funzione inversa. Abbiamo visto nel Teorema 4.8.1 che se f è strettamente monotòna allora essa è invertibile; il viceversa non vale anche se f è definita in un intervallo (Osservazione 4.8.2). Se però f è continua allora l'invertibilità diventa equivalente alla stretta monotonìa, come è specificato nel seguente risultato, che è conseguenza del Teorema dei valori intermedi. Per la dimostrazione si veda [9, Cap. 3, §12].

Teorema 5.3.6 (Continuità della funzione inversa) *Sia* $: I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora*

$$f \text{ strettamente monotòna} \iff f \text{ invertibile.}$$

In tal caso anche la funzione inversa f^{-1} *è continua.*

Esempio 5.3.8 Sono continue le funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

Capitolo 6

Calcolo differenziale

In questo capitolo si introduce il calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale a valori reali.

6.1 Derivata di una funzione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e $x, x+h \in I$. Il rapporto incrementale di f relativo ai punti x, $x+h$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{6.1}$$

è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x+h, f(x+h))$, $(x, f(x))$. Intuitivamente, il limite per $h \to 0$ di (6.1), se esiste, rappresenterà il coefficiente angolare della "retta tangente" al grafico di f nel punto $(x, f(x))$. Si noti che non è stata data la definizione di retta tangente; anzi, al contrario, la nozione di retta tangente sarà data proprio tramite il limite di (6.1). Ricordando l'interpretazione del rapporto incrementale in termini di variazione dei valori della funzione rispetto alla variazione delle variabili fatta nell'Osservazione 4.2.1, il limite di (6.1) darà una misura della "variazione istantanea" della funzione nel punto x.

Definizione 6.1.1 *Una funzione* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *è detta* derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$ *se esiste finito il* $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. *Tale limite* *è la* derivata prima di f nel punto x_0 *e si indica*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\,. \tag{6.2}$$

Una funzione è derivabile nell'intervallo (a,b) *se è derivabile in ogni punto di* (a,b)*. In tal caso resta definita la funzione* $f':(a,b)\to\mathbb{R}$*, detta* derivata di f.

Osservazione 6.1.1

- La definizione (6.2) è equivalente a $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ tramite il cambiamento di variabili $x=x_0+h$; si veda la Definizione 5.1.6 e l'Osservazione 5.1.2.
- Invece della notazione $f'(x_0)$ si usano anche le notazioni

  $$Df(x_0),\quad \frac{df}{dx}(x_0),\quad \dot f(x_0)\,.$$

  La prima mette in evidenza l'operazione di derivazione fatta sulla funzione; la seconda conserva traccia del procedimento (differenza delle f/differenza delle x); la terza è usata frequentemente quando x rappresenta una variabile temporale.
- Il termine di *derivata* rende conto del procedimento effettuato: se f è derivabile nell'intervallo (a,b) allora dalla funzione f se ne deduce (deriva) un'altra, f'.

Esempio 6.1.1 L'idea di derivata è fondamentale in innumerevoli applicazioni; in particolare se $s(t)$ è la distanza percorsa da un corpo (dal tempo 0, ad esempio) al tempo t, allora $s'(t)$ è la *velocità istantanea* del moto al tempo t.

Proposizione 6.1.1 *Se una funzione f è derivabile nel punto x_0, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Infatti $f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\to 0$ se $h\to 0$, in quanto il primo fattore ha limite finito $f'(x_0)$ e il secondo è infinitesimo. $\square$

Si osservi che, a causa della proposizione precedente, se una funzione f è derivabile nel punto x_0 allora il limite (6.2) si presenta *sempre* nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Esempio 6.1.2

- La derivata di una funzione costante è 0. Infatti se $f(x) = c$ allora $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$.
- $Dx = 1$. Infatti $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$.
- $Dx^2 = 2x$. Infatti si ha
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x$$
per $h \to 0$.
- I tre esempi precedenti si generalizzano nel seguente: se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, allora $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. Infatti
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha}{h}\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right)$$
$$\sim \frac{x^\alpha}{h}\,\alpha\frac{h}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$
per $h \to 0$, usando (5.7).
- Lo stesso procedimento dell'esempio precedente si applica anche ai casi in cui x^α è definito per $x < 0$, ad esempio se $\alpha = -n$ o, più in generale, $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, n dispari. Di conseguenza $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$.

Esempio 6.1.3

- $D\sin x = \cos x$. Infatti
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h} \to \cos x\end{aligned}$$
per $h \to 0$, usando i limiti fondamentali relativi alle funzioni seno e coseno, §5.2.2.

- $D\cos x = -\sin x$. Basta procedere come nell'esempio precedente.

Esempio 6.1.4

- $De^x = e^x$. Infatti

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \to e^x$$

per $h \to 0$, a causa del §5.2.2.

- $D\log x = \frac{1}{x}$. Infatti

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{h} \sim \frac{h}{x}\frac{1}{h} = \frac{1}{x},$$

per il §5.2.2.

Esempio 6.1.5 Se f è derivabile allora $(cf)' = cf'$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$. Basta infatti fattorizzare la costante c nel rapporto incrementale.

Definizione 6.1.2 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$. La* retta tangente al grafico di f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$ *è la retta di equazione*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Tramite questa definizione possiamo dire che la funzione f' associa ad ogni $x \in (a,b)$ il coefficiente angolare (brevemente: la pendenza) della retta tangente al grafico della funzione nel punto $\big(x, f(x)\big)$. Tale retta è pertanto unica per la proprietà di unicità del limite.

Esempio 6.1.6 La retta tangente al grafico della funzione e^x nel punto $(0,1)$ è $y = 1 + x$. La retta tangente al grafico della funzione $\sin x$ nel punto $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ è $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})$. La retta tangente al grafico della funzione $\sin x$ nel punto $(0,0)$ è $y = x$.

Il procedimento di derivazione può essere iterato: ottenuta la funzione f' possiamo considerare il limite del rapporto incrementale di f'. Se tale limite esiste finito lo si definisce derivata seconda di f nel punto x_0, in notazioni $f''(x_0)$ (oppure $D^2 f(x_0)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, $\ddot{f}(x_0)$). Più in generale si definisce la derivata n-esima $f^{(n)}(x_0)$, ovvero $D^n f(x_0)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$. Si noti la notazione $f^{(n)}(x_0)$ per distinguere la derivata dalla potenza $f^n(x_0)$.

Esempio 6.1.7 Riprendendo l'esempio 6.1.1, se $s(t)$ è la distanza percorsa al tempo t allora $s''(t)$ è l'*accelerazione istantanea* al tempo t.

Esempio 6.1.8

- $D^2 x^3 = D(Dx^3) = D(3x^2) = 6x$; $D^2 \log x = -\frac{1}{x^2}$; $D^3 x^2 = 0$.
- $D^4 \sin x = \sin x$, $D^4 \cos x = \cos x$.
- $D^n e^x = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $D^n x^n = D^{n-1}((n-1)x^{n-1}) = \ldots = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo ora i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale (6.1).

Definizione 6.1.3 *Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è detta* derivabile a destra nel punto $x_0 \in (a, b)$ *se esiste finito il* $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$*; tale limite è la* derivata destra di f nel punto x_0 *e si indica* $f'_+(x_0)$*. Analogamente si definisce la* derivata sinistra $\lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x_0)$*.*

Si usa la notazione un po' impropria $f'_+(x_0) = +\infty$ per intendere $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ e così via negli altri casi.

Per semplicità nella definizione precedente il dominio di f è un intervallo aperto. Evidentemente la definizione si estende, ad esempio, al caso in cui esso sia l'intervallo $[a, b)$: nel punto a possiamo considerare solo il limite destro del rapporto incrementale e, se tale limite esiste finito, esso sarà la derivata (più precisamente la derivata destra) di f nel punto a.

Dalla Proposizione 5.1.1 segue che $f'(x)$ esiste se e soltanto se esistono finite e coincidono $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$. Nella sezione seguente analizzeremo i punti di non derivabilità di una funzione.

6.2 Punti di non derivabilità

Abbiamo visto finora numerosi esempi di funzioni derivabili. *Di che tipo possono essere i punti di non derivabilità?* Risponderemo a questa domanda analizzando varie situazioni.

Consideriamo in dettaglio il caso in cui esistano (finite o infinite) $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$; per altri casi si veda l'Esempio 6.2.3. Nel punto di non derivabilità assumeremo sempre la continuità della funzione: la Proposizione 6.1.1 non si applica più.

Esempio 6.2.1 Si veda la Figura 6.1.

- *Punti angolosi*: almeno una delle derivate destra o sinistra è finita.

  - $f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.
    Ad esempio sia $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. La funzione è derivabile se $x > 0$ (con derivata 1) e se $x < 0$ (con derivata -1); in breve, $D|x| = \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$. Inoltre $\lim_{h\to 0\pm} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1$.
  - $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}, f'_-(x_0) = \pm\infty$ o $f'_-(x_0) \in \mathbb{R}, f'_+(x_0) = \pm\infty$.
    Ad esempio si consideri la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$ e 0 se $x < 0$. La funzione f è derivabile se $x > 0$, con derivata $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, e se $x < 0$, con derivata nulla. Inoltre $f'_-(0) = 0$ e $\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$.

- *Punti a tangente verticale*: entrambe le derivate destra e sinistra sono infinite.

  - $f'_\pm(x_0) = +\infty$ o $f'_\pm(x_0) = -\infty$.
    Ad esempio sia $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$. La funzione è derivabile se $x \neq 0$ con derivata $\frac{1}{3x^{2/3}}$. Inoltre $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = +\infty$. Tali punti sono detti più propriamente punti *di flesso* a tangente verticale.
  - $f'_\pm(x_0) = \pm\infty$ o $f'_\pm(x_0) = \mp\infty$.

Ad esempio sia $f(x) = \sqrt{|x|}$. Se $x \neq 0$ si ha $f'(x) = \operatorname{sgn} x/(2\sqrt{|x|})$. Nel punto 0 si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \pm\infty.$$

Tali punti sono detti più propriamente punti *di cuspide* a tangente verticale.

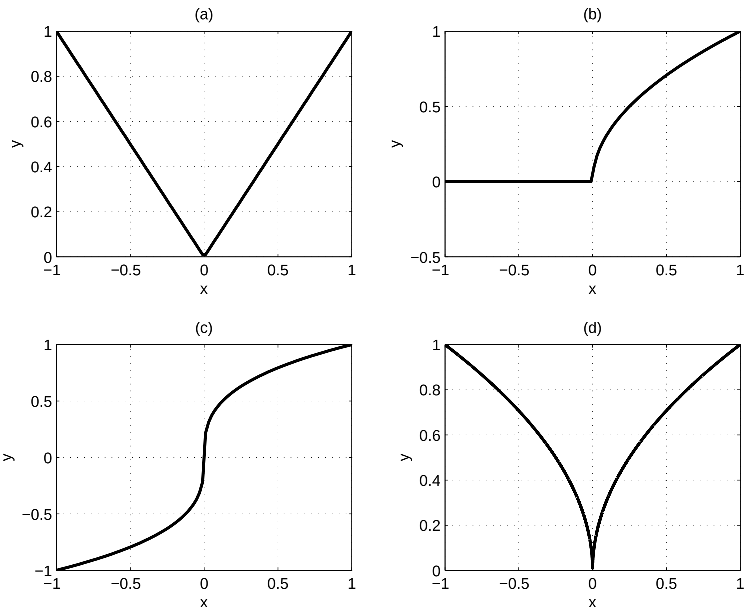

Figura 6.1: Grafici di funzioni non derivabili. (a): $f(x) = |x|$; (b): $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$; (c): $f(x) = \sqrt[3]{x}$; (d): $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Osservazione 6.2.1 Le funzioni considerate nell'Esempio 6.2.1 sono tutte continue ma non derivabili. Pertanto, ricordando la Proposizione 6.1.1,

$$f \text{ derivabile } \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} f \text{ continua.}$$

La funzione $f(x) = |x|$ considerata sopra è forse l'esempio più semplice di una funzione continua ma non derivabile nel punto 0.

Esempio 6.2.2 Si veda la Figura 6.2.

- Sia f la funzione definita da x se $x \leq 0$ e x^2 se $x > 0$. La funzione f è continua in 0 ma $f'_-(0) = 1 \neq f'_+(0) = 0$. Dunque f non è derivabile: in 0 ha un punto angoloso.

  Invece la funzione $f(x) = x|x|$, definita cioè da $-x^2$ se $x \leq 0$ e x^2 se $x > 0$, è derivabile in 0 con derivata nulla.

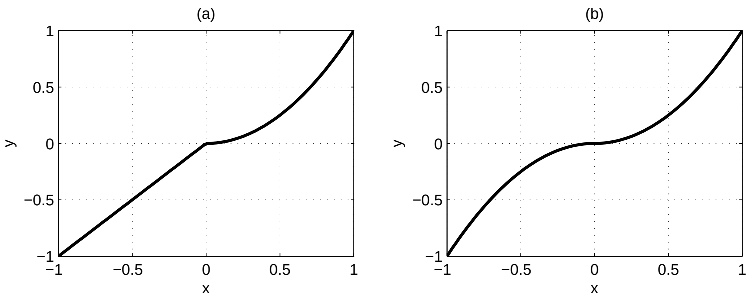

Figura 6.2: Grafici delle funzioni (a): $f(x) = x^2$ se $x \geq 0$ e $f(x) = x$ se $x < 0$; (b): $f(x) = x^2$ se $x \geq 0$ e $f(x) = -x^2$ se $x < 0$.

Negli esempi precedenti abbiamo supposto che $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistessero, cioè che i rapporti incrementali destro e sinistro di f avessero limite (eventualmente infinito). Questo può non accadere, come si vede nel seguente esempio.

Esempio 6.2.3

- Consideriamo la funzione f definita da $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. La funzione f è continua in 0 ma il suo rapporto incrementale relativo ai punti 0 e h, cioè $\sin(\frac{1}{h})$, non ha limite per $h \to 0$. Dunque la funzione f non è derivabile nel punto 0.

6.3 Il calcolo delle derivate

In questa sezione esamineremo le proprietà delle derivate relative alle operazioni fondamentali, alla composizione e all'inversione di funzioni.

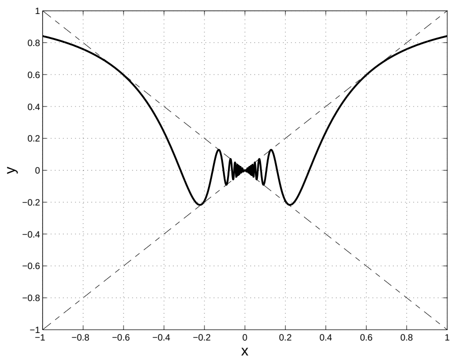

Figura 6.3: Grafico della funzione $f(x) = x\sin(1/x)$ in $[-1, 1]$ ($f(0) = 0$). Sono state rappresentate anche le rette $y = \pm x$.

6.3.1 Operazioni fondamentali

Teorema 6.3.1 *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b). Allora anche $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g \neq 0$) sono derivabili in (a, b) e*

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g',\\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g', \qquad (6.3)\\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \qquad (6.4)\end{aligned}$$

Dimostrazione. La regola di derivazione di una somma o differenza segue dalle analoghe proprietà dei limiti. Per il prodotto si osserva che, sommando e sottraendo a numeratore il termine $f(x)g(x + h)$, si ottiene

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

e il risultato segue sfruttando la continuità di g. Per il quoziente, sommando e sottraendo a numeratore il termine $f(x)g(x)$, si ottiene invece

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)\\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{\Big(f(x+h)-f(x)\Big)g(x)-f(x)\Big(g(x+h)-g(x)\Big)}{g(x+h)g(x)}\\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\times\\
&\quad\times\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

e si conclude analogamente. □

Osservazione 6.3.1

- Da (6.3) per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ritrova $(cf)' = cf'$, si veda l'Esempio 6.1.5. L'operazione di derivazione D è dunque *lineare*: $D(f+g) = Df + Dg$ e $D(cf) = cDf$ per ogni coppia di funzioni f e g derivabili e per ogni costante $c \in \mathbb{R}$.
- In conseguenza di (6.4) otteniamo la formula per la derivata della funzione reciproca:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,. \tag{6.5}$$

Esempio 6.3.1 Dalla formula di derivazione di un quoziente segue

$$\begin{aligned}
D\,\mathrm{tg}\,x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2\,x,\\
D\,\mathrm{cotg}\,x &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\mathrm{cotg}^2\,x)\,.
\end{aligned}$$

6.3.2 Derivazione di funzioni composte e inverse

Teorema 6.3.2 (Derivazione di una funzione composta) *Siano f e g due funzioni e supponiamo che esista la funzione composta*

$g \circ f$ in un intorno di un punto x. Se f è derivabile nel punto x e g derivabile nel punto $f(x)$ allora $(g \circ f)$ è derivabile nel punto x e

$$(g \circ f)'(x) = g'\Big(f(x)\Big) \cdot f'(x)\,. \tag{6.6}$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è, in modo non rigoroso, la seguente (il termine $f(x_0 + h) - f(x_0)$ qui sotto a denominatore potrebbe annullarsi). Per chiarezza indichiamo con x_0 invece di x il punto in cui si calcola la derivata di $g \circ f$; si ha che

$$\begin{aligned} &\frac{g\Big(f(x_0+h)\Big) - g\Big(f(x_0)\Big)}{h} \\ &= \frac{g\Big(f(x_0+h)\Big) - g\Big(f(x_0)\Big)}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Se poniamo $y = f(x_0 + h)$, $y_0 = f(x_0)$, il primo fattore diventa $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$; poiché la funzione f è derivabile, essa è anche continua nel punto x_0, dunque $y \to y_0$ per $h \to 0$ e $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \to g'(y_0) = g'(f(x_0))$ in quanto la funzione g è supposta derivabile in y_0. Il secondo fattore tende a $f'(x_0)$ quando $h \to 0$. □

Osservazione 6.3.2 La formula (6.6) prende anche il nome di *regola della catena*; questo nome si può capire nel seguente modo. Come nella (4.2), intendiamo la funzione f come una funzione della variabile x, e g come una funzione della variabile y. Infine, con un leggero abuso di notazione, indichiamo con $y = y(x)$ la funzione f, come essenzialmente abbiamo fatto nella dimostrazione, si veda sotto a (6.7). Allora la (6.6) si scrive brevemente come

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx}, \tag{6.8}$$

dove si sottintende che il primo membro è calcolato in $y(x)$ e i due fattori a secondo membro in y e x, rispettivamente. Si noti ora che (6.8) ha senso anche *algebricamente*, e per questo è facile da ricordare: le due frazioni a destra si semplificano e danno la frazione a sinistra. Ecco, tra l'altro, un grande vantaggio della notazione frazionaria per la derivata. Il nome di *catena* viene proprio da (6.8), in cui le due frazioni a destra sono collegate tra loro. Si noti infine che la (6.7) esprime il fatto che il rapporto incrementale della funzione composta è il prodotto del rapporto incrementale della funzione g e di quello della funzione f, dove ognuna di queste quantità è calcolata nei punti opportuni.

La formula (6.6) si generalizza al caso della composizione di più funzioni; ad esempio

$$[h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$

Indicando con y la funzione f e con z la funzione g, la formula si sopra si scrive, analogamente a (6.8), come

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dz}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

Esempio 6.3.2

- $De^{2x} = 2e^{2x}$.

  Qui $f(x) = 2x$, $g(y) = e^y$.

- $D\sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2x$.

  Qui $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$. Inoltre $D\sin^2 x = 2\sin x\cdot\cos x$, prendendo $f(x) = \sin x$, $g(y) = y^2$.

- $D\log|x| = \frac{1}{x}$.

  Se $x > 0$ allora $D\log|x| = D\log x = \frac{1}{x}$, se $x < 0$ allora $D\log|x| = D\log(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$. La stessa conclusione poteva essere raggiunta più rapidamente ricordando che $D|x| = \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$, si veda l'Esempio 6.2.1; infatti, se $x \neq 0$ si ha $D\log|x| = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$.

- $\Big[f\Big(g(x) - h(x)\Big)\Big]' = f'\Big(g(x) - h(x)\Big)\cdot\Big(g'(x) - h'(x)\Big)$.

- $\Big[f\Big(\frac{1}{g(x)}\Big)\Big]' = -f'\Big(\frac{1}{g(x)}\Big)\cdot\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

- Si noti che dal Teorema 6.3.2 si può dedurre di nuovo la formula (6.5). Basta infatti prendere $g(x) = \frac{1}{x}$ in (6.6).

Passiamo ora alle funzioni esponenziali.

Esempio 6.3.3

- $Da^x = a^x \log a$, $a > 0$.

  Infatti $Da^x = De^{x \log a} = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$. Così, ad esempio, $D2^x = 2^x \log 2$. In particolare l'unica funzione esponenziale la cui derivata coincide con la funzione stessa è la funzione e^x.

  Più in generale si può dimostrare che le uniche funzioni che coincidono con le proprie derivate sono le funzioni ce^x, per $c \in \mathbb{R}$.

- $D \sinh(x) = \cosh(x)$, $D \cosh(x) = \sinh(x)$.

  Basta osservare che $De^{-x} = -e^{-x}$.

- $Dx^x = x^x(\log x + 1)$.

  Si scrive $x^x = e^{x \log x}$ e si applica la regola di derivazione di una funzione composta.

- $\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \log f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\right)$.

  Come nell'esempio precedente basta osservare che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log[f(x)]}$.

Ed ora le funzioni logaritmiche.

Esempio 6.3.4

- $D \log_b x = \frac{1}{\log b} \cdot \frac{1}{x}$.

  Basta usare la formula di cambiamento di base $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$. In particolare $D \log_{10} x = \frac{1}{\log 10} \cdot \frac{1}{x}$.

- $\left[\log_b(f(x))\right]' = \frac{1}{\log b} \frac{f'(x)}{f(x)}$; $\left[\log_{f(x)}(b)\right]' = -\frac{\log b}{\log^2 f(x)} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

  La prima formula segue dall'esempio precedente; in particolare $[\log(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Per la seconda si cambia base: $\log_{f(x)} b = \frac{\log b}{\log f(x)}$.

Passiamo ora alla derivabilità di una funzione inversa. Ricordiamo che il Teorema 5.3.6 asserisce che, se f è continua ed invertibile in un intervallo, allora la sua funzione inversa f^{-1} è continua. Per la derivazione vale un risultato analogo.

Teorema 6.3.3 (Derivazione di una funzione inversa) *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile. Se f è derivabile nel punto x e $f'(x) \neq 0$ allora la sua funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{6.9}$$

Non diamo una dimostrazione rigorosa di questo teorema ma ne diamo una giustificazione nella seguente osservazione.

Osservazione 6.3.3 Supposta derivabile la funzione f^{-1}, la formula (6.9) può essere facilmente compresa sia analiticamente che geometricamente.

- *Analiticamente.* Per definizione si ha $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$; derivando ambo i membri di questa identità si ottiene $(f^{-1})'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$, cioè (6.9).
- *Geometricamente.* I grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante; pertanto anche la retta tangente al grafico di f in (x,y) e la retta tangente al grafico di f^{-1} in (y,x) sono simmetriche. Dunque i loro coefficienti angolari, $f'(x)$ e $(f^{-1})'(y)$, sono reciproci, si veda la Figura 6.4.

Esempio 6.3.5

- $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  Infatti, posto $y = \operatorname{tg} x$, si ha

  $$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

- $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, per ogni $x \in (-1,1)$.

