

Algebra di Boole, funzioni booleane e calcolo delle proposizioni

M. Favalli

Engineering Department in Ferrara



Sommario

- 1 Algebra di Boole
- 2 Algebra di commutazione
- 3 Funzioni
- 4 Calcolo delle proposizioni

Sommario

- 1 Algebra di Boole
- 2 Algebra di commutazione
- 3 Funzioni
- 4 Calcolo delle proposizioni

Algebra di Boole - I

- Introdotta nel XIX secolo da Boole per analizzare algebricamente problemi di calcolo proposizionale (al fine di studiare le leggi del pensiero)
- É stata poi utilizzata come fondamento per la logica formale che costituisce la base per il ragionamento scientifico
- In questo corso verrà considerata come modello matematico per la sintesi e l'analisi di sistemi digitali

Algebra di Boole - I

- Definizione:

$$\mathcal{A} = \{A, +, \cdot, ', 0, 1\}$$

- A supporto dell'algebra
- $+$: operatore binario di disgiunzione (OR, somma logica)
- $\cdot$: operatore binario di congiunzione (AND, prodotto logico)
- $'$: operatore unario di complementazione (NOT, negazione)
- 0 elemento neutro rispetto a $+$, 1 elemento neutro rispetto a $\cdot$

Postulati (Huntington)

- congiunzione e disgiunzione sono *commutative*
 $a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$
- esistono un elemento neutro rispetto a $+$ (indicato con 0) e un elemento neutro rispetto a $\cdot$ (indicato con 1) tali che:
 $a + 0 = a \quad a \cdot 1 = a$
- proprietà *distributiva*:
 $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- per ogni $a \in A$ esiste ed è unico un *complemento* a' tale che
 $a + a' = 1 \quad a \cdot a' = 0$

Proprietà di chiusura

- rispetto alla somma:

$$a + b \in A \quad \forall a, b \in A$$

- rispetto al prodotto

$$a \cdot b \in A \quad \forall a, b \in A$$

- rispetto alla complementazione

$$a' \in A \quad \forall a \in A$$

Si farà riferimento ad algebre di Boole finite (A è finito) (esistono algebre di Boole in cui il supporto non è finito)

Esempi - I

- Si verifichi se l'algebra definita da: $\{\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, M\}$ (dove M è un insieme e $\mathcal{P}(M)$ è l'insieme dei suoi sottoinsiemi) costituisce un'algebra di Boole
 - la chiusura è chiaramente verificata: l'intersezione e l'unione di due sottoinsiemi di M sono chiaramente ancora dei sottoinsiemi di M , lo stesso vale per il complemento (se $S \in \mathcal{P}(M)$ allora $S' = M \setminus S \in \mathcal{P}(M)$)
 - unione e intersezione sono commutative
 - l'elemento neutro rispetto a $\cup$ è $\emptyset$, rispetto a $\cap$ è M , infatti $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap M = S$
 - si utilizzino i diagrammi di Venn per verificare le proprietà distributive e l'unicità del complemento

Esempi - II

Si verifichi che se q é un numero ottenibile come prodotto di numeri primi diversi fra loro, allora l'algebra in cui:

- A é l'insieme dei divisori di n
- $a \cdot b = \text{MCD}(a, b)$
- $a + b = \text{mcm}(a, b)$ é il mcm
- $a' = n/a$
- $0 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow n$

é un algebra di Boole

Proprietá - I

- associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- idempotenza: $x + x = x$ e $x \cdot x = x$
- elemento nullo: $x + 1 = 1$ e $x \cdot 0 = 0$
- unicitá del complemento (o elemento inverso): x' é unico
- assorbimento: $x + x \cdot y = x$ e $x \cdot (x + y) = x$
- semplificazione: $x + x' \cdot y = x + y$ e $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$
- involuzione: $(x')' = x$

Variabili

- Una variabile booleana é un simbolo che indica un qualsiasi elemento di A , il suo valore é uno specifico elemento di A .
- Si adotterà la convenzione di indicarle mediante simboli dell'alfabeto con eventuali indici (es. $x, y, \dots$, oppure $x_1, x_2, \dots, x_n$)
- Si noti che é importante distinguere le variabili dagli elementi di A

Proprietá - II

- Leggi di De Morgan (relazionano somma e prodotto logico)