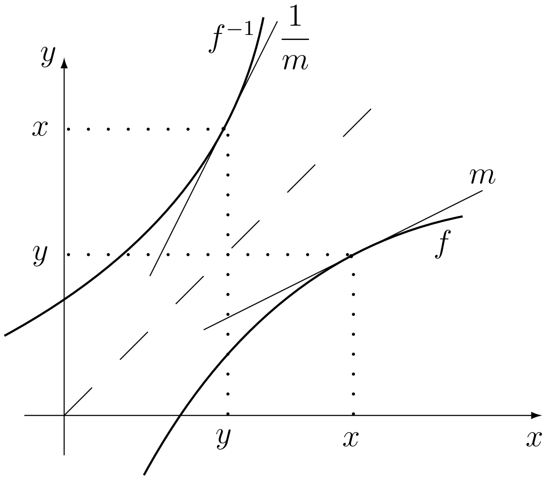

Figura 6.4: La derivata della funzione inversa.

Per la prima formula, posto $y = \sin x$, si ha

$$D \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

poiché se $y \in (-1, 1)$ allora $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e dunque $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Per la seconda si procede analogamente.

Si osservi che entrambe le funzioni arcsin e arccos sono continue in $[-1, 1]$ ma derivabili solo in $(-1, 1)$; non sono infatti derivabili nei punti ± 1, in cui la retta tangente al grafico è verticale.

A conclusione di questa sezione possiamo riunire in una tabella le derivate delle funzioni elementari che abbiamo trovato. Essa è riportata nell'Appendice A.6.

6.4 La classe C^n

Dalle analisi della Sezione 6.2 viene naturale la domanda: *Esistono funzioni che hanno la derivata prima ma non la derivata seconda?*

Definizione 6.4.1 *Sia I un intervallo. Dato $n \in \mathbb{N}$, una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta di classe $C^n(I)$ se f è derivabile n volte e la* *derivata n-esima è continua in I. Una funzione f è detta di classe $C^\infty(I)$ se ha derivate di ogni ordine in I.*

La definizione precedente si applica naturalmente anche se $n = 0$: in tal caso $f \in C^0(I)$ vuol dire che f è continua in I. Si noti che $f \in C^1(I)$ significa richiedere non soltanto la derivabilità della funzione f in I, ma anche la continuità di f'. Naturalmente se una funzione è di classe $C^n(I)$ allora non soltanto la derivata n-esima è continua, ma anche tutte quelle di ordine inferiore.

Esempio 6.4.1

- La funzione $f(x) = |x|$ è di classe C^0 ma non C^1 (non è derivabile in 0).
- Consideriamo la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \tag{6.10}$$

si veda la Figura 6.5. Si confronti con l'Esempio 6.2.3 e la Figura 6.3. Gli intervalli delle ascisse e delle ordinate delle due figure sono gli stessi.

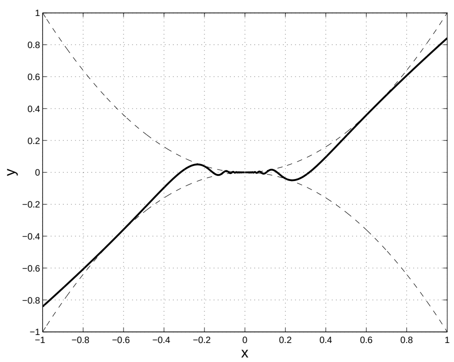

Figura 6.5: Grafico della funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ in $[-1, 1]$ ($f(0) = 0$). Sono state rappresentate anche le parabole $y = \pm x^2$.

Essa è di classe C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In 0 essa è continua:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0.$$

Inoltre in 0 è derivabile con derivata nulla: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0$. Tuttavia la sua derivata, definita da

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

non è continua in 0: non esiste il $\lim_{x\to 0}\Big(2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})\Big)$. Dunque f è di classe C^0 ma non C^1.

- La funzione $x|x|$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$, vedi Esempio 6.2.2, ma non $C^2(\mathbb{R})$: non esiste la sua derivata seconda in 0.

- La funzione f definita da x se $x \leq 0$ e $\sin x$ se $x > 0$ è continua in 0 e $f'_-(0) = 1 = f'_+(0)$; dunque f è derivabile in 0 con derivata 1. La funzione f' è a sua volta derivabile in tutto $\mathbb{R}$, con $f''(0) = 0$. Invece $f'''(0+) = -1 \neq f'''(0-) = 0$. Pertanto la funzione f è derivabile due volte ma non tre: $f \in C^2(\mathbb{R}) \setminus C^3(\mathbb{R})$. Si veda la Figura 6.6.

6.5 I principali teoremi sulle derivate

In questa sezione presentiamo alcuni risultati fondamentali che coinvolgono la derivata di una funzione f. A differenza di quelli della sezione precedente, questi non riguardano il *calcolo* delle derivate, ma *tramite* la derivata f' danno informazioni sulla funzione f e viceversa.

Il primo risultato riguarda gli estremi di una funzione; premettiamo una definizione che estende la definizione di massimo o di minimo.

Definizione 6.5.1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in [a, b]$ è detto* punto di massimo assoluto *se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$; il valore $f(x_0)$ è il* massimo assoluto.

Un punto $x_0 \in [a, b]$ è detto punto di massimo relativo o locale *se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$; il valore $f(x_0)$ è un* massimo relativo.

Analogamente si definiscono i punti di minimo assoluto, relativo e i relativi valori.

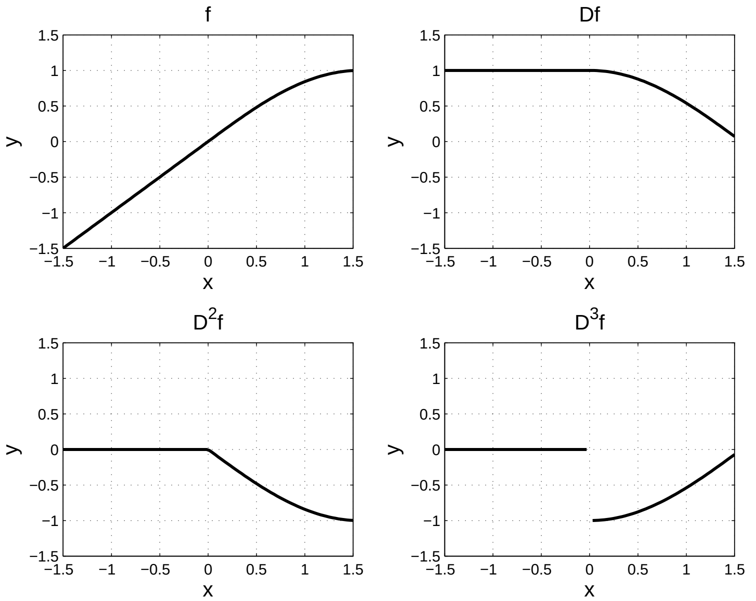

Figura 6.6: Grafico della funzione f definita da x se $x \leq 0$ e $\sin x$ se $x > 0$; sono riportati anche i grafici di f', f'' e f''', quest'ultima per $x \neq 0$.

Con questa definizione attribuiamo dunque il nome di *assoluto* al massimo definito nella Definizione 5.3.2, per distinguerlo dai massimi *relativi*. La terminologia *estremo* (*punto estremo*), introdotta in quella definizione, si riferirà pertanto ai massimi e minimi assoluti (risp., ai punti di massimo e minimo assoluti). Si ricordi che il massimo assoluto è unico, mentre possono esistere più massimi relativi. Ovviamente un punto di massimo assoluto è anche punto di massimo relativo, ma non viceversa; analogamente per i minimi.

Esempio 6.5.1 Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ in $[-1, 2]$, si veda la Figura 6.7. Il punto 2 è punto di massimo assoluto (con massimo assoluto 4), il punto -1 è punto di massimo locale (massimo locale 1); il punto 0 è punto di minimo assoluto (con minimo assoluto 0). Come si vede da questo esempio i punti di massimo e di minimo, assoluti o relativi, possono essere interni all'intervallo di definizione della funzione o coincidere con gli estremi dell'intervallo.

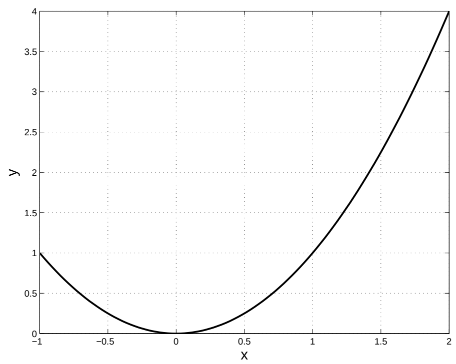

Figura 6.7: Grafico della funzione $f(x) = x^2$ in $[-1, 2]$.

Teorema 6.5.1 (Fermat) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b). Se $x_0 \in (a, b)$ è punto di massimo o di minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo, si veda Figura 6.8. Esiste pertanto un $\delta > 0$ tale che $I_0 = (x_0 - \delta, x_0 +$

$\delta) \subset (a,b)$ e $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in I_0$. Pertanto per $x \in I_0$ si ha:

$$\begin{aligned} x \leq x_0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\geq 0, \\ x \geq x_0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\leq 0\,. \end{aligned}$$

Per il Teorema della permanenza del segno si ha dunque $f'_-(x_0) \geq 0$ e $f'_+(x_0) \leq 0$; dunque $f'(x_0) = 0$. □

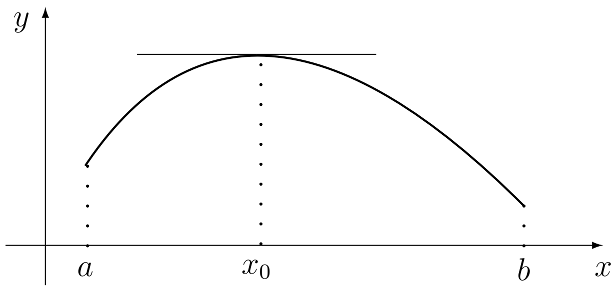

Figura 6.8: Il Teorema di Fermat.

Osservazione 6.5.1

- Il significato geometrico del Teorema di Fermat è evidente (si veda la Figura 6.8): se x_0 è un punto di massimo o di minimo interno all'intervallo $[a,b]$, allora la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale.

- Anche supponendo f derivabile in tutto $[a,b]$ il risultato precedente è falso se $x_0 = a$ o $x_0 = b$.

  Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ definita in $[0,1]$ ha massimo assoluto 1 (nel punto 1) ma $f'(x) = 1 \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Rivedendo la dimostrazione del Teorema di Fermat, si noti infatti che si usa in maniera sostanziale il fatto di avere un intorno *completo* di x_0, in modo che la derivata cambi di segno in x_0.

  Come altro esempio si consideri la funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[-1,2]$, si veda la Figura 6.7: il punto 2 è punto di massimo ma $f'(2) = 4 \neq 0$.

Pertanto nel Teorema 6.5.1 l'ipotesi che il punto di massimo sia *interno* all'intervallo $[a, b]$ è essenziale.

- Non è vera l'implicazione contraria del teorema: se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 non è necessariamente un punto di massimo o di minimo. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ in 0.
- Il Teorema 6.5.1 dà una condizione *necessaria* per l'esistenza di punti di massimo (minimo) interni, se la funzione f è derivabile in quei punti. Naturalmente una funzione può avere punti estremi in cui essa non è derivabile: si consideri ad esempio la funzione $f(x) = |x|$, che ha un minimo assoluto in 0.

Nota 6.5.1 Il nome di Pierre de Fermat, matematico francese del Seicento, è legato ad un teorema molto più famoso e importante del precedente. Era già nota ai greci l'esistenza di triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze espresse da numeri naturali; in altre parole, per il Teorema di Pitagora, esistono numeri naturali x, y, z (detti *terne pitagoriche*) tali che

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ad esempio, $x = 3$, $y = 4$ e $z = 5$, ma anche $x = 5$, $y = 12$ e $z = 13$. Fermat si chiese se fosse vero che l'equazione

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{con} \quad n \geq 3$$

avesse ancora delle soluzioni espresse da numeri naturali x, y e z. Giunse però alla conclusione che questo *non* era mai vero per *nessun* numero naturale n maggiore o uguale a 3; il caso $n = 2$ era dunque assolutamente specifico. Purtroppo Fermat non lasciò la dimostrazione di questo risultato (da allora chiamato brevemente "Teorema di Fermat"), che da allora rimase un problema aperto della Teoria dei Numeri (un ramo della Matematica). Infatti, nonostante l'enunciato semplicissimo, il problema è estremamente difficile. Nel Settecento, Eulero riuscì a dimostrare che Fermat aveva ragione se $n = 3$; si dovette però aspettare fino al 1993 quando Andrew Wiles stabilì (con tecniche estremamente complesse) che Fermat aveva *sempre* ragione, qualunque fosse il valore del numero naturale $n \geq 3$. E la dimostrazione mancante di Fermat? L'opinione comune è che la dimostrazione non fosse corretta...

Il Teorema di Fermat giustifica la seguente definizione.

Definizione 6.5.2 *I punti in cui la derivata di una funzione si annulla sono detti* punti stazionari.

Nel caso della funzione $s(t)$ introdotta nell'Esempio 6.1.1 i punti stazionari sono quelli di velocità nulla, e questo spiega la terminologia. Il Teorema di Fermat asserisce allora che i punti di massimo o minimo relativo, interni al dominio di una funzione derivabile, sono da ricercarsi tra i punti stazionari.

Il secondo risultato che enunciamo sarà ripetutamente impiegato nel seguito.

Teorema 6.5.2 (Lagrange, o del valor medio) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*. Allora esiste* $x_0 \in (a, b)$ *tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \,. \tag{6.11}$$

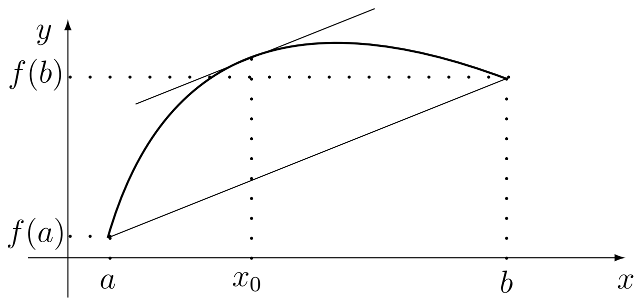

Figura 6.9: Il Teorema di Lagrange.

Osservazione 6.5.2 Il Teorema di Lagrange ha una semplice interpretazione geometrica, si veda la Figura 6.9: esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ è parallela alla retta passante per i punti $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$. Naturalmente vi possono essere più punti in cui la derivata di f uguaglia $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione del Teorema di Lagrange. La retta che congiunge i punti $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ è il grafico della funzione

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Consideriamo ora la funzione

$$g(x) = f(x) - r(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)\,.$$

La funzione g è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b); inoltre

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e pertanto il teorema sarà dimostrato se facciamo vedere che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $g'(x_0) = 0$.

Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$, rispettivamente punti di massimo e di minimo di g in $[a, b]$; poniamo $g(x_1) = M$, $g(x_2) = m$. Abbiamo i seguenti due casi.

(i) Se $M = m$, allora g è costante (in effetti è nulla, essendo $g(a) = 0$) e perciò $g'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

(ii) Se $M > m$, allora almeno uno dei due punti estremi non coincide né con a né con b, in quanto $g(a) = g(b) = 0$. Tale punto appartiene dunque all'intervallo (a, b) e, per il Teorema di Fermat, la derivata di g si annulla in quel punto.

$\square$

La dimostrazione del Teorema di Lagrange è riassunta, in due casi particolari, nella Figura 6.10.

Esempio 6.5.2

- Sia $f(x) = x^2$; nell'intervallo $[a, b]$ la formula (6.11) diventa

  $$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2x_0,$$

  da cui si deduce che il punto x_0 è unico e vale $x_0 = \frac{a+b}{2}$, ovvero x_0 è la *media aritmetica* dei punti a e b.

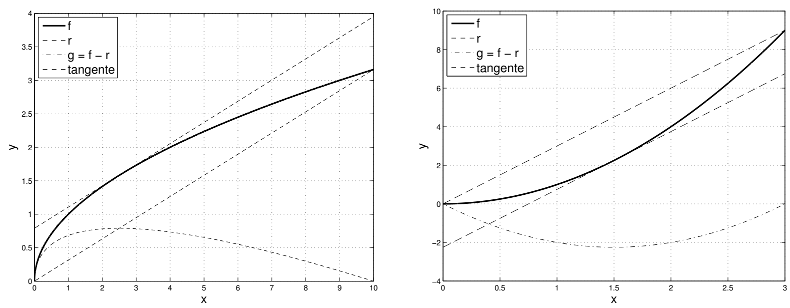

Figura 6.10: Ad illustrazione del Teorema di Lagrange; a sinistra $f(x) = \sqrt{x}$, a destra $f(x) = x^2$.

- Sia $f(x) = \frac{1}{x}$; dato un intervallo $[a, b]$, con $a > 0$, si verifica subito che $x_0 = \sqrt{ab}$, ovvero x_0 è la *media geometrica* dei punti a e b.

Il risultato seguente caratterizza la monotonìa di una funzione tramite il segno della sua derivata.

Teorema 6.5.3 (Caratterizzazione della monotonìa) *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile. Allora*

$$f \textit{ crescente} \iff f'(x) \geq 0 \textit{ per ogni } x \in (a, b), \tag{6.12}$$

$$f \textit{ decrescente} \iff f'(x) \leq 0 \textit{ per ogni } x \in (a, b)\,. \tag{6.13}$$

Dimostrazione. Proviamo la (6.12); la (6.13) segue in modo analogo.

$\Rightarrow$ Se f è crescente allora per la Proposizione 4.7.1 si ha $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ per ogni $x, y \in (a, b)$ con $x \neq y$. Preso $y = x + h$ si deduce $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$; passando al limite per $h \to 0$ si ha che $f'(x) \geq 0$ per il Teorema 5.1.1 della permanenza del segno.

$\Leftarrow$ Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e consideriamo $x, y \in (a, b)$ con $x < y$. Per il Teorema di Lagrange si ha

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0) \geq 0 \tag{6.14}$$

per qualche $x_0 \in (x, y)$, dunque $f(x) \leq f(y)$. □

Osservazione 6.5.3 In generale, se f è strettamente crescente non è detto che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$; si consideri ad esempio la funzione $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$. Dalla dimostrazione del Teorema 6.5.3 e più precisamente dalla (6.14), segue invece che se $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente. In conclusione

$$f \text{ strettamente crescente } \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in (a,b)\,. \qquad (6.15)$$

Osservazione 6.5.4 Nel Teorema 6.5.3 l'ipotesi che la funzione f sia definita in un intervallo è indispensabile. Si consideri ad esempio la funzione f definita in $(0,1) \cup (2,3)$ da $f(x) = x$ se $x \in (0,1)$ e $f(x) = x - 2$ se $x \in (2,3)$, si veda la Figura 6.11. La funzione f non è crescente benché $f'(x) \equiv 1 > 0$.

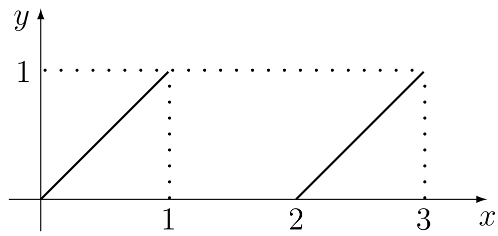

Figura 6.11: Un esempio di una funzione non monotòna con derivata positiva. La funzione non è definita in un intervallo.

Osservazione 6.5.5 Supponiamo che $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sia derivabile e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora f è strettamente crescente per (6.15), dunque invertibile per la prima parte del Teorema 4.8.1. Dalla formula (6.9) per la derivata della funzione inversa, segue che

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} > 0,$$

ovvero che f^{-1} è strettamente crescente. Questo risultato è più debole del Teorema 4.8.1 perché si suppone $f' > 0$ e non soltanto che f sia strettamente crescente.

Corollario 6.5.1 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora*

$$f'(x) = 0 \textit{ per ogni } x \in (a,b) \iff f \textit{ costante}\,.$$

Dimostrazione. Sia $f' \equiv 0$; allora, per il Teorema di Lagrange, per ogni $x, y \in (a, b)$ si ha $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x_0) = 0$ con x_0 nell'intervallo di estremi x e y; dunque f è costante. L'implicazione contraria è già stata provata nell'Esempio 6.1.2. $\square$

Osservazione 6.5.6 Una dimostrazione ancora più semplice del Corollario 6.5.1 è la seguente: dal Teorema 6.5.3, se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è sia crescente che descrescente, dunque costante, e viceversa.

Osservazione 6.5.7 Nel Corollario 6.5.1 (così come nel Teorema 6.5.3, si veda l'Osservazione 6.5.4) l'ipotesi che il dominio della funzione sia un intervallo è essenziale: la funzione f che vale 1 nell'intervallo $(0, 1)$ e 2 nell'intervallo $(2, 3)$ non è costante ma $f' \equiv 0$, si veda la Figura 6.12.

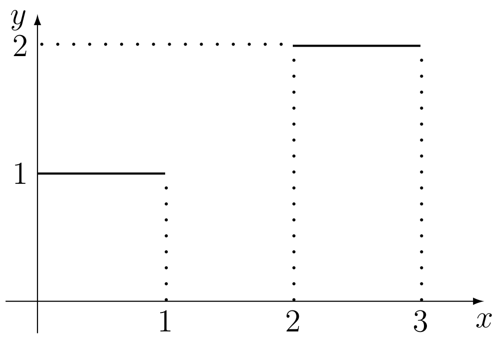

Figura 6.12: Un esempio di una funzione non costante con derivata nulla. La funzione non è definita in un intervallo.

Corollario 6.5.2 *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che*

$$f(x) = g(x) + C \text{ per ogni } x \in (a, b)\,.$$

Dimostrazione. Basta applicare il Corollario 6.5.1 alla funzione $h = f - g$. $\square$

In altre parole, il Corollario 6.5.2 stabilisce che se due funzioni, definite in un intervallo, hanno derivate uguali, allora differiscono per una costante. Ciò vuol dire che i loro grafici differiscono per una traslazione verticale.

Un'ulteriore applicazione del Teorema di Lagrange riguarda lo studio dei punti di derivabilità di una funzione. Una situazione tipica che abbiamo incontrato nelle Sezioni 6.2 e 6.4 è quella di una funzione definita in un intervallo I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$; era da studiare la derivabilità nel punto x_0, e ciò veniva fatto usando la definizione stessa di derivata come limite di un rapporto incrementale. Un modo più semplice, enunciato nella proposizione seguente, consiste nello studiare il limite della derivata.

Proposizione 6.5.1 *Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che f sia continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b); supponiamo inoltre che esista il*

$$\lim_{x\to a} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*. \tag{6.16}$$

Allora vale che $f'_+(a) = m$.

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Lagrange a f relativamente all'intervallo $[a, a + h]$, $h > 0$: esiste allora $x_h \in (a, a + h)$ tale che

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(x_h)\,.$$

Passando al limite per $h \to 0+$ si ha la tesi. □

Un risultato analogo a quello della Proposizione 6.5.1 vale ovviamente nel caso $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to b} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$: si ha allora che $f'_-(b) = m$.

Osservazione 6.5.8 In riferimento alla Proposizione 6.5.1, se $m \in \mathbb{R}$ allora la funzione f è derivabile da destra nel punto a. In questo caso si noti che l'ipotesi (6.16) implica che la derivata f' è continua nel punto a. Pertanto la condizione (6.16) è solo sufficiente ma non necessaria per la derivabilità di una funzione; si consideri ad esempio la funzione (6.10) dell'Esempio 6.4.1.

Esempio 6.5.3 Consideriamo la funzione f definita in $[0, +\infty)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è continua in $[0, +\infty)$ e sicuramente derivabile in $(0, +\infty)$ con $f'(x) = 2x \log x + x$. Poiché $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, dalla Proposizione 6.5.1 si deduce che f è derivabile da destra in 0 con derivata nulla.