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

- Consenso

$$x \cdot y + x' \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + x' \cdot z$$

$$(x + y) \cdot (x' + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (x' + z)$$

- *puó essere interessante verificare tutte queste proprietá mediante l'utilizzo dei diagrammi di Venn*

Dimostrazioni - I

Le proprietà viste in precedenza possono essere dimostrate utilizzando gli assiomi dell'algebra (idempotenza)

$$\begin{aligned}
 x \cdot x &= (x \cdot x) + 0 && \text{elemento neutro} \\
 &= (x \cdot x) + (x \cdot x') && \text{complemento} \\
 &= x \cdot (x + x') && \text{distributiva} \\
 &= x \cdot 1 && \text{complemento} \\
 &= x && \text{elemento neutro}
 \end{aligned}$$

Principio di dualità

Si può notare che assiomi e proprietà dell'algebra di Boole sono forniti in due versioni e che si può passare dall'una all'altra sostituendo $+$ con $\cdot$ e viceversa e sostituendo 0 con 1 e viceversa.

Qualunque relazione di uguaglianza di un algebra di Boole rimane valida scambiando ovunque gli operatori di somma e prodotto logico e gli elementi neutri 0 e 1.

Si vedrà in seguito il significato circuitale di tale principio

Dimostrazioni - II

Esempio: semplificazione

$$\begin{aligned}
 x + x' \cdot y &= (x \cdot 1) + x' \cdot y && \text{elemento neutro} \\
 &= (x \cdot (y + y')) + x' \cdot y && \text{complemento} \\
 &= x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y && \text{distributiva} \\
 &= x \cdot y + x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y && \text{idempotenza} \\
 &= x \cdot (y + y') + (x + x') \cdot y && \text{distributiva} \\
 &= x \cdot 1 + 1 \cdot y && \text{complemento} \\
 &= x + y && \text{elemento neutro}
 \end{aligned}$$

Sommario

- 1 Algebra di Boole
- 2 Algebra di commutazione
- 3 Funzioni
- 4 Calcolo delle proposizioni

Algebra di commutazione

Si tratta di un'algebra di Boole in cui il supporto è costituito da due soli valori $\{0, 1\}$:

$$\mathcal{B} = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$$

- ciascuna variabile può assumere due soli valori
- descrizione tabellare degli operatori

+	x		·	x		'	
y	0	1	y	0	1	x	0
0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Convenzioni

Una volta che sia ben definito l'insieme di simboli utilizzato per rappresentare le variabili, si può eliminare il simbolo di prodotto logico $\cdot$.

Per le proprietà dell'algebra di commutazione si possono anche omettere alcune parentesi ricordando che il prodotto logico é prioritario rispetto alla somma logica

- $x + (yz)$ può essere scritta come $x + yz$

La proprietà associativa consente di eliminare ulteriori parentesi

- $x + (y + z)$ può essere scritta come $x + y + z$

Espressioni

Un'espressione booleana definita su un insieme di variabili booleane $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ è definita dalle seguenti regole:

- gli elementi del supporto sono espressioni;
- le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono espressioni;
- se g e h sono espressioni booleane, allora lo sono anche $g + h$, $g \cdot h$ e g' ;
- non esistono altre espressioni oltre a quelle ottenute applicando iterativamente le regole precedenti;

Esempi di espressioni

Definite sulle variabili x, y, w, z :

1	x
x'	$x \cdot 0 + x'$
$x + y \cdot 1$	$x + y(w + z)$
$x + y \cdot 1'$	$x + (y'(w + z'))$

Sommario

- 1 Algebra di Boole
- 2 Algebra di commutazione
- 3 **Funzioni**
- 4 Calcolo delle proposizioni

Funzioni di commutazione

Nell'algebra di commutazione $A = \{0, 1\}$ per cui:

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

Le funzioni di commutazione possono essere descritte tramite tabelle della verità in cui si ha una riga per ciascuna configurazione delle variabili. La riga riporta il valore delle variabili e il corrispondente valore di f .

Funzioni booleane

Funzione booleana di n variabili: relazione $f : A^n \rightarrow A$ che mette in corrispondenza gli elementi del dominio $A^n = A \times A \times \dots \times A$ con quelli del codominio.