6.6 Studio degli estremi di una funzione

Il Teorema di Fermat e il Teorema 6.5.3 hanno applicazione immediata nel problema della determinazione degli estremi di una funzione. Sia infatti $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; eventuali punti estremi saranno da ricercarsi tra:

- i punti a e b;
- i punti di non derivabilità;
- i punti stazionari.

Nei primi due casi il Teorema di Fermat non si applica; si noti che i punti di non derivabilità possono essere interni al campo di esistenza di una funzione ($f(x) = |x|$) oppure coincidere con uno o entrambi gli estremi ($f(x) = \arcsin x$). Per i punti stazionari si può quindi usare il Teorema 6.5.3: se la derivata da positiva diventa negativa (da negativa diventa positiva) abbiamo un punto di massimo (minimo) locale; altrimenti, se la derivata non cambia segno, il punto stazionario non è un estremo. Schematicamente:

- sia $x_0 \in (a, b)$ punto stazionario di una funzione f derivabile in (a, b); allora
  - se f' cambia di segno in x_0 allora x_0 è punto di massimo (minimo) se il cambiamento è $+ \to -$ (risp. $- \to +$);
  - se f' non cambia di segno in x_0 allora x_0 non è un punto estremo.

Gli estremi assoluti vengono poi determinati dal confronto degli estremi locali.

Esempio 6.6.1 $f(x) = x \log x$.

La funzione è definita in $(0, +\infty)$; si ha che $f'(x) = \log x + 1$ e dunque il solo punto stazionario è il punto $1/e$. Inoltre $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1/e$; pertanto il punto $1/e$ è punto di minimo assoluto con minimo assoluto $-1/e$. La funzione non è limitata superiormente, dunque non esiste il massimo assoluto. Si veda la Figura 6.13.

Esempio 6.6.2 $f(x) = x^3 - x^2$.

Si ha che $f'(x) = 3x^2 - 2x$, e i punti stazionari sono 0 e $2/3$. Inoltre $f'(x) \geq 0$ se e soltanto se $x \leq 0$ o $x \geq 2/3$. Pertanto il punto 0 è un punto di massimo locale (con massimo 0), il punto $2/3$ è un minimo locale (con minimo $-4/27$). Poiché la funzione non è limitata non esistono nè massimi nè minimi assoluti. Si veda la Figura 6.13.

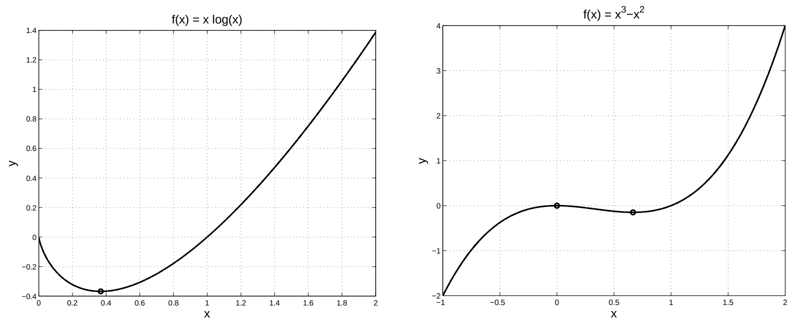

Figura 6.13: Grafici delle funzioni degli Esempi 6.6.1 (a sinistra) e 6.6.2 (a destra).

Esempio 6.6.3 $f(x) = e^{-x} \cos x$ in $[0, +\infty)$.

Si ha che $f(0) = 1$ e $f'(x) = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$; i punti stazionari sono dunque i punti

$$x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Inoltre $f'(x) \geq 0$ se e soltanto se $\sin x \leq -\cos x$, cioè se $x \in [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi]$. Pertanto i punti $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ sono minimi locali (con minimo $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}-2k\pi}$); i punti $\frac{7\pi}{4}+2k\pi$ sono massimi locali (con massimo $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-7\pi}{4}-2k\pi}$); il punto 0 è un massimo locale (massimo 1). Il massimo assoluto è dunque 1 (assunto nel punto 0), il minimo assoluto è $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$ (nel punto $\frac{3\pi}{4}$). Si noti che si hanno infiniti massimi e minimi locali tutti diversi tra loro. Si veda la Figura 6.14.

Si noti che i punti di massimo o di minimo di f non coincidono con quelli della funzione $\cos x$ (cioè $k\pi$); in tali punti il grafico di f tocca il grafico della funzione e^{-x}.

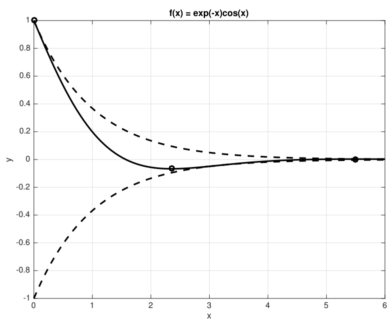

Figura 6.14: Grafico della funzione dell'Esempio 6.6.3. In tratteggio i grafici delle funzioni e^{-x} e $-e^{-x}$.

6.7 Concavità e convessità

In questa sezione ci occupiamo in dettaglio della derivata seconda di una funzione. Un primo risultato è il seguente.

Proposizione 6.7.1 *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte. Allora*

$$\begin{aligned} f' \text{ crescente} \quad &\Longleftrightarrow \quad f''(x)\geq 0 \text{ per ogni } x\in(a,b), \\ f' \text{ decrescente} \quad &\Longleftrightarrow \quad f''(x)\leq 0 \text{ per ogni } x\in(a,b)\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 6.5.3 alla funzione f'. $\square$

Si osservi che per una funzione *lineare affine* $f(x) = mx + q$ si ha $f'(x) = m$ (dunque costante) e $f''(x) = 0$; pertanto la derivata seconda dà una "misura" di quanto una funzione si discosta da una funzione lineare. Più precisamente, il valore $f''(x_0)$ dà una misura di quanto rapidamente stia variando f' in un intorno di x_0.

La proposizione precedente motiva la seguente definizione.

Definizione 6.7.1 *Sia I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile, (a, b) un intervallo contenuto in I. La funzione f è* convessa (concava) *in (a, b) se $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) per ogni $x \in (a, b)$. Un punto $x_0 \in I$ in cui la funzione da concava diventa convessa (o viceversa) è detto* punto di flesso.

Esempio 6.7.1

- Le funzioni a^x, con $a > 1$ o $0 < a < 1$, sono convesse in $\mathbb{R}$; se $a = 1$ la funzione è costante e dunque, secondo la definizione, sia convessa che concava. La funzione x^2 è convessa in $\mathbb{R}$.

- Le funzioni $\log_b x$, con $b > 1$, e $\sqrt{x}$ sono concave in $(0, +\infty)$. Si noti che invece le funzioni $\log_b x$, con $0 < b < 1$, sono convesse in $(0, +\infty)$.

- La funzione x^3 è concava se $x < 0$ e convessa se $x > 0$; il punto 0 è un punto di flesso. La funzione $\operatorname{arctg} x$ è convessa se $x < 0$ e concava se $x > 0$; anche in questo caso il punto 0 è di flesso. La funzione $\sin x$ è concava in $(0, \pi)$ e convessa in $(\pi, 2\pi)$; sia 0 che π sono punti di flesso.

Osservazione 6.7.1 La Proposizione 6.7.1 stabilisce che f è convessa (concava) se e soltanto se le pendenze delle rette tangenti al grafico di f crescono (decrescono) al crescere delle ascisse. Tenendo conto di questa proprietà, la Figura 6.15 cerca di mostrare quale deve essere allora la forma del grafico di f.

Osservazione 6.7.2 La Proposizione 6.7.1 permette una suggestiva interpretazione "rotatoria" della convessità/concavità di una funzione, anche se motivata qui sotto in maniera approssimativa (si veda la Figura 6.16).

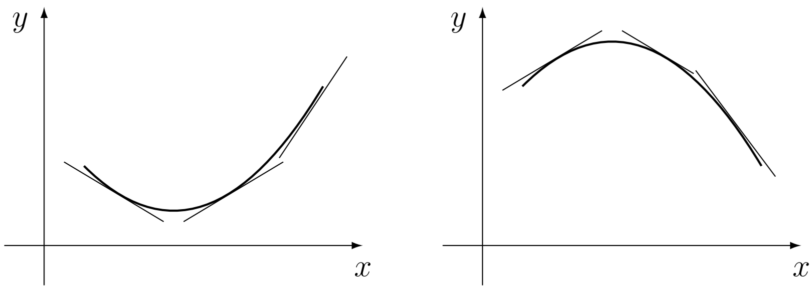

Figura 6.15: Conseguenze sul grafico di f dell'ipotesi di convessità (a sinistra) o concavità (a destra).

Supponiamo che f sia (strettamente) convessa; allora f' è crescente per la Proposizione 6.7.1, cioè le pendenze delle rette tangenti al grafico di f aumentano muovendoci nella direzione delle x crescenti. Percorrendo il grafico da sinistra verso destra stiamo "ruotando" nel piano in senso *antiorario*. Viceversa, se f è concava, quando percorriamo il grafico da sinistra verso destra la "rotazione" avviene in senso *orario*.

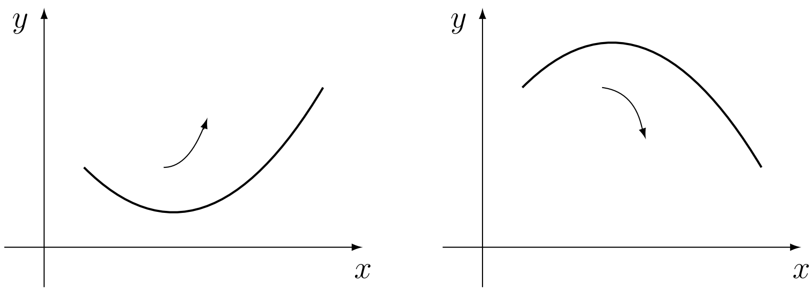

Figura 6.16: Un'interpretazione "rotatoria" della convessità (a sinistra) o concavità (a destra) di una funzione.

Il seguente risultato dà una interpretazione *geometrica* della convessità, si veda la Figura 6.17. Ne omettiamo la dimostrazione.

Teorema 6.7.1 (Convessità per tangenti e corde) *Consideriamo una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Allora le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:*

(i) f è convessa (concava) in (a, b);

(ii) *per ogni* $x_0 \in (a, b)$ *il grafico di* f *sta al di sopra (sotto) della retta tangente al suo grafico nel punto* $\big(x_0, f(x_0)\big)$*;*

(iii) *per ogni coppia di punti* $x_1 < x_2$ *in* (a, b)*, il grafico di* f *sta al di sotto (sopra) del segmento che congiunge i punti* $\big(x_1, f(x_1)\big)$, $\big(x_2, f(x_2)\big)$ *in* $[x_1, x_2]$.

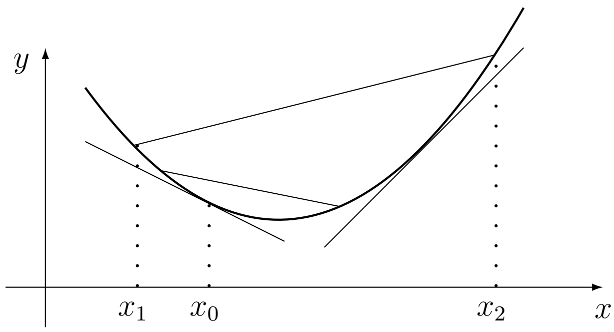

Figura 6.17: Caratterizzazione della convessità tramite le tangenti e le corde.

Nei punti di flesso x_0 la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ passerà dunque *attraverso* il grafico della funzione, si veda la Figura 6.18.

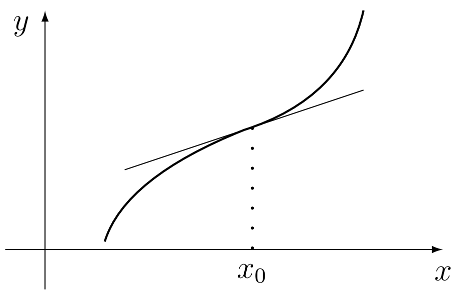

Figura 6.18: La retta tangente in un punto di flesso passa attraverso il grafico.

Questo vale in particolare per la funzione $f(x) = \sin x$ relativamente al punto 0 e alla retta tangente $y = x$. In particolare, il grafico della funzione sin giace *sotto* al grafico della retta $y = x$ se $x > 0$ e *sopra* se $x < 0$. Si veda la Figura 6.19

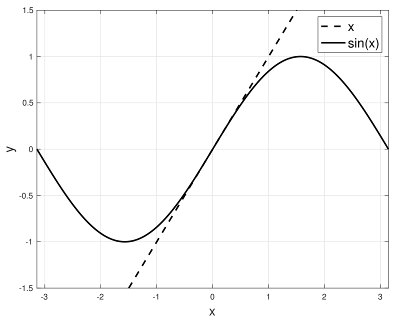

Figura 6.19: Grafici delle funzioni x e $\sin x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Proposizione 6.7.2 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è un punto di flesso allora $f''(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione f, in un intorno di x_0, sia concava a sinistra di x_0 e convessa a destra di x_0; l'altra implicazione si dimostra analogamente. Si segua il ragionamento schematico nella Figura 6.20.

Per la Proposizione 6.7.1 la funzione f' è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra; pertanto essa ha un minimo locale in x_0. Basta dunque applicare il Teorema di Fermat a f'. $\square$

f concava $\qquad\qquad$ f convessa
$f'' \leq 0 \qquad x_0 \qquad f'' \geq 0$
x
$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$
f' decresce $\qquad\qquad$ f' cresce
f' ha un minimo
$\Downarrow$
$f''(x_0) = 0$

Figura 6.20: In un punto di flesso x_0 si ha $f''(x_0) = 0$.

Osservazione 6.7.3 Supponiamo che f sia di classe C^2 in un intorno del punto x_0, strettamente convessa a sinistra e strettamente concava a destra di x_0 (o viceversa). Allora la Proposizione 6.7.2 è conseguenza del Teorema degli zeri delle funzioni continue (applicato a f''). Allo stesso risultato si perviene applicando (a f'') il Teorema della permanenza del segno.

Osservazione 6.7.4 Non è necessariamente vero che se $f''(x_0) = 0$ allora x_0 è punto di flesso: si consideri la funzione x^4 in 0. La situazione è pertanto analoga a quella discussa nel Teorema di Fermat. Concludendo: se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è due volte derivabile e $x_0 \in (a, b)$, allora

$$\begin{aligned} x_0 \text{ punto di estremo locale} \quad &\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad f'(x_0) = 0, \\ x_0 \text{ punto di flesso} \quad &\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad f''(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Esempio 6.7.2

- Sia $f(x) = e^{-x^2}$, si veda la Figura 6.21. Si ha $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1) = 0$ se e soltanto se $x = \pm 1/\sqrt{2}$: dunque questi punti possono essere punti di flesso. Poiché f'' cambia di segno in quei punti, essi lo sono effettivamente.

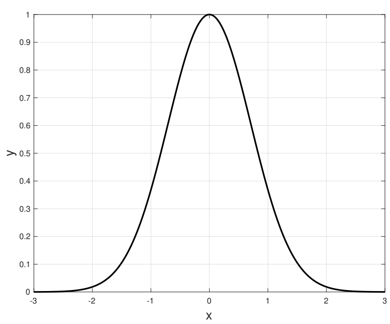

Figura 6.21: Grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$, si veda l'Esempio 6.7.2.

- Sia $f(x) = \sin x$. Si ha $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x = 0$ se e soltanto se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Essi sono punti di flesso poiché f'' cambia di segno in questi punti.

Osservazione 6.7.5 La Definizione 6.7.1 di punto di flesso data qui sopra permette di capire perché nell'Esempio 6.2.1 avevamo chiamato punti di flesso a tangente verticale i punti x_0 in cui $f'_\pm(x_0) = +\infty$ o $f'_\pm(x_0) = -\infty$. Ad esempio la funzione $\sqrt[3]{x}$ è convessa se $x < 0$ e concava se $x > 0$. La funzione $\sqrt{|x|}$ è invece concava sia se $x < 0$ che se $x > 0$.

La concavità (convessità) di una funzione in un punto di massimo (minimo) viene sfruttata nel seguente risultato per ottenere un criterio utile per determinare il tipo di un punto stazionario.

Teorema 6.7.2 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario. Allora*

$$\begin{aligned} f''(x_0) < 0 \quad &\Rightarrow \quad x_0 \text{ punto di massimo locale,} \\ f''(x_0) > 0 \quad &\Rightarrow \quad x_0 \text{ punto di minimo locale.} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio che $f''(x_0) < 0$. Poiché $f'(x_0) = 0$ si ha, per $x \to x_0$,

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \to f''(x_0)\,.$$

Dal Teorema della permanenza del segno segue che $\frac{f'(x)}{x-x_0} < 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Perciò, se x è in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, si ha $f'(x) > 0$ se $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ se $x > x_0$. Dunque, in un intorno di x_0, la funzione f è prima strettamente crescente poi strettamente decrescente per l'Osservazione 6.5.3, e quindi x_0 è un punto di massimo locale. L'altra implicazione si dimostra analogamente. □

Osservazione 6.7.6 Se in un punto stazionario si ha $f''(x_0) = 0$ dal teorema precedente non si può trarre alcuna conclusione: si considerino ad esempio le funzioni x^3, x^4, $-x^4$ per le quali è nulla in 0 sia la derivata prima che la derivata seconda, ma che in 0 hanno, rispettivamente, un punto di flesso, un minimo, un massimo. Inoltre questi esempi mostrano che l'implicazione contraria del Teorema 6.7.2 è in generale falsa.

Esempio 6.7.3 $f(x) = \sin x + \cos x$.

La funzione f è periodica di periodo 2π; la studiamo quindi solo nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ha $f(0) = f(2\pi) = 1$, $f'(x) = \cos x - \sin x$; i punti stazionari sono dunque $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Poiché $f''(x) = -\sin x - \cos x$ si ha che $f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0$, $f''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0$. Dunque $\frac{\pi}{4}$ è punto massimo locale, $\frac{5\pi}{4}$ è punto di minimo locale. Poiché $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} > 1$ e $f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} < -1$ essi sono rispettivamente punti di massimo e minimo assoluti.

Si noti che lo studio dei massimi e dei minimi di f diventa banale osservando che, dalle formule di addizione, $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$. Pertanto $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$.

6.8 Lo studio del grafico di una funzione

I risultati delle sezioni precedenti permettono di eseguire uno studio sufficientemente dettagliato di una funzione e del suo grafico. A titolo di promemoria ricordiamo i punti principali.

- Determinazione del dominio se non è specificato; segno ed eventuali zeri della funzione.
- Limiti in punti significativi ed eventuali asintoti.
- Studio della monotonìa e dei punti stazionari con la derivata prima. Punti di non derivabilità.
- Analisi dei punti stazionari con la derivata seconda; estremi assoluti. Studio di eventuali punti di flesso.

Esempio 6.8.1 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; in tale dominio f è derivabile infinite volte. $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Dunque la retta $x = 1$ è un asintoto verticale e la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale a $\pm\infty$. Si ha che $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$, dunque la funzione è decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Infine $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ e dunque f è concava in $(-\infty, 1)$ e convessa in $(1, +\infty)$. La funzione non ha né massimi né minimi.

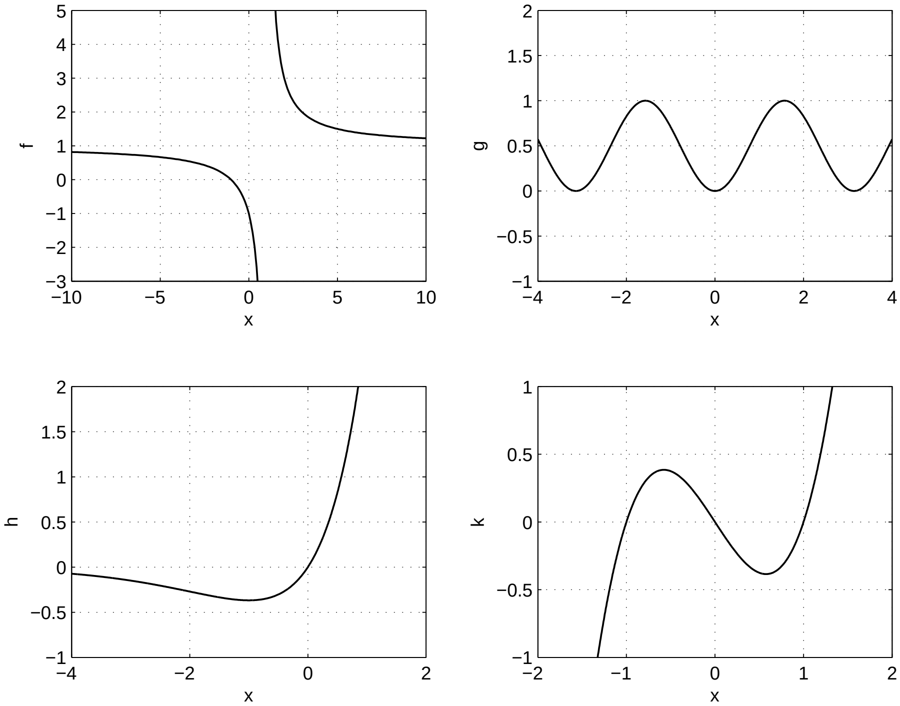

Figura 6.22: Grafici delle funzioni degli Esempi 6.8.1–6.8.4.

Esempio 6.8.2 Studiare la funzione $g(x) = \sin^2 x$.

La funzione g è definita in $\mathbb{R}$, è derivabile infinite volte, pari, ed è π-periodica: $g(x+\pi) = \big(\sin(x+\pi)\big)^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = g(x)$. Si ha che $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$ e dunque $f'(x) = 0$ se $x = k\frac{\pi}{2}$, per $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre $f'(x) \geq 0$, e dunque f è crescente, se e soltanto se $x \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$. Si deduce $f''(x) = 2\cos(2x)$; ne segue che $f''(k\pi) = 2 > 0$ e $f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -2 < 0$. Dunque i punti $k\pi$ sono punti di minimo (assoluto) con minimo 0, mentre i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sono punti di massimo con massimo (assoluto) 1. Inoltre $f''(x) \geq 0$, e dunque f è convessa, se e soltanto se $2x \in [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, ovvero se $x \in [k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}]$. I punti $k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ sono punti di flesso.

Esempio 6.8.3 Studiare la funzione $h(x) = xe^x$.

La funzione h è definita in $\mathbb{R}$, derivabile infinite volte,

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.$$

Pertanto la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$; non vi è asintoto obliquo a $+\infty$ in quanto $\lim_{x\to+\infty} h(x)/x = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Si ha $f'(x) = e^x(x+1)$; dunque $f'(x) = 0$ se e soltanto se $x = -1$. Inoltre $f''(x) = e^x(x+2)$; si ha che $f''(-1) = 1/e > 0$ e dunque il punto -1 è un punto di minimo (assoluto). Inoltre la funzione è convessa se $x > -2$ e concava se $x < -2$; il punto -2 è un punto di flesso.

Esempio 6.8.4 Studiare la funzione $k(x) = x(x^2 - 1)$.

La funzione h è definita in $\mathbb{R}$, derivabile infinite volte, dispari, $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = \pm\infty$. Non vi sono asintoti obliqui a $\pm\infty$ in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} k(x)/x = +\infty$. Si ha $f'(x) = 3x^2 - 1$; dunque $f'(x) = 0$ se e soltanto se $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Inoltre $f''(x) = 6x$, dunque f è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$. Di conseguenza il punto 0 è un punto di flesso e i punti $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sono punti di minimo, risp. massimo, con valori minimo e massimo (relativi) $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, risp. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

6.9 Un'applicazione del calcolo differenziale all'economia

Una semplice ma interessante applicazione delle derivate alla vita quotidiana è la seguente [13]. L'esempio è semplificato al massimo per quanto riguarda l'economia; l'interesse è la sua traduzione in termini matematici.