- funzione costante: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a, \forall a \in A$
- funzione proiezione: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i, \forall x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- se g e h sono funzioni booleane a n variabili allora anche $(g + h)$, $(g \cdot h)$ e (g') sono funzioni booleane:
 - $(g + h)(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) + h(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - $(g \cdot h)(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot h(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - $(g')(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g(x_1, x_2, \dots, x_n))'$

Tabella di verità

Esempio: funzione delle variabili x, y e z che vale 1 se e solo se almeno due variabili valgono 1:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funzioni di commutazione

- Quante sono le possibili funzioni di n variabili?
- Date n variabili si hanno 2^n possibili configurazioni (ovvero gli elementi di $\{0, 1\}^n$, quindi la funzione é definita da una configurazione ordinata di 2^n elementi
- Il numero di funzioni é quindi pari al numero di possibili configurazioni di 2^n elementi, ovvero 2^{2^n}

Funzioni - Esempi

Esempi di funzioni di 1 o 2 variabili alcune delle quali hanno una particolare importanza dal punto di vista della realizzazione

Funzioni di 1 variabile (x)

x	$f(x)$			
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	costante 0	proiezione di x	negazione di x	costante 1

Letterali

Letterale: coppia (variabile, valore) di una variabile booleana ($x \in \{0, 1\}$)

Nell'algebra di commutazione, si hanno 2 possibili letterali:

- $(x, 1)$ indicato come x
- $(x, 0)$ indicato come x'

Vedremo il loro utilizzo nella valutazione del costo di una rete logica

Funzioni - Esempi

Funzioni di 2 variabili

xy	$f(x)$					
00	0	1	0	0	1	1
01	0	1	0	1	1	0
10	0	1	1	0	0	1
11	0	1	1	1	0	0
	cost. 0	cost. 1	proiez. di x	proiez. di y	negaz. di x	negaz. di y

Funzioni - Esempi

Funzioni di 2 variabili (continua)

xy	$f(x)$					
00	0	0	1	1	0	1
01	0	1	1	0	1	0
10	0	1	1	0	1	0
11	1	1	0	0	0	1
	AND	OR	NAND	NOR	EXOR	EQUIV.

Valutazione di un'espressione

- 1 Data un'espressione (w) dell'algebra di commutazione che utilizza le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$
- 2 Si definisce valutazione dell'espressione rispetto a una configurazione $\langle x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0} \rangle \in \{0, 1\}^n$ delle variabili, il procedimento mediante il quale si sostituisce a ciascuna variabile il suo valore e applicando le regole dell'algebra di commutazione si ottiene un valore $w_0 \in \{0, 1\}$
- 3 Ripetendo il procedimento per tutte le possibili configurazioni, si ottiene una tabella di verità: a ogni espressione corrisponde una funzione

Funzioni - Esempi

Funzioni di 2 variabili (continua)

xy	$f(x)$			
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
10	1	0	0	1
11	1	1	0	0

Funzioni ottenibili dalle precedenti negando una variabile, ad esempio la prima rappresenta un OR fra x e y negato

Espressione $\Rightarrow$ funzione

- Si consideri l'espressione $w = (x_1 + x_2) \cdot x_3$
- Valutazione per 110: $w(110) = (1 + 1) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$
- Valutazione completa

$x_1 x_2 x_3$	w
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	0
111	1

Semplificazione di espressioni

- Le proprietà dell'algebra di commutazione si possono utilizzare per semplificare le espressioni, ottenendo da un'espressione di partenza un'espressione equivalente più semplice

Per il momento si noti che non abbiamo ancora definito una metrica per quantificare la complessità di un'espressione e che viene seguito un procedimento non sistematico

◀ ◻ ▶ ◀ ☰ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

$$\begin{aligned}
 &= \overbrace{(x'y') \cdot 1}^{el. \text{ neutro}} + w' + wx + wy' = x'y' + \overbrace{w' + wx}^{\text{semplificazione}} + wy' = \\
 &= \overbrace{x'y' + x}^{\text{assorbimento}} + w' + wy' = \overbrace{y' + wy'}^{\text{assorbimento}} + x + w' = y' + x + w'
 \end{aligned}$$

- le proprietà associative e commutative della somma e del prodotto sono state utilizzate senza essere referenziate esplicitamente
- le diverse proprietà vengono applicate in maniera non sistematica