Il *costo della vita* $c(t)$ è il prezzo medio di una certa quantità di beni (pane, carne, latte, alcuni servizi) rappresentativi del consumatore medio. Esso è una funzione del tempo t.

La *variazione del costo della vita* è l'indice $i(t)$ del costo della vita. Dunque $i(t) = c'(t)$. Se $i(t) > 0$ significa che c'è inflazione, se $i(t) < 0$ c'è deflazione.

Qual è il significato di $c''(t)$? Poiché $c''(t) = i'(t)$, si ha che $c''(t)$ rappresenta la variazione (crescita o decrescita) dell'indice del costo della vita o, più semplicemente, la variazione dell'inflazione (positiva o negativa).

Leggiamo su un giornale la frase

Il tasso a cui l'inflazione si sta acutizzando è decrescente.

Come tradurla in termini matematici? In questa frase, tasso vuol dire variazione. Che l'inflazione si stia acutizzando vuol dire che l'inflazione sta crescendo, cioè $i'(t) = c''(t) > 0$. Tuttavia questa variazione sta diminuendo: dunque $i''(t) = c'''(t) < 0$. Pertanto, in termini di i, la frase qui sopra si traduce: *la funzione i è crescente e concava*, si veda la Figura 6.23.

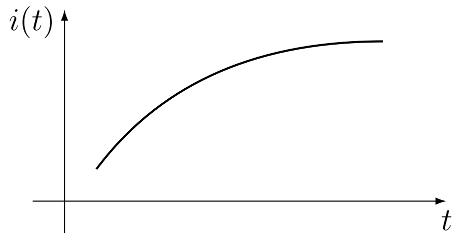

Figura 6.23: Un esempio di una funzione crescente e concava.

6.10 Il teorema di de l'Hospital

In questa sezione ci occupiamo dell'uso del calcolo differenziale per il calcolo di limiti di funzioni che si presentano nelle forme indeterminate $0/0$ o ∞/∞.

Teorema 6.10.1 (de l'Hospital) *Siano* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili con* $g, g' \neq 0$ *in* (a, b). *Supponiamo che* $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ *o* $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$. *Allora per* $l \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,. \tag{6.17}$$

Dimostrazione. Consideriamo per brevità solo il caso in cui

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0. \tag{6.18}$$

Inoltre, per semplicità, diamo una dimostrazione sotto l'ipotesi ulteriore che f e g siano di classe $C^1([a, b))$; in particolare, dunque, sia f e g che f' e g' sono definite anche nell'estremo a dell'intervallo. La continuità di f e g in a e la (6.18) implicano che $f(a) = g(a) = 0$; dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la continuità nel punto a delle funzioni f' e g'. □

Osservazione 6.10.1

- Il teorema precedente si estende anche al caso in cui $a = -\infty$ e ovviamente al caso di limiti per $x \to b-$, con $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$.
- Una interpretazione geometrica del Teorema di de l'Hospital nel caso (6.17) è la seguente: se esiste il limite del quoziente dei coefficienti angolari delle rette tangenti allora esiste il limite del quoziente delle funzioni, e i due limiti coincidono. Si veda la Figura 6.24. Negli altri casi l'interpretazione è analoga.

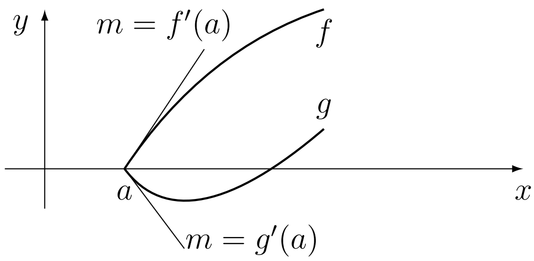

Figura 6.24: Il Teorema di de l'Hospital.

- Occorre tenere ben presenti le ipotesi del Teorema 6.10.1.
  - Il limite del quoziente f/g deve essere nella forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞: ad esempio $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x} = 1$, ma il rapporto delle derivate $\frac{2x}{1}$ tende a 2 per $x \to 1$. Si noti infatti che il $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x}$ non è in una forma indeterminata.
  - Non vale l'implicazione contraria della (6.17): ad esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$, dividendo numeratore e denominatore per x, ma il limite del quoziente delle derivate, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, non esiste.

Negli esempi seguenti, per semplicità di scrittura, partiremo dal limite del quoziente f/g di due funzioni e lo uguaglieremo al limite del quoziente f'/g' delle derivate. Come chiarito nell'osservazione precedente, questa procedura, sebbene semplifichi la presentazione dei calcoli, non è rigorosa: dovremmo infatti *prima* verificare che il limite di f'/g' esiste e *quindi* dedurre il valore del limite di f/g.

Esempio 6.10.1

- Tramite il Teorema di de l'Hospital si possono ridimostrare alcuni limiti notevoli già noti:
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2};$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1;$

– $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$;
– $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.
  Infatti $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$. Conseguenza di questo esempio è che

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \qquad \text{per} \qquad x \to 0,$$

  o anche che

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{per} \qquad x \to 0.$$

- In alcuni casi l'uso del Teorema di de l'Hospital complica il calcolo invece di semplificarlo. Si consideri ad esempio il

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x};$$

  applicando il Teorema di de l'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^2},$$

  che risulta più complicato del limite di partenza. Col cambiamento di variabili $y = 1/x$ si prova invece subito che vale 0.

Esempio 6.10.2 Dimostriamo ora due limiti fondamentali, di cui abbiamo già fatto uso.

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$, per $\alpha > 0$, $a > 1$.
  Se $\alpha = 1$, dal Teorema di de l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{a^x \log a} = 0\,.$$

Se $\alpha \neq 1$ si noti che $a^x = a^{\frac{1}{\alpha}\cdot x\cdot\alpha} = ((a^{\frac{1}{\alpha}})^x)^\alpha$; pertanto, ci si riconduce al caso precedente osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\left(a^{1/\alpha}\right)^x} \right)^\alpha = 0^\alpha = 0\,.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$ per $\alpha > 0$, $b > 1$.

  Segue dall'esempio precedente tramite il cambiamento di variabili $y = \log_b x$; infatti

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(b^\alpha)^y} = 0\,,$$

  o anche applicando direttamente il Teorema di de L'Hospital:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\log b}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log b}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0\,.$$

L'Esempio 6.10.2 dimostra la Proposizione 5.2.1. Tramite la Proposizione 5.1.2 deduciamo che per ogni successione $x_n \to +\infty$ si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^\alpha}{a^{x_n}} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b x_n}{x_n^\alpha} = 0$; scelta $x_n = n$ si dimostra l'Esempio 2.3.8.

Nota 6.10.1 La storia legata al Teorema di de l'Hospital è curiosa. Verso la fine del Seicento, il matematico svizzero Jean Bernoulli aveva conosciuto il marchese de l'Hospital (o de l'Hôpital) e aveva firmato un contratto con lui: Bernoulli, dietro compenso, si impegnava a comunicare al marchese le sue scoperte matematiche, lasciandogli la libertà di farne l'uso che desiderasse. Fu così che il marchese pubblicò un libro di calcolo differenziale nel quale compariva il Teorema 6.10.1, e il suo nome venne attribuito a questo risultato [3, §20.4].

6.11 I polinomi e la formula di Taylor

In questa sezione vogliamo affrontare il seguente problema:

è possibile approssimare una funzione con dei polinomi?

Se questo fosse possibile, potremmo rimpiazzare una funzione f, magari dall'espressione complicata, con un polinomio p, certamente più semplice. D'altro canto, facendo questa sostituzione introdurremmo un errore; come stimare questo errore? Prima di occuparci di queste questioni diamo una definizione

Definizione 6.11.1 *Siano f e g due funzioni definite in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che f è un "o piccolo" di g in un intorno di x_0, in simboli*

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \qquad \text{per } x \to x_0,$$

se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \qquad \text{per } x \to x_0.$$

In altre parole, se g è infinitesima per $x \to x_0$, dire che f è un "o piccolo" di g in un intorno di x_0 è un modo più breve per dire che f è un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$. Il significato del simbolo o è evidentemente quello di ricordare 0.

Esempio 6.11.1

- Per $x \to 0$ si ha che $x^2 = o(x)$, $e^{-\frac{1}{x^2}} = o\left(x^n\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- La scrittura $f = o(1)$ (ovvero $g \equiv 1$) per $x \to x_0$ vuol dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, ovvero che f è infinitesima.
- La scrittura $f = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$ vuol dire che

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 0.$$

  Ciò vuol dire che f è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$ per $x \to x_0$.
- Il simbolo o si comporta bene con l'operazione di moltiplicazione:

  $$f \cdot o(g) = o(f \cdot g). \tag{6.19}$$

Sia infatti $h = o(g)$; allora $\frac{fh}{fg} = \frac{h}{g} \to 0$. In particolare

$$x \cdot o(x^2) = o(x^3), \quad \frac{o(x^3)}{x} = o(x^2).$$

In particolare, se $f = c$, dove c è una costante reale non nulla, allora

$$o(c \cdot g) = c \cdot o(g). \tag{6.20}$$

Il legame tra la nozione di "asintotico" e quella di "o piccolo" è contenuta nel seguente lemma.

Lemma 6.11.1 *Siano f e g due funzioni definite in un intorno del punto x_0. Allora, per $x \to x_0$,*

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big). \tag{6.21}$$

Dimostrazione. Si ha che $f \sim g$ se e soltanto se $\frac{f}{g} \to 1$; dunque $\frac{f}{g} - 1 \to 0$ e ciò è equivalente a $\frac{f-g}{g} \to 0$. □

Esempio 6.11.2 Poiché per $x \to 0$ abbiamo $f(x) = \sin x \sim x = g(x)$ e $f(x) = 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 = g(x)$, ne segue che

$$\sin x = x + o(x), \tag{6.22}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \tag{6.23}$$

in quanto $o(\frac{x^2}{2}) = o(x^2)$.

Ecco una semplice applicazione della notazione o.

Lemma 6.11.2 *Se f è derivabile nel punto x_0, allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{6.24}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$, cioè che

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Questo è vero poiché f è derivabile in x_0. □

Si noti la struttura della formula (6.24) (analoga a (6.21)):

$$\underbrace{f(x)}_{funzione} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{polinomio} + \underbrace{o(x - x_0)}_{errore}.$$

Ecco dunque una prima risposta *positiva* alla domanda che ci siamo posti all'inizio di questa sezione, nel caso in cui il polinomio cercato sia di grado 1: il grafico di tale polinomio non è nient'altro che la retta tangente al grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ e l'errore commesso nell'approssimazione è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$; si veda la Figura 6.25. In questo caso il polinomio p è detto la *linearizzazione di f nel punto x_0*. Si noti che lo stesso procedimento era alla base del Teorema di de l'Hospital.

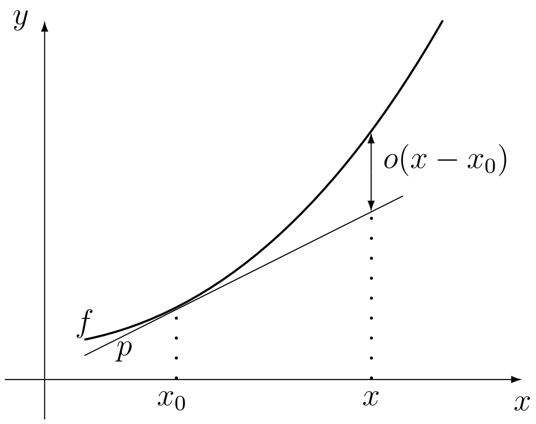

Figura 6.25: Approssimazione di una funzione con un polinomio p di grado 1 e relativo errore.

Consideriamo ora la funzione coseno nell'intorno del punto 0; il Lemma 6.11.1 ci dà

$$\cos x = 1 + o(x).$$

Ma guardiamo la formula (6.23): in questo caso la funzione coseno è approssimata da un polinomio di *secondo* grado, cioè $1 - \frac{1}{2}x^2$, con un errore *quadratico*. Questa approssimazione è certamente migliore di quella lineare, data dal polinomio 1, in un intorno di 0: vicino al punto 0 un errore quadratico è più piccolo di un errore lineare. Si veda la Figura 6.26.

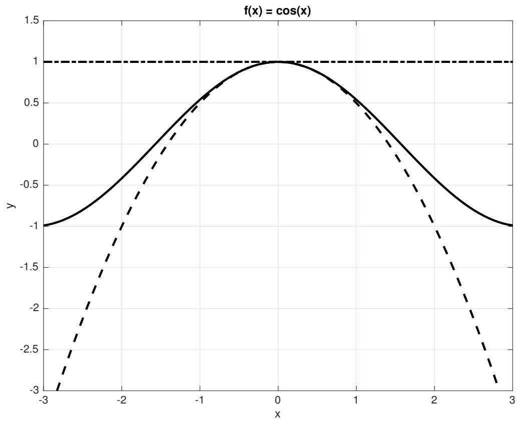

Figura 6.26: Grafici delle funzioni $\cos x$ (linea continua) e delle sue due approssimazioni 1 e $1 - \frac{1}{2}x^2$ (linea tratto-punto e tratteggiata, rispettivamente).

Cerchiamo ora di generalizzare questo esempio. Affinché un polinomio di grado n approssimi "bene" una funzione in un intorno di x_0, è naturale richiedere che le sue derivate fino all'ordine n nel punto x_0 coincidano con quelle della funzione f. E' infatti proprio quello che succede negli esempi (6.22), (6.23) (si veda la Tabella 6.1) e nella formula di linearizzazione (6.24).

	$\sin x$	x
D^0	0	0
D^1	1	1
D^2	0	0
D^3	-1	0

	$\cos x$	$1 - \frac{1}{2}x^2$
D^0	1	1
D^1	0	0
D^2	-1	-1
D^3	0	0

Tabella 6.1: Le funzioni sin, cos e i loro sviluppi asintotici in 0. Le derivate nel punto 0 coincidono fino all'ordine 2 per $\sin x$ e fino all'ordine 3 per $\cos x$.

Si noti che le derivate di ordine maggiore di n di un polinomio di grado n sono tutte nulle.

Lemma 6.11.3 *Sia f una funzione derivabile n volte nel punto x_0. Esiste allora un unico polinomio T_{n,x_0} di grado n tale che $f^{(k)}(x_0) = T^{(k)}_{n,x_0}(x_0)$ per $k = 0, 1, \ldots, n$. Esso è*

$$\begin{aligned} T_{n,x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Dimostrazione. Basta eseguire le derivate di T_{n,x_0} e calcolarle in x_0. Poiché un polinomio è univocamente identificato dai suoi coefficienti, esso è unico. □

Il polinomio T_{n,x_0} è detto *polinomio di Taylor di grado n relativo al punto x_0*. Nel caso $x_0 = 0$ tale polinomio è anche chiamato *polinomio di MacLaurin* e si denota semplicemente con T_n. Pertanto

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{6.26}$$

Si noti la comparsa dei fattoriali; essa è dovuta al fatto che $D^n x^n = n!$, si veda l'Esempio 6.1.8.

Il seguente teorema prova che il polinomio T_{n,x_0} è proprio quello che cercavamo, cioè che approssima la funzione f in un intorno di x_0 con un errore che tende a zero più rapidamente del termine di grado più alto del polinomio (il più piccolo, in un intorno di x_0).

Teorema 6.11.1 (Formula di Taylor con resto di Peano) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \qquad \text{per } x \to x_0. \tag{6.27}$$

La dimostrazione del Teorema 6.11.1 non è difficile [5] e si basa sulla regola di de l'Hospital; per semplicità viene omessa. Si noti però che nel caso $n = 1$ la formula (6.27) coincide con (6.24). La formula (6.27) è detta *formula di Taylor di ordine n con resto di Peano.*

Il Teorema 6.11.1 fornisce la risposta, affermativa, alla domanda che ci eravamo posti all'inizio di questa sezione: dato un punto, ogni funzione abbastanza regolare (di classe C^n) può essere approssimata da un polinomio (unico, il polinomio di Taylor di grado n centrato in quel punto) nell'intorno di quel punto; abbiamo anche una valutazione dell'errore commesso nell'approssimazione (è $o(x^n)$).

Esempio 6.11.3 In questo esempio calcoliamo alcuni polinomi di McLaurin.

- Sia $f(x) = e^x$. Poiché $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha che

$$e^x = T_n(x)+o(x^n) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \quad (6.28)$$

- Sia $f(x) = \sin x$. Si calcola che

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

  e per le derivate successive si ritrova

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \ldots.$$

  Pertanto le derivate di ordine pari $2k$ della funzione sin nel punto 0 sono nulle, mentre quelle di ordine dispari $2k+1$ valgono alternativamente 1 e -1:

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

  Pertanto il polinomio di MacLaurin della funzione seno (dispari) ha solo termini dispari:

$$\begin{aligned}\sin x &= T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).\end{aligned} \quad (6.29)$$

  Si veda la Figura 6.27.

- Analogamente, per la funzione $f(x) = \cos x$ (pari) si trova che il polinomio di MacLaurin ha solo termini pari:

$$\cos x = T_{2n}(x)+o(x^{2n}) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}).$$

  Questo sviluppo e quello precedente della funzione sin spiegano il diverso numero di derivate coincidenti della Tabella 6.1.

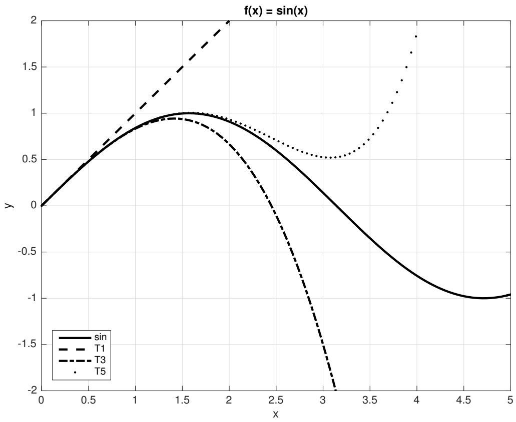

Figura 6.27: Grafici della funzione seno e di alcuni polinomi di MacLaurin.

- Nel caso di $f(x) = \log(1 + x)$ si trova con calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= T_n(x) + o(x^n)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).\end{aligned}$$

- Infine, nel caso di $f(x) = (1 + x)^\alpha$ si trova:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= T_n(x) + o(x^n)\\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots\\ &\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

Esempio 6.11.4 Per gli sviluppi di Taylor vale una proprietà analoga a quella già incontrata per gli asintotici, si veda l'Esempio 5.2.4.

Ad esempio,

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3), \\ \cos(x^3) &= 1 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{24} + o(x^{12}), \\ \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n), \\ \log(1-x^2) &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned} \tag{6.30}$$

In questi sviluppi abbiamo sistematicamente usato il fatto che $o(cx^n) = o(x^n)$, dove c è una qualsiasi costante reale non nulla, si veda (6.20).

Esempio 6.11.5 Calcoliamo ora il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto 1 della funzione $f(x) = x^2 \log x$. Si ha che

$$f'(x) = 2x \log x + x, \quad f''(x) = 3 + 2\log x.$$

Dunque $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 3$. Perciò

$$T_{2,1}(x) = x - 1 + \frac{3}{2!}(x-1)^2 = x - 1 + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Nella formula (6.27) non viene data, per un fissato x in un intorno di x_0, una precisa stima dell'errore commesso: si sa solo che l'errore va a zero più rapidamente di $(x - x_0)^n$ quando x tende a x_0. Tale stima è data dal seguente risultato.

Teorema 6.11.2 (Formula di Taylor con resto di Lagrange) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n+1$ volte in $[a, b]$ e siano $x_0, x \in [a, b]$. Allora esiste un punto c, compreso tra x_0 e x, tale che*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{6.31}$$

Anche in questo caso non diamo la dimostrazione: si veda [5]. Si noti che nel caso $n = 1$ il teorema precedente coincide con il Teorema del valor medio di Lagrange. Si noti anche che le ipotesi del Teorema 6.11.2 sono leggermente più forti di quelle del Teorema 6.11.1 proprio per permettere l'espressione del resto. La formula (6.31) è detta *formula di Taylor di ordine n con resto di Lagrange.*

Esempio 6.11.6 Cerchiamo una approssimazione di $\sqrt{e}$ tramite le formule (6.28) e (6.31). Poiché $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, prendiamo $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e, ad esempio, $n = 3$; esiste allora $c \in (0, \frac{1}{2})$ tale che

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{e^c}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Da (6.28) si ha che

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48}.$$

Inoltre, poiché $0 < c < \frac{1}{2}$, si ha che $e^c < e^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; dunque

$$\frac{e^c}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 < \frac{\sqrt{3}}{2^4 4!} \sim 0.0045.$$

Pertanto si può approssimare $\sqrt{e}$ con $\frac{79}{48}$ commettendo un errore minore di 0.0045.

I polinomi di Taylor possono essere utilizzati nel calcolo dei limiti, come facciamo vedere nei seguenti esempi. Si noti che il polinomio di Taylor del prodotto di due funzioni f, g è il prodotto dei polinomi di Taylor di f e g. Infatti se $f(x) = T_{n,x_0}(x) + o(x - x_0)^n$ e $g(x) = S_{n,x_0}(x) + o(x - x_0)^n$, allora, per (6.19),

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(T_{n,x_0}(x) + o(x - x_0)^n\big)\big(S_{n,x_0}(x) + o(x - x_0)^n\big) \\ &= T_{n,x_0}(x)S_{n,x_0}(x) + o(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Esempio 6.11.7

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{6}.$
  Sappiamo che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ ma non possiamo utilizzare questo asintotico a numeratore: il risultato sarebbe 0. Tuttavia da (6.29) sappiamo anche che

  $$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

per $x \to 0$ e dunque, per il Lemma 6.11.1, che $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$. Sostituendo *questo* asintotico (più preciso) a numeratore e l'asintotico $\sin x \sim x$ a denominatore si trova

$$\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Si noti che allo stesso risultato si poteva giungere applicando il Teorema di de l'Hospital.

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + \log(1 - x^2)}{x^2(2x + x^2)^2} = -\frac{1}{6}.$

  Sappiamo che $\sin x \sim x$ e $\log(1 - x^2) \sim -x^2$ per $x \to 0$ ma, come sopra, non possiamo sostituire questi asintotici a numeratore: sarebbe 0. Tuttavia sappiamo che $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$ (si veda l'esercizio precedente) e $\log(1 - x^2) \sim -x^2 - \frac{x^4}{2}$ (da (6.30) e dal Lemma 6.11.1). Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{x \sin x + \log(1 - x^2)}{x^2(2x + x^2)^2} &\sim \frac{x\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(-x^2 - \frac{x^4}{2}\right)}{4x^4} \\ &= \frac{-\frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{2}}{4x^4} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Capitolo 7

Calcolo integrale

In questo capitolo si introduce il calcolo integrale per funzioni di una variabile reale a valori reali.

7.1 L'integrale

Il problema che si affronta in questo capitolo è il calcolo di aree di regioni piane. Più precisamente: *data una funzione positiva, come calcolare l'area della regione piana $\mathcal{R}$ compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse?* La soluzione di questo problema si basa su un processo di approssimazione.

In poche parole, si approssima la regione in questione con l'unione di un numero finito n di rettangoli; di questi è facile calcolare l'area. Se i rettangoli sono ben distribuiti in $\mathcal{R}$, possiamo approssimare l'area di $\mathcal{R}$ con la *somma* delle aree dei rettangoli. Il limite per $n \to \infty$, se esiste, potrebbe essere la *definizione* della misura della regione.

Procediamo ora con più precisione. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali di lunghezza $\frac{b-a}{n} = h$ e siano $x_i = a + ih$, per $j = 0, 1, \ldots, n$ gli estremi dei sottointervalli così determinati, con $x_0 = a$ e $x_n = b$; si veda la Figura 7.1.

Siano infine $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1, 2, \ldots, n$, dei punti scelti *arbitrariamente.* L'area del generico rettangolo di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $f(c_i)$ è $(x_i - x_{i-1}) f(c_i) = \frac{b-a}{n} f(c_i)$. Si consideri quindi l'unione dei rettangoli di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $f(c_i)$; l'area di questa regione

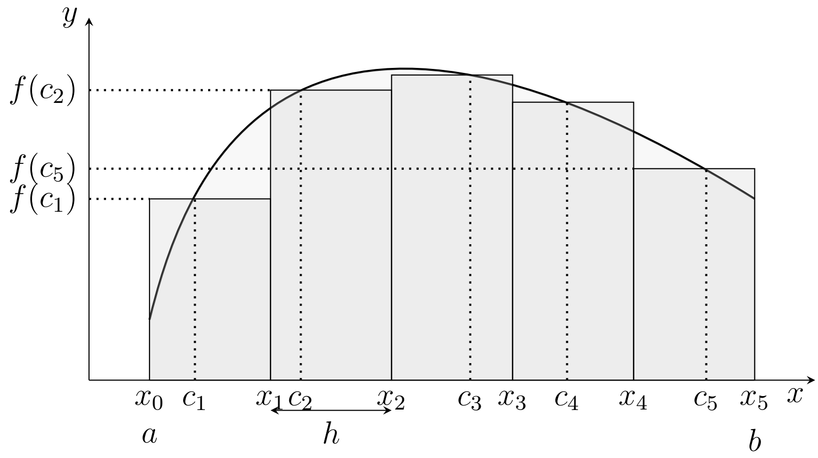

Figura 7.1: Costruzione dell'integrale. Qui $N = 5$.

di piano è dunque

$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,. \tag{7.1}$$

La quantità S_n è detta n-esima *somma di Riemann* della funzione f; essa dipende evidentemente dalla scelta dei punti c_j, oltre che da f, n e dall'intervallo $[a, b]$. In maniera intuitiva, se esiste il $\lim_{n\to\infty} S_n$ esso potrà essere preso come *definizione* dell'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse. Il seguente teorema, di cui si omette la dimostrazione (si veda [5]), stabilisce che ciò accade, e dunque che questa costruzione ha senso, se f è *continua.*

Teorema 7.1.1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste finito il* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *e tale limite non dipende dalla scelta dei punti c_i.*

Il risultato precedente permette la seguente importante definizione.

Definizione 7.1.1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e S_n definita da* (7.1)*. L'*integrale di f su $[a, b]$ *è*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n\,.$$

Osservazione 7.1.1

(i) Il simbolo di integrale è una lettera "esse" stilizzata e il simbolo completo ricorda la costruzione fatta: si sono sommate le aree di rettangoli di opportuna altezza ("$f(x) \sim f(c_i)$") e base ("$dx = x_i - x_{i-1}$"). La notazione è dunque analoga alla $\frac{df}{dx}$ usata per la derivata. Il termine *integrale* deriva dalla procedura usata in passato per calcolare aree di figure complicate: si cercava di decomporre queste figure in pezzi semplici e quindi di ricomporre (integrare, rendere intera) la figura.

(ii) La lettera x rappresenta una "variabile muta", cioè $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$, analogamente a quanto visto per l'indice di sommazione nelle sommatorie.

(iii) Se la funzione f è positiva allora l'integrale di f su $[a,b]$ viene preso come *definizione* dell'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse. Si ricordi anche che la retta tangente al grafico di una funzione è stata *definita* tramite una costruzione analitica. Il procedimento impiegato sopra ha perfettamente senso anche se f non è positiva; in tal caso però le aree di regioni in cui f è negativa verranno calcolate negativamente.

Esempio 7.1.1

- Sia f una funzione continua in $[-a,a]$; se f è dispari allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, se f è pari allora $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Per provarlo, consideriamo ad esempio il caso in cui f è dispari. Nella costruzione dell'integrale possiamo scegliere i punti c_i in maniera simmetrica rispetto all'origine: se scegliamo c_i allora scegliamo anche $-c_i$. In tal modo le relative somme di Riemann sono tutte nulle e dunque pure il loro limite. Poiché f è continua, il Teorema 7.1.1 garantisce che l'integrale esiste e, poiché non dipende dalla scelta dei punti c_i, esso è nullo.

  In particolare $\int_{-1}^1 x^3\,dx = 0$.

- Per simmetria $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$. Infatti, ragionando come sopra, basta scegliere punti $c_i \in [0,\pi]$ e $c_i + \pi \in [\pi, 2\pi]$.

Esempio 7.1.2 Se $f(x) = c \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in [a,b]$, allora $S_n = c \cdot (b-a)$ per ogni n e dunque $\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a)$.

Esempio 7.1.3 (Funzione di Dirichlet) Nel Teorema 7.1.1 l'ipotesi di continuità fatta su f è fondamentale. Si consideri infatti la *funzione di Dirichlet* definita in $[0,1]$ da

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\,, \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]\,. \end{cases}$$

In altre parole la funzione d vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali; si può dimostrare che la funzione d è discontinua in ogni punto. Per questa funzione non si può definire l'integrale di Riemann. Possiamo infatti costruire una successione di somme di Riemann $\{S_n^{(1)}\}$ scegliendo sempre i punti c_i razionali e di conseguenza $S_n^{(1)} = 1$ per ogni n; ma possiamo anche costruirne un'altra, $\{S_n^{(2)}\}$, in cui i punti c_i sono sempre irrazionali, e allora $\{S_n^{(2)}\} = 0$ per ogni n. Pertanto il limite che dovrebbe definire l'integrale verrebbe a dipendere dalla scelta dei punti in cui è valutata la funzione. In maniera alternativa, sempre per dimostrare che d non è integrabile secondo Riemann, possiamo costruire una successione di somme di Riemann $\{S_n\}$ in cui i punti c_i sono razionali per n pari e irrazionali per n dispari; in tal caso il limite della successione $\{S_n\}$ non esiste.

7.2 Proprietà dell'integrale

Nel seguente teorema raccogliamo le proprietà fondamentali dell'integrale; esse sono conseguenze immediate della definizione, e la dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 7.2.1 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Allora*

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx, \tag{7.2}$$

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

$$f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \quad c \in [a, b]\,. \tag{7.4}$$

Osservazione 7.2.1 Le prime due formule qui sopra esprimono la *linearità* dell'integrale. La terza è la proprietà di *monotonìa*; in particolare, se f è positiva allora anche $\int_a^b f(x)\, dx$ è positivo. Inoltre da $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ si deduce

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Questa proprietà è evidente dal punto di vista geometrico: se la funzione f cambia di segno, allora i contributi delle aree rispettive si sottraggono.

La quarta proprietà è la proprietà di *additività rispetto all'intervallo di integrazione.*

Il simbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ è stato definito nella Definizione 7.1.1 per $a < b$; lo estendiamo ora ad ogni coppia di numeri reali a e b. Infatti se $a < b$ *definiamo*

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Intuitivamente, possiamo pensare che nell'integrale $\int_b^a f(x)\, dx$, con $a < b$, le ascisse siano misurate da b ad a (nel senso che le basi dei rettangoli approssimanti "hanno misura" $x_{i-1} - x_i = -(b-a)/n$). Infine definiamo $\int_a^a f(x)\, dx = 0$. Si noti che allora l'identità (7.4) vale comunque siano scelti a, b, c.

Teorema 7.2.2 (Media integrale) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,. \tag{7.5}$$

Dimostrazione. Dal Teorema di Weierstrass segue che la funzione f ha massimo M e minimo m in $[a,b]$. Dunque $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b]$ e dalla monotonìa dell'integrale si ha che

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx\,.$$

Dall'Esempio 7.1.2 si ha che $\int_a^b m\,dx = (b-a)m$ e $\int_a^b M\,dx = (b-a)M$, quindi

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\,.$$

Per il Teorema dei valori intermedi il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, essendo compreso tra il minimo e il massimo di f, è assunto da f in qualche punto c. Si veda la Figura 7.2.

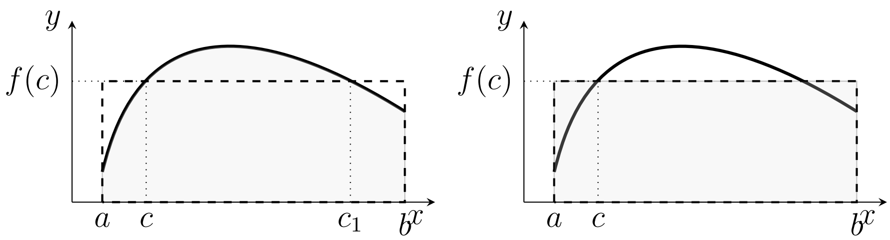

Figura 7.2: Il teorema della media integrale: l'area del rettangolo che ha per base l'intervallo $[a,b]$ e altezza $f(c)$ coincide con $\int_a^b f(x)\,dx$, ovvero con l'area compresa tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x=a$, $x=b$. Si noti che, nel disegno, la scelta del punto c non è unica: anche il punto c_1 va bene.

$\square$

La formula (7.5) si può chiaramente scrivere come

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)\,.$$

Il termine di destra può essere interpretato come l'area di un rettangolo di base $[a,b]$ e altezza $f(c)$. Pertanto, in altre parole, il Teorema della media integrale stabilisce che esiste un punto c ed una relativa altezza $f(c)$ tali che l'area sottesa dal grafico della funzione, relativamente all'intervallo $[a,b]$, è uguale a quella di un rettangolo avente la stessa base $[a,b]$ ed altezza $f(c)$. In altre parole, abbiamo "quadrato" l'area, cioè resa intera nel senso dell'Osservazione 7.1.1 *(i)*.

La quantità $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è detta la *media integrale* di f nell'intervallo $[a,b]$; essa corrisponde dunque all'*altezza* di un rettangolo di base $[a,b]$ avente area uguale all'integrale di f. In generale il punto c non è unico: ad esempio, $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$ e possiamo scegliere $c=0$, $c=\pi$ o $c=2\pi$. Esso è unico se f è strettamente monotòna, come si può facilmente dimostrare interpretando l'integrale in termini di area.

7.3 Il primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Ci occorre ora un metodo per poter calcolare l'integrale di una funzione senza fare riferimento alla costruzione che precede il Teorema 7.1.1.

Definizione 7.3.1 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione; una funzione derivabile $F : I \to \mathbb{R}$ è detta una* primitiva *di f se $F' = f$ in I.*

Esempio 7.3.1 Primitive delle funzioni 1, x, x^2, $\sin x$, e^x sono rispettivamente x, $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$, $-\cos x$, e^x. Si noti tuttavia che primitive della funzione 1 sono anche tutte le funzioni $x + C$, per $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria; lo stesso vale anche negli altri casi. Questo spiega perché nella Definizione 7.3.1 abbiamo chiamato F *una* primitiva di f e non *la* primitiva di f.

L'operazione di prendere la primitiva di una funzione è dunque "inversa" a quella di derivare; schematicamente:

$$F \xrightarrow{D} f \xrightarrow{D} f' .$$

Si noti la posizione centrale di f: sia la primitiva (e questo ne giustifica il nome) che la derivata sono definite in riferimento ad f.

Proposizione 7.3.1 (Primitive) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora:*

(i) se F è una primitiva di f allora anche $F + C$ è una primitiva di f, per $C \in \mathbb{R}$;

(ii) se F e G sono due primitive di f allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $G = F + C$.

Dimostrazione. Il punto *(i)* è immediato: $(F + C)' = F' = f$ in quanto la derivata di una funzione costante è nulla, Corollario 6.5.1. Il punto *(ii)* segue dal Corollario (6.5.2), in quanto $G'(x) = f(x) = F'(x)$; perciò $(G-F)' = 0$ e dunque $G-F = C$ per qualche costante C. □

Osservazione 7.3.1

- Il risultato precedente si può rifrasare dicendo che, se F è una primitiva di $f : I \to \mathbb{R}$, allora le primitive di f sono *tutte e sole* le funzioni $F + C$, per $C \in \mathbb{R}$. Infatti, $F + C$ è certamente primitiva per il punto *(i)*. Se G è un'altra primitiva di f allora $G = F+C$ per una qualche costante C, per il punto *(ii)*. In altri termini, due primitive differiscono sempre per una costante.

- I grafici delle primitive di una funzione f, definita in un intervallo, sono ottenuti l'uno dall'altro per traslazione verticale. Si veda la Figura 7.3.

- Il punto *(ii)* della proposizione precedente non è più necessariamente vero se l'insieme di definizione di f non è un intervallo. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = 1$ definita in

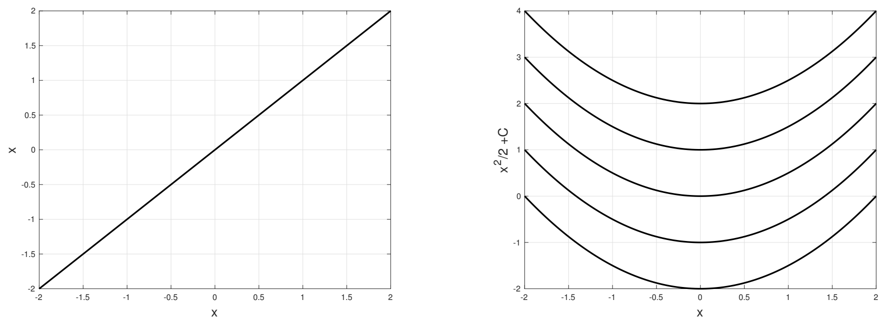

Figura 7.3: A sinistra la funzione $f(x) = x$ e, a destra, alcune delle sue primitive $\frac{x^2}{2} + C$, per $C = -2, -1, 0, 1, 2$.

$[0, 1] \cup [2, 3]$; allora per ogni $c, d \in \mathbb{R}$ la funzione

$$F_{c,d}(x) = \begin{cases} x + c & \text{se } x \in [0, 1], \\ x + d & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

è una primitiva di f. Tuttavia la differenza delle due primitive

$$F_{c,d}(x) - F_{0,0}(x) = \begin{cases} c & \text{se } x \in [0, 1], \\ d & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

non è costante se $c \neq d$. Si veda la Figura 7.4.

Il risultato che segue ci permetterà di calcolare gli integrali senza far ricorso esplicito alla procedura che precede il Teorema 7.1.1.

Teorema 7.3.1 (Primo teorema fondamentale del calcolo integrale) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e F una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,. \tag{7.6}$$

Osservazione 7.3.2 Si noti che la formula (7.6) non dipende dalla particolare primitiva scelta: se infatti G è un'altra primitiva di f, allora $G = F + C$ per la Proposizione 7.3.1 e

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)\,.$$

E' di uso comune la notazione $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

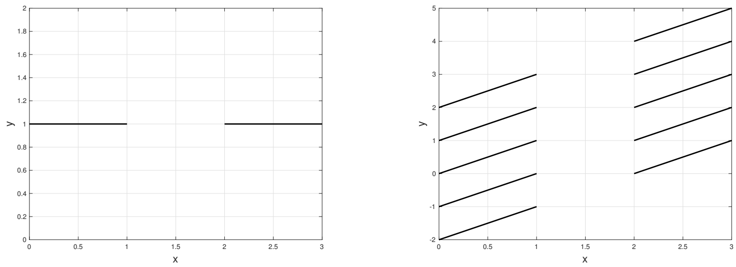

Figura 7.4: A sinistra la funzione $f(x) = 1$ definita in $[0,1] \cup [2,3]$ e, a destra, alcune delle sue primitive. Più precisamente, ogni funzione rappresentata a destra, il cui grafico sia formato da un qualsiasi tratto nell'intervallo $[0,1]$ e da un qualsiasi tratto nell'intervallo $[2,3]$, è primitiva di f.

Dimostrazione del Teorema 7.3.1. Consideriamo una partizione dell'intervallo $[a,b]$ in n intervalli uguali, aventi per estremi

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b.$$

Sottraendo e sommando i termini $F(x_{n-1})$, $F(x_{n-2})$, ..., $F(x_1)$ si ha

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - \dots \\ &\quad \dots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) . \end{aligned}$$

La funzione F è derivabile in $[a,b]$ per definizione; inoltre F' è continua, in quanto coincide con f, che lo è per ipotesi. Possiamo dunque applicare il teorema di Lagrange alla funzione F, relativamente agli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$: esistono punti $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tali che

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F'(c_i) = \frac{b-a}{n} f(c_i) ,$$

dove abbiamo usato la relazione $F' = f$. In conclusione abbiamo provato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$F(b) - F(a) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) .$$

Si noti che la somma di destra è una somma di Riemann di f. Passiamo al limite per $n \to \infty$ nell'uguaglianza qui sopra: il primo membro non dipende da n, e dunque resta immutato, mentre il secondo, poiché f è continua, tende a $\int_a^b f(x)\,dx$ per il Teorema 7.1.1. □

Esempio 7.3.2

- Dal teorema precedente si trova subito che

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

  Geometricamente, l'area compresa tra la funzione seno e l'asse delle x, per $x \in [0,\pi]$, vale 2.

- Analogamente $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$: l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e l'asse x, per $x \in [0,1]$, è $\frac{1}{3}$. Si veda [9] per una dimostrazione elementare di questo risultato, calcolando l'integrale tramite le somme di Riemann. Questo risultato era già noto ad Archimede.

  In questo caso il Teorema della media integrale stabilisce che deve esistere un punto $c \in [0,1]$ tale che $\int_0^1 x^2\,dx = c^2$; se ne deduce che $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Osservazione 7.3.3 Supponiamo che F sia di classe C^1 in $[a,b]$. La formula (7.6) può essere scritta come

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx.$$

In parole: la variazione di una funzione (cioè $F(b)-F(a)$) è l'integrale del suo tasso di variazione (ovvero $F'(x)$).

7.4 Il calcolo delle primitive

Con il Teorema 7.3.1 abbiamo ricondotto il problema del calcolo di un integrale a quello di una primitiva della funzione integranda. La tabella di derivate riportata nell'Appendice A.6 ci dà, se letta da destra verso sinistra, una tabella di primitive delle funzioni elementari; per comodità, nell'Appendice A.8 riportiamo in una tabella la f a sinistra.

Indicheremo nel seguito con

$$\int f(x)\,dx \tag{7.7}$$

l'insieme di *tutte* le primitive di f. Si ricordi che, se f è definita in un intervallo, allora $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, dove F è una qualsiasi primitiva e C varia in $\mathbb{R}$. Con queste notazioni possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \quad \text{e} \quad \int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + C.$$

Osservazione 7.4.1 Non si confondano:

- $\int_a^b f(x)\,dx$, che è un valore numerico, detto anche *integrale definito*;
- $\int f(x)\,dx$, che rappresenta l'insieme di tutte le primitive, detto anche *integrale indefinito*.

Si noti che, anche se un po' imprecisamente, possiamo esprimere il legame tra f e una sua primitiva F tramite l'espressione

$$F \underset{\int}{\overset{D}{\rightleftarrows}} f$$

e possiamo riscrivere la (7.6) come

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b. \tag{7.8}$$

Il termine $\int f(x)\,dx$ rappresenta infatti un *insieme* di primitive, ma la differenza $F(b) - F(a)$ *non* dipende dalla primitiva F scelta.

Dalle proprietà di linearità (7.2) e (7.3) segue che per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx\,. \tag{7.9}$$

La proprietà di linearità (7.9) ci permette di risolvere alcuni semplici integrali.

Osservazione 7.4.2 Nei calcoli seguenti comparirà sistematicamente una costante di integrazione C; ometteremo di specificare volta per volta che C è arbitraria e varia in $\mathbb{R}$. In realtà alcune funzioni che integreremo non saranno definite su intervalli; in tali casi l'insieme delle primitive dipende da tante costanti quanti sono gli intervalli in cui queste funzioni sono definite, si veda l'Osservazione 7.3.1. Per semplicità, anche in questi casi indicheremo l'insieme delle primitive come $F + C$, dove F è una generica primitiva.

Esempio 7.4.1

- $\displaystyle\int (x^2 + 3x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$

- Alcune frazioni possono essere integrate facilmente sommando e sottraendo una costante al numeratore:
  $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \log|x+1| + C.$

- Siano f e g due funzioni definite nell'intervallo $[a, b]$ e supponiamo $f(x) \geq g(x)$. L'area della regione di piano A compresa tra i grafici di f e g e l'asse x si può calcolare per differenza: essa è l'area $\int_a^b f(x)\, dx$ sottesa al grafico di f *meno* quella sottesa al grafico di g, cioè $\int_a^b g(x)\, dx$. Dunque

  $$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\; dx\,.$$

  Si noti che $A \geq 0$ (qualunque sia il segno di f e g, in particolare se, ad esempio, $0 \geq f(x) \geq g(x)$) in quanto $f(x) - g(x) \geq 0$; in altre parole, A rappresenta proprio l'area geometrica.

  In particolare, se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$ in $[0, 1]$ allora l'area della regione compresa tra i due grafici è (si veda la Figura 7.6)

  $$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\; dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

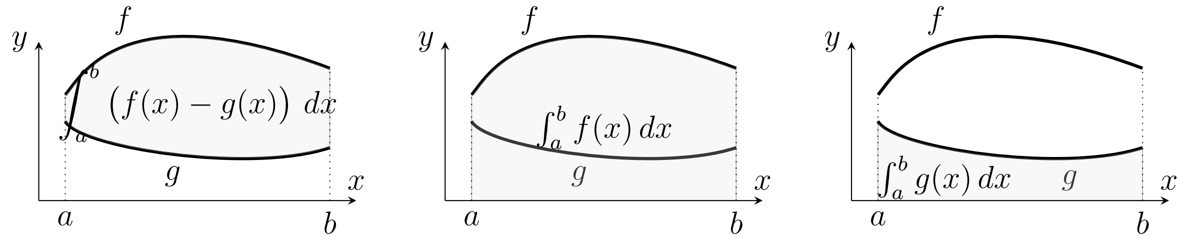

Figura 7.5: Sinistra: l'area della regione di piano compresa tra i grafici di due funzioni f e g e le rette $x = a$, $x = b$. Essa è ottenuta per differenza dalle aree sottese dai grafici di f e g (al centro e a destra).

Ricordando l'Esempio 7.3.2 si deduce che ciascuna delle tre regioni in cui il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ è suddiviso dai grafici delle funzioni $\sqrt{x}$ e x^2 vale $\frac{1}{3}$.

Si noti tuttavia che questo poteva essere dedotto direttamente dall'Esempio 7.3.2: poiché l'area della regione sottesa dalla parabola vale $1/3$, per simmetria lo stesso valore deve avere l'area della regione compresa tra la retta $y = 1$ e la funzione inversa $\sqrt{x}$. L'area della regione compresa tra i grafici delle due funzioni segue allora per differenza da quella del quadrato.

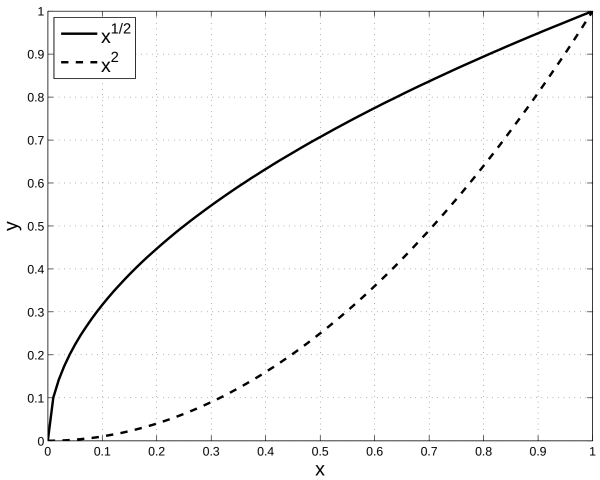

Figura 7.6: Grafici delle funzioni $\sqrt{x}$ e x^2.

Queste semplici tecniche hanno una portata molto limitata. Diversamente dal calcolo delle derivate, che per le funzioni elementari e le loro composte si riduce all'applicazione di poche e semplici regole, il calcolo delle primitive richiede l'apprendimento di varie procedure. Vediamo nelle due sezioni seguenti due metodi importanti e di largo uso.

7.4.1 L'integrazione per parti

La formula di integrazione per parti è conseguenza della formula di derivazione di un prodotto di funzioni. Infatti se f e g sono due funzioni di classe C^1 in un intervallo I allora

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Dunque fg è primitiva di $f'g + fg'$, cioè

$$f(x)g(x) = \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\, dx.$$

Si arriva così alla *formula di integrazione per parti* per l'integrale indefinito:

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx\,. \tag{7.10}$$

Per l'integrale definito basta ricordare il Teorema 7.3.1: poiché $F = fg$ è una primitiva di $f'g + fg'$ si deduce che

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\, dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

e dunque, per la linearità dell'integrale,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx\,. \tag{7.11}$$

Nelle notazioni di sopra il termine f è detto talvolta *fattore finito* mentre g' *fattore differenziale.* L'integrazione per parti si applica dunque quando la funzione integranda appare sotto forma di prodotto; in generale si sceglierà di identificare con f quel fattore che con la derivazione diventa più semplice (ad esempio x^n, che derivato diventa nx^{n-1} e cala di grado).

Esempio 7.4.2

- $\displaystyle\int x \sin x \, dx$.

  Applichiamo la formula (7.10) con $f(x) = x$ e $g'(x) = \sin x$, ovvero $g(x) = -\cos x$. Si ha

  $$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C\,.$$

  Notiamo che la scelta $f(x) = \sin x$, $g'(x) = x$ avrebbe complicato il calcolo invece di semplificarlo:

  $$\int x \sin x \, dx = \sin x \frac{x^2}{2} - \int \cos x \frac{x^2}{2} \, dx\,.$$

- $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$.

  In questo caso la scelta di f o g è indifferente, ma applicando due volte la formula (7.10) si ritrova l'integrale di partenza cambiato di segno, che permette di concludere. Poniamo infatti $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = e^x$; dunque

  $$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx\,.$$

  Applichiamo di nuovo la formula all'integrale di destra con $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^x$; l'uguaglianza di sopra diventa allora

  $$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right)\,.$$

  Portando gli integrali a primo membro, si ottiene

  $$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C\,.$$

- $\displaystyle\int \log x \, dx$.

In questo caso applichiamo la formula con

$$f(x) = \log x \quad \text{e} \quad g'(x) = 1,$$

e otteniamo

$$\begin{aligned}\int \log x\, dx = \int \log x \cdot 1\, dx &= x \log x - \int x \frac{1}{x}\, dx \\ &= x\,(\log x - 1) + C\,.\end{aligned}$$

In particolare possiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \log x\, dx = \big[x\,(\log x - 1)\big]_1^e = 1\,.$$

- $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx.$

  Applichiamo la formula (7.11) di integrazione per parti relativa all'integrale definito, prendendo $f(x) = \log x$ come fattore finito e $\frac{1}{\sqrt{x}}$ come fattore integrante. Dunque

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx &= 2\left[\sqrt{x}\log x\right]_1^e - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{e} - 4\left[\sqrt{x}\right]_1^e \\ &= 4 - 2\sqrt{e}\,.\end{aligned}$$

Esempio 7.4.3 Proviamo che

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 x\, dx &= \frac{\sinh x \cosh x - x}{2} + C\,, \\ \int \cosh^2 x\, dx &= \frac{\sinh x \cosh x + x}{2} + C\,.\end{aligned}$$

Abbiamo vari metodi a disposizione.

(i) Entrambi gli integrali possono essere calcolati decomponendoli in somme; infatti, ad esempio,

$$\sinh^2 x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\,. \tag{7.12}$$

(ii) Un secondo procedimento consiste nell'osservare (si veda (7.12)) che $\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$.

(iii) Un terzo procedimento è il seguente, ricordando la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Nel primo caso, integrando per parti si trova

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 x\, dx & \\ &= \int \sinh x \sinh x\, dx = \cosh x \sinh x - \int \cosh^2 x\, dx \\ &= \cosh x \sinh x - \int \Big(1 + \sinh^2 x\Big)\, dx\,.\end{aligned}$$

Basta ora portare l'integrale di destra a primo membro. Il secondo integrale è dedotto dal primo tramite la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

In modo analogo si calcolano gli integrali $\int \sin^2 x\, dx$ e $\int \cos^2 x\, dx$; essi verranno considerati, assieme agli integrali di altre funzioni trigonometriche, nella Sezione 7.5.2.

7.4.2 L'integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione è dedotta dalla formula di derivazione delle funzioni composte. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, F una sua primitiva, $\phi : [c,d] \to [a,b]$ una funzione invertibile di classe C^1 in $[c,d]$; schematicamente

$$\begin{array}{ccccc} [c,d] & \xrightarrow{\phi} & [a,b] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \phi(t) & & \\ & & x & \mapsto & f(x)\,. \end{array}$$

Dal teorema di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\frac{d}{dt}\Big(F\left(\phi(t)\right)\Big) = F'\left(\phi(t)\right)\phi'(t) = f\left(\phi(t)\right)\phi'(t).$$

Dunque $F\left(\phi(t)\right)$ è una primitiva di $f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)$ e cioè, utilizzando la notazione (7.7),

$$\int f(x)\, dx\Big|_{x=\phi(t)} = \int f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\, dt. \tag{7.13}$$

E' questa la formula di *integrazione per sostituzione*, che prende il nome dalla *sostituzione* $x = \phi(t)$ fatta a primo membro. Poiché ϕ è invertibile la (7.13) può essere scritta anche

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\phi(t)\big)\,\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)} \tag{7.14}$$

e dunque dal Teorema 7.3.1 si arriva alla formula di integrazione per sostituzione per l'integrale definito:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\big(\phi(t)\big)\,\phi'(t)\,dt\,. \tag{7.15}$$

Osservazione 7.4.3 Si noti che *formalmente* la (7.13) è ottenuta ponendo $dx = \phi'(t)\,dt$ nel termine di sinistra (e poi sostituendo $\phi(t)$ all'argomento x di f). In altri termini è come se avessimo derivato la sostituzione

$$x = \phi(t)$$

a sinistra rispetto a x e a destra rispetto a t, moltiplicando poi i rispettivi membri per dx e dt.

Esempio 7.4.4

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx.$

  Facciamo la sostituzione $x - 1 = t^2$, ovvero $x = \phi(t) = t^2 + 1$; si ha $\phi'(t) = 2t$. Dalla (7.13) si ottiene

  $$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx &= \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt \\ &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\,(t - \operatorname{arctg} t) + C \\ &= 2\left(\sqrt{x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) + C.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx.$

Poniamo $3x+1=t^2$, ovvero $x=\frac{t^2-1}{3}$, e applichiamo la formula (7.15) relativa all'integrale definito con $dx=\frac{2}{3}t\,dt$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{t}t\,dt = \frac{2}{3}\,.$$

Altrimenti si poteva porre $3x+1=t$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\,.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx.$

  Poniamo $\log x = t$, da cui $\frac{1}{x}\,dx = dt$; da (7.16)

  $$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|\log x| + C\,.$$

Esempio 7.4.5 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ con $a\neq 0$. In questo caso

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1},$$

da cui con la sostituzione $\frac{x}{a}=t$ si trova

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\,.$$

Osservazione 7.4.4 In molti casi la sostituzione viene espressa più naturalmente esplicitando t invece di x da $\psi(x)=t$, dove $\psi(x)=\phi^{-1}(x)$. Notiamo che dal teorema di derivazione della funzione inversa si ha $\psi'(x)=1/\phi'(t)$, con $x=\phi(t)$; dunque la (7.14) applicata alla funzione $f(x)=g(x)\psi'(x)$ dà

$$\int g(x)\psi'(x)\,dx = \int g\left(\phi(t)\right)\,dt\Big|_{t=\psi(x)}\,. \qquad (7.16)$$

La formula

$$\int_a^b g(x)\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g\left(\phi(t)\right)\,dt$$

per l'integrale definito segue immediatamente. *Formalmente* la formula (7.16) è ottenuta ponendo $\psi'(x)dx = dt$ nel termine di sinistra, ovvero derivando la sostituzione

$$\psi(x) = t$$

a sinistra rispetto a x e a destra rispetto a t, moltiplicando poi i rispettivi membri per dx e dt.

Esempio 7.4.6 Sia f una funzione derivabile e consideriamo un integrale del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$. Supponiamo che f sia invertibile e poniamo $t = f(x)$; di conseguenza, ragionando come nell'Osservazione 7.4.4, si ha $dt = f'(x)dx$ e si conclude che

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt\Big|_{t=f(x)} = \log\big|f(x)\big| + C\,. \tag{7.17}$$

Si noti che la formula vale anche senza supporre che f sia invertibile, come si vede derivando il termine di destra. Questa formula si applica ai seguenti esempi.

- $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\log|\cos x| + C.$
- $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx.$

  Integrando per parti,

  $$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx = \int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\cdot 1\, dx &= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C,\end{aligned}$$

  dove si è usato la (7.17) nell'ultimo passaggio.
- Nell'Esempio 7.4.4 abbiamo trovato che

  $$\int \frac{1}{x\log x}\, dx = \log|\log x| + C.$$

  Si può ritrovare lo stesso risultato applicando la (7.17) alla funzione $f(x) = \log x$.

Esempio 7.4.7 Sia di nuovo f derivabile e consideriamo un integrale del tipo $\int f(x)^\alpha f'(x)\,dx$ con $\alpha \neq -1$. Ragionando come nell'Esempio 7.4.6, cioè ponendo $t = f(x)$, si deduce immediatamente la formula

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\,dx = \int t^\alpha\,dt\Big|_{t=f(x)} = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \tag{7.18}$$

che, come la (7.17), non richiede in effetti che f sia invertibile. Questa formula si applica ai seguenti esempi.

- $\displaystyle\int x^2\sqrt[4]{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{15}\left(1+x^3\right)^{\frac{5}{4}} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(1+x^2\right)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} + C.$

Osservazione 7.4.5 (Il Teorema di Lagrange e il Teorema della media integrale) Non si confonda il Teorema del valor *medio* di Lagrange 6.5.2 con il Teorema della *media* integrale 7.2.2: oltre ad avere enunciati diversi, i punti x_0 e c che si trovano sono diversi, in generale. Per convincersene basta considerare la funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[a, b]$. Abbiamo visto nell'Esempio 6.5.2 che il punto x_0 dato dal Teorema di Lagrange è $x_0 = \frac{a+b}{2}$, mentre si calcola facilmente che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} = f(c),$$

e dunque

$$c = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

Vi è tuttavia un collegamento tra i due teoremi e facciamo vedere come si può dedurre il Teorema di Lagrange dal Teorema della media integrale. Sia infatti f una funzione di classe C^1 in $[a, b]$ e ricordiamo l'Osservazione 7.3.3. Se facciamo il cambiamento di variabili $x = a + t(b-a)$ nell'integrale otteniamo

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f'\left(a + t(b-a)\right)\,dt,$$

ovvero

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \int_0^1 f'\big(a+t(b-a)\big)\, dt. \tag{7.19}$$

Si noti che il termine di sinistra è proprio quello che compare nella formula del Teorema del valor medio di Lagrange. Se applichiamo il Teorema della media integrale all'integrale di destra, relativamente alla funzione $t \to f'\big(a+t(b-a)\big)$, otteniamo che esiste $c \in [0,1]$ tale che

$$\int_0^1 f'\big(a+t(b-a)\big)\, dt = f'\big(a+c(b-a)\big)\,. \tag{7.20}$$

Ma allora $x_0 = a+c(b-a) \in [a,b]$ e dalle (7.19), (7.20) segue

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0),$$

ovvero il Teorema di Lagrange.

7.5 Integrazione di alcune classi di funzioni elementari

In questa sezione introduciamo delle tecniche di integrazioni specifiche per alcune classi di funzioni. In generale, vi possono essere varie strategie per risolvere uno stesso integrale; per semplicità ne facciamo vedere solo una per caso, quella che ci sembra ragionevolmente più semplice. La trattazione è ben lungi dall'essere esaustiva, anzi, ci si limiterà ai casi di uso più comune; per maggiori dettagli teorici si veda [5, 6, 9], il libro di esercizi [8] o la raccolta enciclopedica di formule [11].

7.5.1 Funzioni razionali

Una *funzione razionale* è un quoziente di polinomi: $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ dove P_m è un polinomio di grado m e Q_n un polinomio di grado n. Per quanto riguarda l'integrazione di queste funzioni osserviamo quanto segue.

(i) Se $m \geq n$ possiamo fare la divisione tra polinomi e scrivere

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q_n(x)},$$

dove A e B sono polinomi e il grado di B è minore di n. Poiché l'integrazione di A è immediata, ci limitiamo nel seguito a considerare il caso $m < n$.

(ii) Se $n = 1$ allora $m = 0$; dall'Esempio 7.4.6 si deduce, per $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$,

$$\int \frac{a}{bx + c}\, dx = \frac{a}{b} \log |bx + c| + C\,.$$

(iii) Il caso $n = 2$ è esaminato in dettaglio qui sotto; il caso $n \geq 2$ è in generale molto più complesso ma i procedimenti che faremo vedere nel caso $n = 2$ possono essere impiegati con profitto.

Consideriamo ora in dettaglio l'integrazione di

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

nel caso in cui il grado di Q è 2 e P ha grado minore di 2. Distinguiamo tre casi a seconda delle radici di Q.

- *Q ha radici reali e distinte.* In questo caso, a meno di un coefficiente moltiplicativo, si ha $Q(x) = (x - a)(x - b)$; si cerca quindi una decomposizione in *fratti semplici*, ovvero

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b},$$

  dove A e B sono costanti da determinare. L'integrazione degli addendi di destra è poi immediata.

- *Q ha due radici reali coincidenti.* Dunque $Q(x) = (x - a)^2$ a meno di un fattore costante. Si fa la sostituzione $x - a = t$ che riduce l'integrazione a quella di potenze con esponente negativo.

- *Q non ha radici reali.* In questo caso si scrive il quoziente come

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c_1 \frac{Q'(x)}{Q(x)} + c_2 \frac{1}{Q(x)},$$

per opportune costanti c_1 e c_2. Questo è possibile perché P ha grado minore o uguale ad uno e Q' ha grado uno. L'integrazione del primo addendo è immediata dall'Esempio 7.4.6; per il secondo si scrive Q *completando il quadrato*, cioè scrivendo

$$\begin{aligned} Q(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

La sostituzione $x + \frac{b}{2a} = t$ riduce quindi l'integrazione a quella considerata nell'Esempio 7.4.5. Infatti in questo caso $b^2 - 4ac < 0$ e dunque $Q(x) = \frac{1}{4a}\left(4a^2t^2 - (b^2 - 4ac)\right)$.

Esempio 7.5.1

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\, dx\,.$

Ci troviamo nel caso *(i)* di sopra. Aggiungendo e togliendo 1 al numeratore (o facendo direttamente la divisione tra polinomi) troviamo che

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

da cui

$$\int \frac{x^2}{x+1}\, dx = \frac{x^2}{2} - x + \log|x+1| + C.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx$ con $a \neq 0\,.$

Il denominatore ha radici reali e distinte $\pm a$. Cerchiamo A e B tali che

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \\ &= \frac{(A+B)x + (A-B)a}{(x-a)(x+a)},\end{aligned}$$

da cui $A = \frac{1}{2a}$, $B = -\frac{1}{2a}$ e quindi

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\,.$$

- $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\,dx.$

  In questo caso il denominatore ha radici reali e distinte -2 e 1; cerchiamo una decomposizione

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{(x-1)(x+2)}\,.$$

  Occorre che

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A-B=3, \end{cases}$$

  dunque $A = \frac{4}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+x-2} &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{4}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\log|x+2| + C\,.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\,dx.$

  Il denominatore ha 2 come radice doppia. Ponendo $x-2=t$ si trova

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\,dx &= \int \frac{t+3}{t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}\right)\,dt \\ &= \log|t| - \frac{3}{t} + C = \log|x-2| - \frac{3}{x-2} + C\,.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx.$

  Il denominatore non ha radici reali; la sua derivata, che vogliamo far comparire a numeratore, è $2x+4$. Moltiplichiamo e dividiamo l'integrale per 2, in modo che il coefficiente di x al numeratore sia uguale a quello di x della derivata; quindi sommiamo e sottraiamo 2 al numeratore per far comparire il 4:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+6}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx\,.
\end{aligned}$$

  Il primo integrale dà $\log(x^2+4x+6)+C$; possiamo scrivere il denominatore del secondo come $x^2+4x+6 = x^2+4x+4+2 = (x+2)^2+2$. Posto $x+2=t$ si trova, procedendo come nell'Esempio 7.4.5 e indicando di nuovo con C una costante reale arbitraria,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx &= \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C\,.
\end{aligned}$$

  In conclusione

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+4x+6) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C\,.$$

7.5.2 Funzioni trigonometriche

Per integrare espressioni che coinvolgono funzioni trigonometriche è indispensabile l'uso di qualche formula elementare di trigonometria. Formule analoghe a quelle dei casi *(i)* e *(ii)* qui sotto sono utili anche per il calcolo di integrali che coinvolgono sinh e cosh invece di sin e cos, come si è visto nell'Esempio 7.4.3.

(i) Per integrare *potenze pari* di seni e coseni sono utili le formule di bisezione

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

(ii) Per integrare *potenze dispari* si usa la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ per ricondursi ad espressioni del tipo

$$f(\sin x)\cos x \qquad \text{o} \qquad f(\cos x)\sin x,$$

che si risolvono tramite le sostituzioni $\sin x = t$ o $\cos x = t$.

(iii) Per integrare *funzioni razionali di seni e coseni* è utile esprimere $\sin x$ e $\cos x$ in funzione di $\mathrm{tg}(x/2)$ e poi fare la sostituzione $t = \mathrm{tg}(x/2)$, ovvero $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t$. In tal caso, da note formule di trigonometria si ha

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

Esempio 7.5.2 Proviamo che

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \sin x\cos x}{2} + C\,, \quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \sin x\cos x}{2} + C\,.$$

Gli integrali sono conseguenza delle formule di bisezione e delle relative formule di duplicazione. Ad esempio

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}\,(1-\cos 2x)\;dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C\\ &= \frac{x - \sin x\cos x}{2} + C\,.\end{aligned}$$

Si noti che si perviene allo stesso risultato scrivendo, ad esempio, $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx$ e integrando due volte per parti. Si confrontino queste formule con quelle dell'Esempio 7.4.3.

Esempio 7.5.3 $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx.$

Si ha $\cos^3 x = \cos x\cos^2 x = \cos x(1-\sin^2 x) = \cos x - \sin^2 x\cos x$; dunque, dalla (7.18),

$$\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C\,.$$

Esempio 7.5.4 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\, dx.$

La funzione integranda è una funzione razionale di seno e coseno. Procedendo come indicato sopra, cioè facendo il cambiamento di variabile $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, si ha

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\, dx = 2\int \frac{1}{t^2+2t-1}\, dt\,.$$

Poiché le radici del denominatore sono $-1 \pm \sqrt{2}$, cerchiamo una decomposizione

$$\frac{1}{t^2+2t-1} = \frac{A}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+1+\sqrt{2}}\,,$$

da cui $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Pertanto

$$\int \frac{1}{t^2+2t-1}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C,$$

da cui

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right| + C\,.$$

7.5.3 Funzioni irrazionali

Consideriamo dapprima il caso di funzioni razionali di potenze fratte $x^{q_1}, x^{q_2}, \ldots$ di x, dove $q_1 = \frac{m_1}{n_1}, q_2 = \frac{m_2}{n_2}, \ldots$ sono numeri razionali. Si integra ponendo $x = t^n$, dove $n = \text{m.c.m.}\{n_1, n_2, \ldots\}$.

Esempio 7.5.5

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\, dx.$

  Dobbiamo integrare una funzione razionale di $x^{\frac{1}{2}}$ e $x^{\frac{1}{3}}$; poiché $\text{m.c.m.}\{2,3\} = 6$ poniamo $x = t^6$. Dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\, dx &= 6\int \frac{t^5}{t^3(1+t^2)}\, dt\\ &= 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = 6\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\, dt\\ &= 6(t - \mathrm{arctg}\, t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \mathrm{arctg}\, \sqrt[6]{x}) + C\,.\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso funzioni razionali che dipendono da x e da radici di potenze di x tramite prodotti o quozienti. Per semplicità supponiamo qui sotto $a > 0$.

(i) Funzioni che dipendono da x e $\sqrt{a^2 - x^2}$: si pone $x = a \sin t$ (o $x = a \cos t$), dunque $dx = a \cos t\, dt$, in modo che $\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t|$.

(ii) Funzioni che dipendono da x e $\sqrt{a^2 + x^2}$: si pone $x = a \sinh t$, dunque $dx = a \cosh t\, dt$ in modo che $\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh t$.

(iii) Funzioni che dipendono da x e $\sqrt{x^2 - a^2}$: si pone $x = a \cosh t$, dunque $dx = a \sinh t\, dt$ in modo che $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\sinh t|$.

Esempio 7.5.6

- Calcoliamo l'area A della regione di piano E interna all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Per simmetria A sarà quattro volte l'area della regione E_1 compresa nel primo quadrante (si veda la Figura 7.7), che a sua volta è quella compresa tra l'asse x e la funzione $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, per $0 \leq x \leq a$. Dunque, ponendo $x = a \sin t$,

$$\begin{aligned} A &= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \\ &= 4\frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\, dt = \pi ab\,. \end{aligned}$$

  Chiaramente se $a = b$ si ritrova l'area del cerchio.

- $\displaystyle\int \sqrt{1 + x^2}\, dx.$

  Questo integrale è di importanza fondamentale nel calcolo della lunghezza delle curve (come si vedrà nel corso di Analisi Matematica II). Posto $x = \sinh t$ si trova, per l'Esempio 7.4.3,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2}\, dx &= \int \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cosh t\, dt = \int \cosh^2 t\, dt \\ &= \frac{\sinh t \cosh t + t}{2} + C\,. \end{aligned}$$

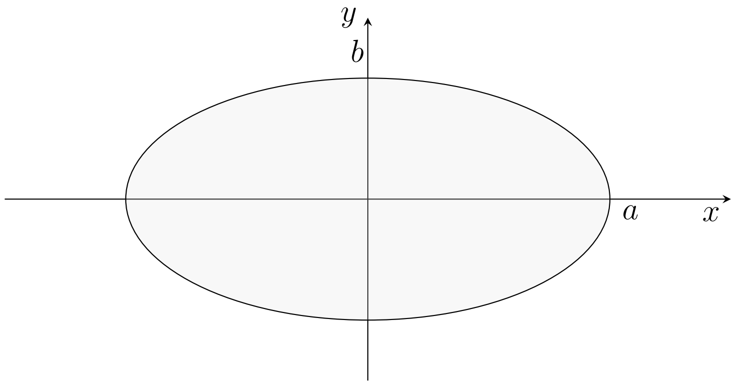

Figura 7.7: Area della regione interna all'ellisse.

Dall'Esempio 4.8.3 si ha $t = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; inoltre

$$\sinh t \cosh t = \sinh t \sqrt{1+\sinh^2 t} = x\sqrt{1+x^2}\,.$$

In conclusione

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) + C.$$

- $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$

  Si procede come nell'esempio precedente. Osserviamo intanto che il radicando è definito per $|x| \geq 1$; supponiamo per il momento $x \geq 1$. Poniamo $x = \cosh t$, con $t \geq 0$, ovvero $t = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, si trova

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\,dx &= \int \sinh^2 t\,dt = \frac{\sinh t\cosh t - t}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) + C.\end{aligned}$$

  Nel caso $x \leq -1$ si procede analogamente ma ponendo evidentemente $x = -\cosh t$; si trova in tal caso che una primitiva di $\sqrt{x^2-1}$ è

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) + C.$$

Osserviamo tuttavia che molto spesso, risolvendo esercizi, ci si limita al più semplice di vari casi; in questo caso, a $x \geq 1$.

7.6 Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come calcolare le primitive di alcune funzioni elementari. Ci poniamo ora il seguente problema generale: *data una funzione f, quando esiste una sua primitiva F?*

Definizione 7.6.1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $x_0 \in [a, b]$. La* funzione integrale *di f relativa al punto x_0 è la funzione $\mathcal{F}_{x_0} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\mathcal{F}_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\,.$$

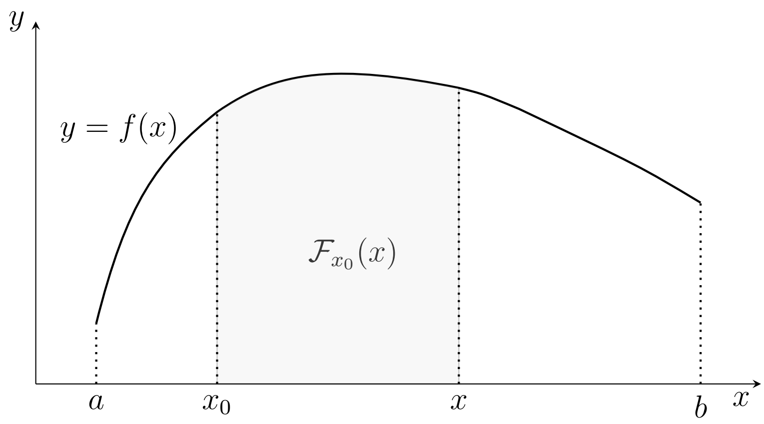

Figura 7.8: La funzione integrale: fissato $x_0 \in I$, il valore $\mathcal{F}_{x_0}(x)$ dà l'area (con segno) della regione di piano compresa tra il grafico di f, l'asse x e le due rette verticali passanti per x_0 e x.

Osservazione 7.6.1

- La funzione integrale $\mathcal{F}_{x_0}$ è definita in $[a,b]$ perché f è supposta continua in $[a,b]$ e dunque l'integrale è definito; inoltre $\mathcal{F}_{x_0}(x_0) = 0$. Si noti che nell'integrale si è usata la variabile di integrazione t in quanto la lettera x compare come estremo superiore dell'integrale. Si veda la Figura 7.8.

- Fissato $x_1 \in [a,b]$ si ha che

$$\mathcal{F}_{x_1}(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \mathcal{F}_{x_0}(x) + c,$$

  dove $c = \int_{x_1}^{x_0} f(t)\,dt$. Pertanto al variare di x_0 in $[a,b]$ le funzioni integrali relative differiscono per delle costanti.

- Non si confonda la *funzione integrale* (una funzione!) con l'integrale definito o indefinito, si veda l'Osservazione 7.4.1.

Esempio 7.6.1 Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ in $\mathbb{R}$. Si ha allora

$$\mathcal{F}_0(x) = \frac{x^3}{3}\,, \qquad \mathcal{F}_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\,, \qquad \mathcal{F}_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\,.$$

Teorema 7.6.1 (Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale) *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, x_0 un punto di $[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\mathcal{F}_{x_0}$ la sua funzione integrale relativa al punto x_0. Allora $\mathcal{F}_{x_0}$ è derivabile in $[a,b]$ e per ogni $x \in [a,b]$ si ha*

$$\mathcal{F}'_{x_0}(x) = f(x)\,. \tag{7.22}$$

Dimostrazione. Sia $x \in [a,b]$ e si veda la Figura 7.9. Per l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione e per il teorema della media integrale si ha che

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{F}_{x_0}(x+h) - \mathcal{F}_{x_0}(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h),
\end{aligned}$$

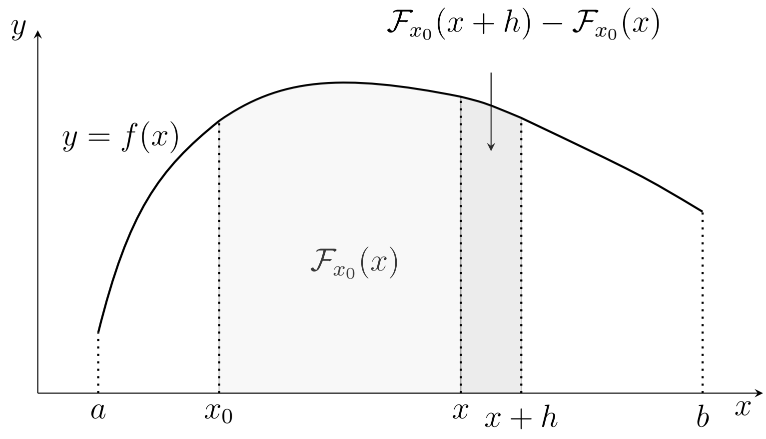

Figura 7.9: Dimostrazione del Teorema 7.6.1.

dove c_h è un punto compreso tra x e $x+h$.

Passiamo ora al limite per $h \to 0$: il punto c_h tende a x e dunque $f(c_h)$ tende a $f(x)$ in quanto f è supposta continua. Quindi il limite del rapporto incrementale di $\mathcal{F}_{x_0}$ in x esiste ed è finito: pertanto $\mathcal{F}_{x_0}$ è derivabile e $\mathcal{F}'_{x_0}(x) = f(x)$. □

Osservazione 7.6.2

- La relazione (7.22) può essere espressa così: *ogni funzione integrale di una funzione continua* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ne è primitiva.* In parole più semplici, *ogni funzione continua ammette primitive.* Ricordando l'Osservazione 7.6.1, $\mathcal{F}_{x_0}$ è quella primitiva che si annulla nel punto x_0.

- Poiché f è continua e $\mathcal{F}'_{x_0}(x) = f(x)$ si ha che anche $\mathcal{F}'_{x_0}$ è continua; pertanto $\mathcal{F}_{x_0} \in C^1([a,b])$. Ragionando analogamente segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f \in C^n([a,b]) \Rightarrow \mathcal{F}_{x_0} \in C^{n+1}([a,b])\,.$$

7.7 Integrali non esprimibili tramite funzioni elementari

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto alcuni semplici metodi per l'integrazione delle funzioni elementari. Come abbiamo visto nel Teorema 7.6.1, ogni funzione continua *ammette* primitiva (in realtà, infinite), ma non è detto che questa si possa *esprimere* tramite combinazione di funzioni elementari. Ad esempio le funzioni continue

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\log x}{1+x}, \quad \sin x^2,$$

ed altre ad esse riconducibili *non hanno primitive esprimibili tramite combinazioni di funzioni elementari.* Alcune di queste rivestono un ruolo fondamentale nelle applicazioni: la funzione gaussiana

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

in statistica, la funzione seno cardinale $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ in teoria dei segnali. A questi semplici esempi aggiungiamo le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \quad \sqrt{1-k^2\sin^2 x}, \quad \frac{1}{(1+n\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$

per $0 < k < 1$, che danno luogo ai cosiddetti *integrali ellittici di prima, seconda, terza specie,* rispettivamente, che compaiono frequentemente in problemi applicativi. Il loro nome deriva dal fatto che sono connessi (in particolare quello di seconda specie) con il calcolo della lunghezza degli archi di una ellisse. Come per le altre funzioni di sopra, i loro integrali definiti possono essere valutati con algoritmi di integrazione numerica.

Osservazione 7.7.1 Non è per niente banale dimostrare che, ad esempio, non esiste una primitiva della funzione e^{x^2} esprimibile tramite funzioni elementari; si veda [7]. E' però interessante osservare che questo fatto è strettamente legato alla *Teoria di Galois*, una serie di risultati matematici che riguardano le formule risolutive per le equazioni algebriche. Ad esempio, sappiamo che l'equazione

$ax^2+bx+c=0$ si risolve esplicitamente (se il discriminante è positivo o nullo!) tramite la formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2}. \tag{7.23}$$

Cosa si può dire dell'equazione di terzo grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$? La risposta era già nota ai matematici italiani del '500 (Scipione del Ferro, Gerolamo Cardano, Niccolò Tartaglia) ed era positiva: una formula analoga alla (7.23) (ma molto più complicata) esiste. Lo stesso vale per l'equazione di quarto grado (Lodovico Ferrari, sempre nel '500). Stranamente l'equazione di quinto grado resisteva, e si capì solo nell''800, grazie a Evariste Galois, perché: una tale formula risolutiva non esiste, in generale. E lo stesso vale per le equazioni di ordine superiore al quinto.

7.8 Notazioni e dimensioni

In questa breve e intuitiva sezione cerchiamo di spiegare perché le notazioni

$$\frac{d}{dx} \qquad \text{e} \qquad \int \, dx \tag{7.24}$$

per la derivata e l'integrale, apparentemente ingombranti, sono in realtà molto utili per evitare errori, in particolare quando si ha a che fare con applicazioni a problemi ingegneristici o fisici. Incominciano con qualche osservazione generale.

- Gli argomenti delle funzioni trascendenti ($\log x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, ...) devono essere adimensionali o *numeri puri*: possiamo calcolare il $\log 10$ (e il risultato è un numero puro), ma non sappiamo cosa vuol dire log(10m) (m per metro). Pertanto, nell'espressione $\log(1+x)$ la variabile x deve essere adimensionale affinché possa essere addizionato ad 1.

- Supponiamo ora che x abbia la dimensione di una *lunghezza*. Allora, nell'espressione

$$1 + \frac{x^2}{a^2},$$

anche il parametro a deve avere la dimensione di una lunghezza, in modo che il quoziente $\frac{x}{a}$ sia adimensionale e possa essere addizionato a 1. Analogamente, nell'espressione x^2+a, la quantità a deve avere le dimensioni di un'area.

- Supponiamo che t abbia le dimensioni di un *tempo* (ad esempio sia misurato in secondi s). Allora nell'espressione $\sin(at)$, a deve avere la dimensione di s^{-1}, cioè deve essere una frequenza.

Facciamo vedere ora con qualche esempio come le notazioni (7.24) conservino le dimensioni nelle operazioni di derivazione e integrazione.

Esempio 7.8.1 Consideriamo $f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ e attribuiamo ad x la grandezza fisica di una lunghezza; dunque anche a deve essere una lunghezza. Si calcola

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}.$$

Si noti che il termine di destra ha dimensione m^{-1}, che concide con quella del termine di sinistra se interpretiamo *formalmente* il denominatore dx come una lunghezza ("infinitesima"...) Pertanto, questo porta immediatamente a scartare i seguenti risultati:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \begin{cases} \dfrac{2ax}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}, \\ \dfrac{x}{a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}, \end{cases}$$

che sono scorretti dimensionalmente. Infatti il primo termine a destra ha dimensione m^2, il secondo è adimensionale.

Esempio 7.8.2 Supponiamo che t abbia le dimensioni di un tempo. Allora, attribuendo a dt la dimensione di un tempo, vediamo che la formula

$$\frac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at)$$

è corretta dimensionalmente mentre non lo è l'espressione (matematicamente sbagliata)

$$\frac{d}{dt}\sin(at) = \cos(at).$$

Infatti il termine di destra è adimensionale mentre quello di sinistra ha dimensione s^{-1}.

Esempio 7.8.3 Consideriamo $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ e attribuiamo ad x la grandezza fisica di una lunghezza; dunque anche a deve essere una lunghezza. Si calcola (omettendo le costanti per semplicità)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Il termine di destra ha la dimensione del reciproco di una lunghezza, che concide con quella del termine di sinistra se di nuovo interpretiamo formalmente dx come una lunghezza ("infinitesima"...). Pertanto, questo porta immediatamente a scartare i seguenti risultati:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \begin{cases} a\operatorname{arctg}(ax), \\ a\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{a}\right), \\ \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax), \end{cases}$$

che sono scorretti dimensionalmente. Infatti nella prima e nella terza il termine ax non è corretto (non è adimensionale); nella seconda il termine $\frac{x}{a}$ è corretto (è adimensionale) ma non lo è il fattore $\frac{1}{a}$.

Esempio 7.8.4 Consideriamo infine il moto rettilineo di una particella che al variare del tempo t occupa la posizione $s(t)$. Possiamo verificare la correttezza fisica delle espressioni relative alla velocità istantanea e all'accelerazione:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right], \qquad a(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

7.9 Estensioni dell'integrale

La definizione di integrale di Riemann data nella Definizione 7.1.1 si riferisce a funzioni *continue* definite in intervalli *limitati*. Vediamo come estendere questa definizione a una classe più ampia di funzioni e a intervalli non limitati.

7.9.1 Integrazione di funzioni discontinue

Abbiamo già visto nell'Esempio 7.1.3 che vi sono funzioni discontinue per le quali l'integrale di Riemann non può essere definito. Per certe funzioni discontinue questo è però possibile.

Definizione 7.9.1 *Sia* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *una funzione continua che sia prolungabile per continuità all'intervallo* $[a,b]$ *con prolungamento* $\bar{f}$*. Definiamo allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \bar{f}(x)\,dx\,.$$

La definizione ha un significato intuitivo evidente se si pensa all'interpretazione dell'integrale in termini di area: l'area della regione di piano sottesa da f non cambia aggiungendo o togliendo i segmenti laterali verticali. Più in generale abbiamo la seguente definizione.

Definizione 7.9.2 *Sia* f *una funzione definita e continua in un intervallo* $[a,b]$*, ad eccezione di un numero finito di punti* $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ *di* $[a,b]$ *in cui non è definita o non è continua. Supponiamo inoltre che la restrizione di* f *ad ogni intervallo* (a,c_1), (c_1,c_2), $\ldots$, (c_n,b) *sia prolungabile per continuità agli estremi, si veda la Figura 7.10; una tale funzione è detta* continua a tratti.

Definiamo allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Per l'estensione dell'integrale data dalla definizione precedente valgono le proprietà della Sezione 7.2 ad eccezione del Teorema della media integrale.

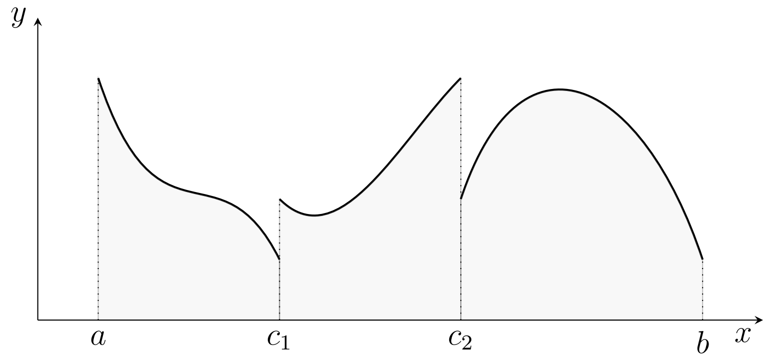

Figura 7.10: L'integrale di una funzione continua a tratti. In grigio la regione di cui viene calcolata l'area.

Esempio 7.9.1

- $\displaystyle\int_0^3 [x]\,dx.$

  La funzione parte intera è discontinua nei punti interi. Si ha $\int_0^3 [x]\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx = 3.$

- $\displaystyle\int_{-1}^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$

  La funzione $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ non è definita nel punto 0; tuttavia

  $$\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2},$$

  si veda la Figura 7.11. Pertanto le sue restrizioni agli intervalli $[-1,0)$ e $(0,2]$ sono prolungabili per continuità in zero, con valori $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, rispettivamente. Pertanto

  $$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx &= \int_{-1}^0 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx + \int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\\ &= \int_1^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\end{aligned}$$

in quanto la funzione integranda è dispari. Dall'Esempio 7.4.6 si trova

$$\int_1^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \left[x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^2$$
$$= 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}.$$

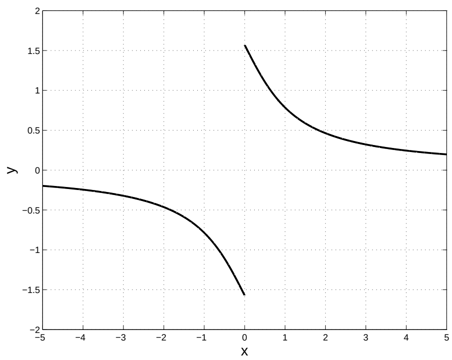

Figura 7.11: Grafico della funzione arctg$(1/x)$.

Osservazione 7.9.1 La nozione di funzione integrale, introdotta nella Sezione 7.6, si estende facilmente al caso di funzioni definite in generici intervalli limitati I. Tuttavia l'ipotesi di continuità di f nel Teorema 7.6.1 è essenziale. Consideriamo infatti la funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$. L'integrale di f ha senso secondo la Definizione 7.9.2 e si trova subito che $\mathcal{F}_0(x) = |x|$. Tuttavia la funzione $\mathcal{F}_0$ non è derivabile nel punto 0; la relazione $\mathcal{F}_0'(x) = f(x)$ vale solo nei punti x in cui f è continua.

7.9.2 Integrazione in senso generalizzato

In questa sezione e nella successiva definiamo gli *integrali in senso generalizzato o improprio*, relativi cioè a funzioni non limitate o definite su intervalli non limitati. Consideriamo dapprima il caso di funzioni non limitate definite su intervalli limitati.

Definizione 7.9.3 (Funzioni non limitate) *Sia* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x\to a+} f(x) = -\infty.$$

Si definisce allora, si veda la Figura 7.12,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

se il limite a destra esiste finito; si dice allora che l'integrale generalizzato $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente *o che* f è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[a,b]$*. Se invece tale limite vale* $\pm\infty$ *o non esiste si dice che* l'integrale generalizzato è divergente *o, rispettivamente,* non esiste*; in entrambi i casi si dice che* f non è integrabile in senso generalizzato.

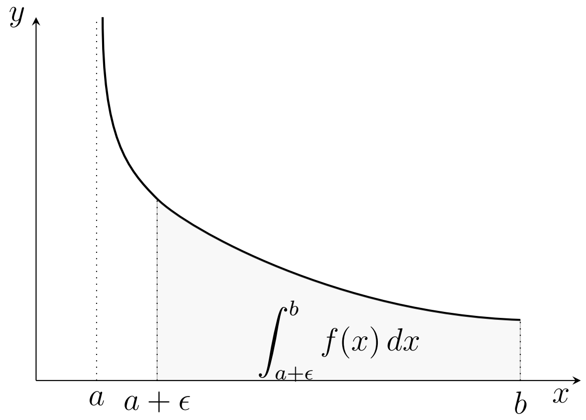

Figura 7.12: Integrazione generalizzata per funzioni non limitate in domini limitati.

Osservazione 7.9.2

- Si noti che l'integrale $\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$ ha senso come integrale secondo Riemann, essendo la funzione integranda continua in $[a+\epsilon, b]$. In effetti l'ipotesi di continuità fatta nella Definizione 7.9.3 può essere indebolita richiedendo semplicemente che in ogni intervallo $[a+\epsilon, b]$ la funzione f soddisfi le condizioni della Definizione 7.9.2.

- Non deve soprendere il fatto che una regione di piano *illimitata* (quella sottesa dal grafico di f) abbia area *finita*; come vedremo, questo è analogo all'esistenza di *serie numeriche* a termini positivi che sono *convergenti*.

- La definizione relativa al caso in cui la funzione non sia limitata in un intorno del punto b è analoga; in tal caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

  se il limite a destra esiste finito.

  In ogni caso, se l'integrale è divergente scriviamo per brevità, a seconda dei casi, $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ o $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$.

Esempio 7.9.2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ per $\alpha > 0$.

Si veda la Figura 7.13. Si ha $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ in quanto $\alpha > 0$. Se $\alpha = 1$ si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}(-\log\epsilon) = +\infty\,.$$

Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\epsilon^1\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\epsilon^{1-\alpha}\right)\,.\end{aligned}$$

Se $\alpha < 1$ il limite a destra converge a $\frac{1}{1-\alpha}$, mentre se $\alpha > 1$ diverge a $+\infty$. In conclusione,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases}\text{converge a} & \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1\,,\\ \text{diverge a} & +\infty & \text{se } \alpha \geq 1\,.\end{cases} \tag{7.25}$$

In particolare $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$, $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$.

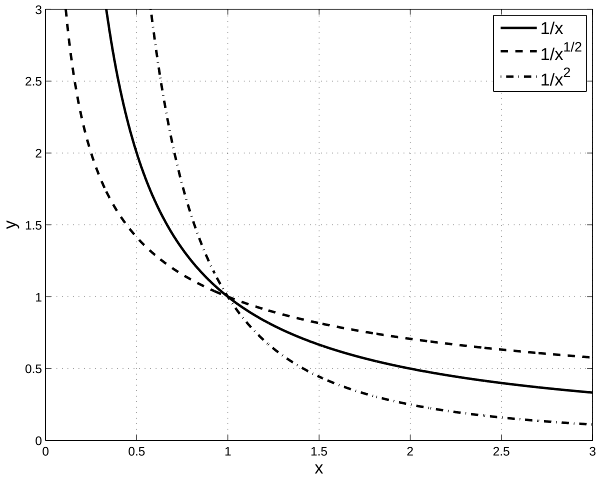

Figura 7.13: Grafici delle funzioni $1/x$, $1/\sqrt{x}$ e $1/x^2$.

Esempio 7.9.3 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$.

Si ha $\lim_{x\to 0+}\log x = -\infty$. Ricordando l'Esempio 7.4.2 si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \log x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[x\log x - x\right]_\epsilon^1 \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}(-1-\epsilon\log\epsilon+\epsilon) = -1\,.\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso di funzioni definite su intervalli illimitati.

Definizione 7.9.4 (Funzioni definite in intervalli non limitati) *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si veda la Figura 7.14. Si definisce allora*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)\,dx$$

se il limite a destra esiste finito; si dice allora che l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente *o che f* è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[a, +\infty)$. *Se tale limite vale invece $\pm\infty$ o non esiste si dice che* l'integrale generalizzato è divergente *o, rispettivamente,* non esiste*; in entrambi i casi si dice che f* non è integrabile in senso generalizzato.

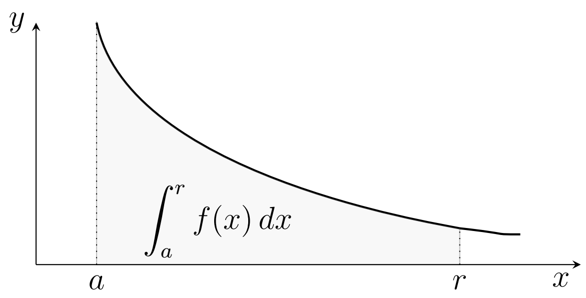

Figura 7.14: Integrazione generalizzata per funzioni limitate in domini non limitati.

Valgono anche in questo caso considerazioni analoghe a quelle fatte per la definizione precedente. Il caso in cui $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ è analogo:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{a} f(x)\,dx$$

se il limite di destra esiste finito.

Esempio 7.9.4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ per $\alpha > 0$.
Si veda la Figura 7.13. Se $\alpha = 1$ si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_1^{r} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \log r = +\infty\,.$$

Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{r\to+\infty} \int_1^{r} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^r \\ &= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(r^{1-\alpha} - 1\right)\,.\end{aligned}$$

Se $\alpha > 1$ il limite a destra converge a $\frac{1}{\alpha-1}$, mentre se $\alpha < 1$ diverge a $+\infty$. In conclusione,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{diverge a} & +\infty & \text{se } \alpha \leq 1\,, \\ \text{converge a} & \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1\,. \end{cases} \tag{7.26}$$

In particolare $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$. Si noti infine come le formule (7.26) possano essere dedotte dalle (7.25) per semplice simmetria.

Si confrontino gli Esempi 7.9.2 e 7.9.4 relativi all'integrazione delle funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$ al finito (cioè nell'intervallo $(0,1]$) e all'infinito (in $[1,+\infty)$): se $\alpha = 1$ l'integrale diverge in entrambi i casi; se $\alpha < 1$ l'integrale converge al finito e diverge all'infinito; se $\alpha > 1$ l'integrale diverge al finito e converge all'infinito.

Le Definizioni 7.9.3 e 7.9.4 di integrale generalizzato utilizzano esplicitamente un passaggio al limite. Da un punto di vista formale questo passaggio può essere tralasciato, impiegando per semplicità la formula analoga alla (7.6) in cui uno dei due estremi è inteso nel senso di limite. In altre parole, ad esempio nel caso di domini illimitati, scriveremo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_a^{+\infty}$$

intendendo $[F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{r\to+\infty} F(x) - F(a)$. Applichiamo questa notazione all'esempio seguente.

Esempio 7.9.5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx.$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1\,.$$

Esempio 7.9.6 (Applicazione allo studio della convergenza delle serie) Diamo ora un'applicazione degli integrali generalizzati allo studio della convergenza delle serie numeriche.

- Incominciamo ridimostrando la divergenza della serie armonica. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x}$ in $[1,+\infty)$; in ogni intervallo $[n, n+1]$, per $n = 1, 2, \ldots$, si ha che $\frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$ e dunque

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{n}\,.$$

  Si noti che $\frac{1}{n}$ rappresenta l'area del rettangolo di base $[n, n+1]$ e altezza $\frac{1}{n}$, si veda la Figura 7.15*(a)*. Perciò, dall'additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione, si ha

$$\int_1^N \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}\,.$$

Dall'Esempio 7.9.4 e dalla Proposizione 5.1.2 sappiamo che il limite per $N \to \infty$ del termine di sinistra vale $+\infty$; per confronto anche il termine di destra tenderà a $+\infty$, dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

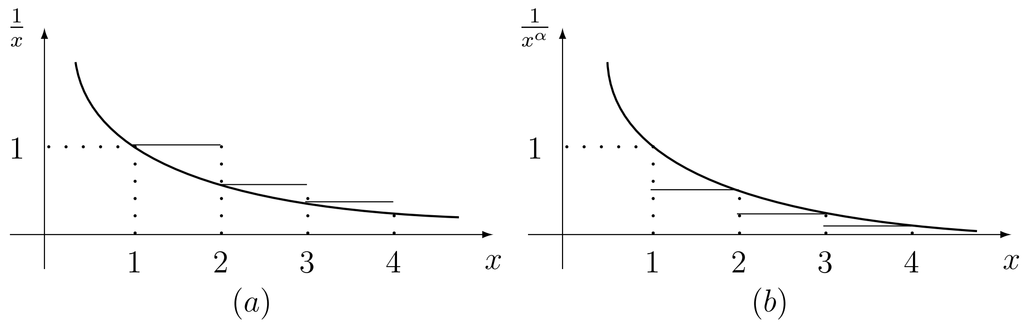

Figura 7.15: Grafici delle funzioni $\frac{1}{x}$ (a sinistra) e $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 1$ (destra).

- Dimostriamo ora che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$, completando così la dimostrazione nell'Esempio 3.2.3. Ragioniamo come nel caso precedente considerando la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ in $[1, +\infty)$ ma cercando delle minorazioni: in ogni intervallo $[n, n+1]$, per $n = 1, 2, \ldots$, si ha che $\frac{1}{x^\alpha} \ge \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ e dunque

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ge \frac{1}{(n+1)^\alpha}\,.$$

Qui $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ è l'area del rettangolo di base $[n, n+1]$ e altezza $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$, si veda la Figura 7.15*(b)*. Perciò

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ge \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

Dall'Esempio 7.9.4 e dalla Proposizione 5.1.2 sappiamo che il termine di sinistra converge per $N \to \infty$ a $\frac{\alpha}{\alpha-1}$; per confronto anche il termine di destra convergerà, dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha-1} < \infty$ per ogni $\alpha > 1$. In particolare, nel caso $\alpha = 2$ si trova che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$.

Dalle Definizioni 7.9.3 e 7.9.4 restano esclusi alcuni casi: f definita in (a, b) e non limitata in alcuni punti interni (o sia in a che in b), f definita in $(a, +\infty)$ e non limitata in a, f definita in $\mathbb{R}$. L'integrale in ognuno di questi casi è definito spezzando l'integrale di partenza tramite un punto (eventualmente più punti, nel primo caso) arbitrario c; ad esempio, se f è continua in $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

La funzione si dirà allora integrabile in senso generalizzato nell'intervallo in questione se *tutti* gli integrali che decompongono l'integrale di partenza sono finiti.

Esempio 7.9.7

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}\,dx.$

  La funzione integranda è continua in $(0, 1)$ ma non limitata né in un intorno del punto 0 né in un intorno del punto 1, si veda la Figura 7.16.

  Per definizione, dunque, consideriamo separatamente gli integrali

  $$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}\,dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}\,dx\,.$$

  Il punto $\frac{1}{2}$, con il quale abbiamo spezzato l'integrale di partenza, è stato scelto per semplicità; i punti $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$ (tutti nell'intervallo $(0, 1)$) andavano ugualmente bene ed il risultato non sarebbe cambiato.

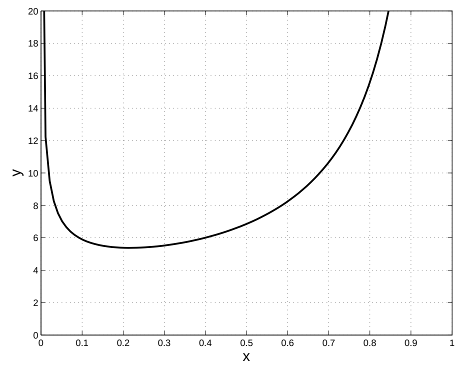

Figura 7.16: Grafico della funzione $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}$.

Incominciamo col calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}.$$

Col cambiamento di variabili $x = t^6$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}\,dx = 6\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = -6\int \frac{1-t^2-1}{1-t^2}\,dt$$
$$= -6t + 6\int \frac{1}{1-t^2}\,dt\,.$$

L'ultimo integrale è risolto per decomposizione in fratti semplici:

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\log|1+t| - \log|1-t|\right\}C\,.$$

In conclusione, in $(0,1)$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}\,dx = -6x^{1/6} - 3\log(1+x^{1/6})$$
$$+ 3\log(1-x^{1/6}) + C = F(x) + C\,.$$

Ricordando la Definizione 7.9.3 si deduce subito che I_1 vale $F(1/2)$ mentre I_2 è divergente a $+\infty$. Pertanto la funzione

$\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}$ non è integrabile in senso generalizzato in $[-1,1]$. Intuitivamente, si noti che la regione sottesa dal grafico della funzione a sinistra di 1 è più grande di quella sottesa a destra di 0. Ritroveremo questo risultato nell'Esempio 7.9.8.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx.$

  La funzione integranda non è limitata in un intorno del punto 0. Per definizione

  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

  e la funzione $\frac{1}{x}$ sarà integrabile in senso generalizzato in $[-1,1]$ se ciascuno dei due integrali generalizzati a destra esiste finito. Sappiamo che il secondo integrale è divergente a $+\infty$ per l'Esempio 7.9.2 e dunque il primo sarà divergente a $-\infty$ per simmetria. Pertanto la funzione $\frac{1}{x}$ *non* è integrabile in senso generalizzato in $[-1,1]$.

  Si noti come in questo caso la Definizione 7.9.4 richieda che *entrambi* i limiti

  $$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

  esistano finiti, e *non* che esista finito il limite

  $$\lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \right\},$$

  che vale ovviamente 0 per simmetria.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$

  La funzione integranda non è limitata in un intorno del punto 0. Per definizione

  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

La funzione $\frac{1}{x^2}$ sarà integrabile in senso generalizzato in $[-1, 1]$ se ciascuno dei due integrali generalizzati a destra esiste finito. Ragionando come nel caso precedente, entrambi gli integrali sono divergenti a $+\infty$ per l'Esempio 7.9.2. Pertanto la funzione $\frac{1}{x^2}$ *non* è integrabile in senso generalizzato in $[-1, 1]$.

Invece la funzione $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[-1, 1]$ e il suo integrale vale 4, si veda l'Esempio 7.9.2.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

  La funzione integranda è pari e positiva; si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\lim_{r\to+\infty}\int_{0}^{r} \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ = 2\lim_{r\to+\infty} \operatorname{arctg} r = \pi\,.\end{aligned}$$

7.9.3 Criteri di convergenza per integrali generalizzati

In molti casi è sufficiente stabilire se l'integrale generalizzato che si considera è convergente o meno, senza calcolarne esplicitamente il valore nel caso in cui esso sia convergente, o limitandosi al più ad una stima del suo valore. Un punto di vista analogo è stato adottato per le serie numeriche; come per le serie, consideriamo ora alcuni criteri che assicurano la convergenza degli integrali generalizzati. Consideriamo dapprima il caso di funzioni positive.

Proposizione 7.9.1 *Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue con*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty.$$

(i) Se $0 \le f(x) \le g(x)$ allora

$$\begin{aligned} g \textit{ integrabile} &\Rightarrow f \textit{ integrabile} \\ f \textit{ non integrabile} &\Rightarrow g \textit{ non integrabile.}\end{aligned}$$

(ii) Se $f \geq 0$, $g \geq 0$ e $f \sim g$ per $x \to a+$, allora

$$f \text{ integrabile} \iff g \text{ integrabile.}$$

Dimostrazione. In conseguenza dell'ipotesi di positività delle funzioni f e g entrambi gli integrali $\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{a+\epsilon}^{b} g(x)\,dx$ sono funzioni monotone decrescenti di ϵ e dunque il loro limite per $\epsilon \to 0+$ esiste sempre (finito o infinito).

Per *(i)* si osservi che per la monotonìa dell'integrale si ha

$$\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a+\epsilon}^{b} g(x)\,dx.$$

Si conclude per il teorema di confronto dei limiti.

La parte *(ii)* si dimostra analogamente a quella del confronto asintotico per le serie. □

Risultati analoghi a quelli della Proposizione 7.9.1 si hanno negli altri casi esaminati sopra.

Esempio 7.9.8

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx.$

  La funzione integranda non è limitata nell'intorno del punto 1. Per $x \to 1-$ si ha

  $$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

  L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ è convergente per l'Esempio 7.9.2, tramite un cambiamento di variabili. Dunque l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ è convergente per il criterio del confronto asintotico.

- $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}\,dx.$

  Il denominatore si annulla nei punti 1 e 2; nell'intervallo di integrazione la funzione integranda è dunque continua e limitata. Poiché $\frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, si ha che l'integrale è convergente per il criterio del confronto asintotico.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}\,dx.$

  Abbiamo già considerato questo integrale nell'Esempio 7.9.7; lo riesaminiamo sfruttando il criterio del confronto asintotico.

  – Si ha
  $$\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \text{per } x \to 0+,$$
  e dunque l'integrale I_1 è convergente per il criterio del confronto asintotico a causa dell'Esempio 7.9.2.

  – Si ha
  $$\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})} \sim \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}, \qquad \text{per } x \to 1-\,.$$
  Dalla (5.8) deduciamo che $1-\sqrt[3]{x} \sim 1-1+\frac{1}{3}(1-x) = \frac{1}{3}(1-x)$ per $x \to 1$. Altrimenti, dalla formula di fattorizzazione di una differenza di cubi si ha che $1-x = (1-x^{1/3})(1+x^{1/3}+x^{2/3})$; pertanto $1-x \sim 3(1-x^{1/3})$ per $x \to 1-$ e dunque $1-x^{1/3} \sim \frac{1}{3}(1-x)$ per $x \to 1$.
  Perciò
  $$\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})} \sim \frac{3}{1-x}, \qquad \text{per } x \to 1-\,. \tag{7.27}$$
  Per arrivare alla (7.27) si può anche procedere come segue. Poniamo $y = 1-x$; si ha $1-\sqrt[3]{x} = 1-(1-y)^{\frac{1}{3}}$ e $x \to 1-$ se e soltanto se $y \to 0+$. Per $y \to 0+$ si ha allora, per la (5.7),
  $$1-(1-y)^{\frac{1}{3}} \sim 1-\left(1-\frac{1}{3}y\right) = \frac{y}{3},$$
  da cui $1-\sqrt[3]{x} \sim \frac{1}{3}(1-x)$ per $x \to 1-$. Questo prova la (7.27)

  Di conseguenza l'integrale I_2 è divergente, di nuovo per l'Esempio 7.9.2. Si ritrova dunque che l'integrale di partenza non è convergente.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

  La funzione integranda è pari e l'integrazione avviene su un intervallo simmetrico rispetto all'origine; basta considerare pertanto il solo $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Non calcoleremo esplicitamente questo integrale ma proveremo che è convergente e daremo una stima del suo valore. Per questo scopo è conveniente scrivere

  $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

  Il primo addendo a destra è l'integrale secondo Riemann di una funzione continua, limitata da 1, dunque convergente. Il secondo è invece un integrale generalizzato; poiché è $x \geq 1$ nel dominio di integrazione, allora $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ e per confronto l'integrale converge (ecco il perché della decomposizione di sopra).

  Più precisamente possiamo dare una stima dell'integrale come segue:

  $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 + \frac{1}{e}\,.$$

  In conclusione $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty$ e il suo valore è minore di $2(1+\frac{1}{e}) \sim 2.7358$. Si può dimostrare che

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \sim 1.7725\,.$$

Per funzioni di segno variabile si ha il seguente criterio, analogo al criterio di convergenza assoluta per le serie. Ne omettiamo la dimostrazione, per la quale ci si può riferire a [5].

Proposizione 7.9.2 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \ \textit{convergente} \ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ \textit{convergente.}$$

Un risultato analogo vale per funzioni definite in intervalli illimitati. In entrambi i casi l'ipotesi di convergenza del valore assoluto di f si esprime dicendo che f è *assolutamente integrabile* nell'intervallo in questione.

Esempio 7.9.9

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx.$

  L'integrale è convergente in quanto la funzione integranda è assolutamente integrabile nell'intervallo $[0,1]$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$

  Anche in questo caso la funzione integranda è assolutamente integrabile in $[\pi/2,+\infty)$:

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

  Dunque l'integrale è convergente.

Esempio 7.9.10

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

  Si veda la parte superiore della Figura 7.17. Vogliamo dimostrare che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $(0,+\infty)$ ma non è assolutamente integrabile in $(0,+\infty)$. La funzione integranda è prolungabile con continuità in 0; conviene perciò scrivere (spiegheremo dopo perché)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \qquad (7.28)$$

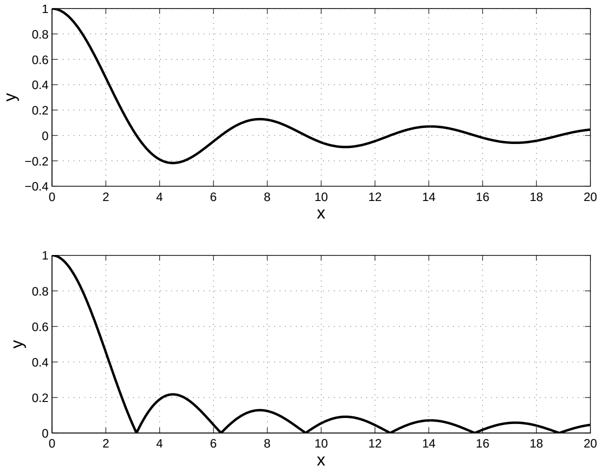

Figura 7.17: Sopra, il grafico della funzione $\frac{\sin x}{x}$; sotto, il grafico di $\frac{|\sin x|}{x}$.

Il primo integrale è convergente (si ricordi la Definizione 7.9.1). Per il secondo si osservi che, integrando per parti,

$$\int_{\pi/2}^{r} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^{r} + \int_{\pi/2}^{r} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Per $r \to +\infty$ il primo addendo tende a 0 mentre il secondo addendo ha limite finito per l'Esempio 7.9.9. Questo prova che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ è convergente. In effetti si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si noti come la decomposizione (7.28) ha permesso di escludere un intorno di $x = 0$ nel secondo integrale: se non avessimo fatto così non avremmo potuto integrare per parti.

Proviamo ora che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ non è assolutamente convergente, ovvero che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty. \tag{7.29}$$

Il grafico della funzione $\frac{|\sin x|}{x}$ nell'intervallo $[0, n\pi]$ è composto di n parti concave (si veda la parte inferiore della Figura 7.17) e possiamo scrivere

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx.$$

Valutiamo ora l'area di una singola "lente". Se $x \in [(k-1)\pi, k\pi]$ allora $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k\pi}$ e dunque

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx &= \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin x\,dx \\ &= \frac{2}{k\pi}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Il termine di destra è la somma parziale n-esima della serie armonica; poiché la serie armonica è divergente, abbiamo provato (7.29).

Si noti come questo esempio per gli integrali generalizzati sia analogo all'Esempio 3.3.2 per le serie.

Appendice A

Formulario

A.1 Trigonometria

Alcune formule di trigonometria elementare:

Addizione:
$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{cases}$$

Sottrazione:
$$\begin{cases} \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{cases}$$

Duplicazione:
$$\begin{cases} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

Bisezione:
$$\begin{cases} \sin\dfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\dfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{cases}$$

Prostaferesi:
$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

Werner:
$$\begin{cases} \sin\alpha\sin\beta &= \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta &= \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\cos\beta &= \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \end{cases}$$

$\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ in $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$:
$$\begin{cases} \sin\alpha &= \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \\ \cos\alpha &= \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

A.2 Logaritmi

Se $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, $a \neq 1$, allora

$$x = a^y \iff y = \log_a x.$$

Proprietà ($x, y > 0$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

Valori importanti:	$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0$
Identità esponenziale:	$x = a^{\log_a x} = \log_a a^x$
Log del prodotto:	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
Log del quoziente:	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
Log di una potenza:	$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
Cambiamento di base:	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \cdot \log_b x.$

A.3 Limiti fondamentali di successioni

- $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1\,. \end{cases}$

- $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0\,. \end{cases}$

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log_b n}{n^\alpha} = 0, \quad b > 1,\ \alpha > 0.$

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \alpha > 0,\ a > 1.$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = +\infty, \quad a > 1.$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

A.4 Convergenza e somma di alcune serie numeriche

- Serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1, \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

- Serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1, \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n} < +\infty, \quad a \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^n = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } 0 < a < 1, \\ \text{diverge} & \text{se } a > 1, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} < +\infty, \quad a \in \mathbb{R}.$

A.5 Funzioni inverse

$f(x)$	$f^{-1}(y)$	
x^α	$y^{\frac{1}{\alpha}}$	$x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$
x^{2n}	$y^{\frac{1}{2n}}$	$x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$
x^{2n+1}	$y^{\frac{1}{2n+1}}$	$x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
$x^{\frac{m}{n}}$	$y^{\frac{n}{m}}$	$x \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N},\ n$ dispari
e^x	$\log y$	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\log_a y$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\arcsin y$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos x$	$\arccos y$	$x \in [0, \pi]$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{arctg} y$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\sinh x$	$\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$	$x \geq 0.$

A.6 Una tabella di derivate

$f(x)$	$Df(x)$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \log a$	$a > 0$
$\log\|x\|$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a \|x\|$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

A.7 Sviluppi di MacLaurin

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots\\
&\quad \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

A.8 Una tabella di primitive

Indichiamo con F una primitiva di f.

$f(x)$	$F(x)$	
x^α	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	
e^x	e^x	
a^x	$\dfrac{1}{\log a}a^x$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$	
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

Appendice B

Matematici

Riportiamo una breve lista dei matematici incontrati (e non) in vario modo nel testo, anche per dare un'idea dello sviluppo temporale della materia.

- Archimede (Siracusa, 287 a.C. - Siracusa, 212 a.C.)
- Bernoulli, Johann (Basilea, 1667 - Basilea, 1748)
- Cardano, Gerolamo (Pavia, 1501 - Roma, 1576)
- Del Ferro, Scipione (Bologna, 1465 - Bologna 1526)
- Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (Düren, 1805 - Göttingen, 1859)
- Euler, Leonhard (Eulero) (Basilea, 1707 - S. Pietroburgo, 1783)
- Ferrari, Lodovico (Bologna, 1522 - Bologna 1565)
- Galois, Evariste (Bourg-la-Reine, 1811 - Parigi, 1832)
- Gauss, Carl Friedrich (Braunschweig, 1777 - Göttingen, 1855)
- de l'Hospital, Guillaume François Antoine de Sainte Mesme, marchese (Parigi, 1661 - Parigi, 1704)
- Lagrange, Joseph-Louis (Torino, 1736 - Parigi, 1813)
- Leibniz, Wilhelm von (Lipsia, 1646 - Hannover, 1716)

- MacLaurin, Colin (Kilmodan, 1698 - Edimburgo, 1746)
- Mascheroni, Lorenzo (Bergamo, 1750 - Parigi, 1800)
- Napier, John (Nepero) (Edimburgo, 1550 - Edimburgo 1617)
- Newton, Isaac (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 1642 - Londra, 1727)
- Peano, Giuseppe (Spinetta di Cuneo, 1858 - Torino, 1932)
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard (Breselenz, 1826 - Selasca, 1866)
- Stirling, James (Stirling, 1692 - Edimburgo, 1770)
- Taylor, Brook (Edmonton, 1685 - Londra 1731)
- Tartaglia, Niccolò (Niccolò Fontana) (Brescia, 1499 - Venezia, 1557)
- Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (Ostenfelde, 1815 - Berlino, 1897)

Bibliografia

[1] R.A. Adams. *Calcolo differenziale 1*. Terza edizione. Ambrosiana, 2003.

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo e L. Giacomelli. *Analisi matematica*. Seconda edizione. McGraw-Hill, 2011.

[3] C.B. Boyer. *Storia della matematica*. Mondadori, 2004.

[4] M. Bramanti. *Esercitazioni di Analisi Matematica 1*. Esculapio, 2013.

[5] M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi Matematica 1*. Zanichelli, 2008.

[6] C. Citrini. *Analisi matematica. 1*. Boringhieri, 1988.

[7] C. De Lellis. *Il teorema di Liouville, o perché la primitiva di* e^{x^2} *"non esiste"*. Mat. Soc. Cult. Riv. Unione Mat. Ital. (I), 7 (2014), 55–97.

[8] B.P. Demidovich. *Esercizi e problemi di analisi matematica*. Editori Riuniti, 2003.

[9] E. Giusti. *Analisi matematica 1*. Bollati Boringhieri, 1988.

[10] E. Giusti. *Esercizi e complementi di analisi matematica. Volume 1*. Bollati Boringhieri, 1991.

[11] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, 1994.

[12] J. Hass, M.D. Weir e G.B. Thomas, Jr. *Analisi matematica 1*. Pearson, 2014.

[13] J. Marsden e A. Weinstein. *Calculus I.* Springer, 1985.

[14] S. Salsa e A. Squellati. *Esercizi di Analisi matematica 1.* Zanichelli, 2011.