Esercizi proposti

Si semplifichino le seguenti espressioni:

$$① \quad x = (a + b)' \cdot (c + (d \cdot e)')' + (a + a'b + a'b')$$

$$② \quad x = (b \cdot 1) + (a + (b \cdot e)') \cdot c + ad$$

$$③ \quad x = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot d' + a \cdot b \cdot c' + a \cdot b' \cdot d$$

Sommario

① Algebra di Boole

② Algebra di commutazione

③ Funzioni

④ Calcolo delle proposizioni

Logica e calcolo delle proposizioni

L'algebra di Boole é stata presentata come una struttura algebrica astratta, in realtà era stata sviluppata nell'ambito dello studio delle leggi del pensiero per determinare se i ragionamenti risultano corretti o meno.

Diversamente dalla logica classica, la logica moderna si occupa delle relazioni fra le affermazioni senza interessarsi minimamente della loro validità.

La logica é diventata lo strumento fondamentale a supporto delle altre scienze (matematica, fisica) che si occupano, invece, dei postulati e dei dati sperimentali che formano le affermazioni di partenza di ciascuna teoria.

Esempio - I

Tutte le automobili da corsa hanno 4 ruote, J. Schekter pilotava auto da corsa, quindi J. Sheckter pilotava auto a 4 ruote

La logica non si occupa di stabilire se queste affermazioni sono vere, comunque se le prime due affermazioni sono vere, la logica ci assicura che la terza é vera.

Esempio - II



Cosa possiamo dire della proposizione precedente?

Proposizioni vs. algebra di Boole

Data una proposizione p questa può essere vera (T) o falsa (F). Il significato di negazione, congiunzione e disgiunzione logica é dato dalle seguenti tabelle di verità:

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
F	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T
		T	F	F	T
		T	T	T	T

Proposizioni

- Le proposizioni che interessano sono frasi elementari che possono essere vere o false (ma non entrambe): "Tutte le automobili da corsa hanno 4 ruote"
- Nel linguaggio naturale esistono frasi che possono essere in parte vere e in parte false, frasi che non si sa se sono vere o false e frasi per cui non ha senso chiedersi se sono vere o false.
- Una proposizione elementare non può essere scomposta in ulteriori proposizioni (es. $2 + 2 = 4$), e può essere negata ($2 + 2 \neq 4$).
- Le proposizioni elementari possono essere composte utilizzando i connettivi e (and, $\wedge$) e o (or, $\vee$), oppure possono essere negate (not $\neg$).

Proposizioni vs. algebra di Boole

È evidente che se si assume $T = 1, F = 0$, l'algebra delle proposizioni è un'algebra di Boole (corrispondente al caso particolare dell'algebra di commutazione):

$$\mathcal{A} = \{\{\text{T}, \text{F}\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$$

Cosa succede se si fa l'assunzione duale?

Qualsiasi espressione proposizionale del tipo indicato può essere espressa con un'espressione dell'algebra di commutazione.

Proposizioni condizionali - II

- Possiamo creare una tabella della verità:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

- $p \rightarrow q$ é quindi vera se p é vero e q é vero o se p é falso
- $p \rightarrow q$ é equivalente a $p \wedge q \vee \neg p$

- Per la **logica formale** la frase é vera! Una volta che l'ipotesi sia falsa posso dire quello che voglio sulla tesi. Questo non sarebbe piaciuto ai logici classici.

Proposizioni condizionali - Esempio

- Utilizzando gli operatori (piú comodi) dell'algebra di commutazione e semplificando:

- ovvero la frase é vera se una delle ipotesi é falsa o se la tesi é vera, quindi la frase é vera

Esercizio

- Analisi del problema per vedere se é descrivibile tramite proposizioni vere o false

- sistema operativo: $a = \text{"la distribuzione del sistema operativo é Mandrake"}$
- compilatore: $b = \text{"la versione di gcc é } > 3.1\text{"}$
- ambiente desktop: qui il problema é un po piú ambiguo, se supponiamo che KDE e Gnome siano le uniche alternative si puó assumere che la proposizione $c = \text{"l'ambiente desktop é Gnome"}$ possa essere vera, mentre $c = F$ equivale a dire che l'ambiente desktop é KDE
- libreria Qt: $d = \text{"la libreria Qt é installata"}$

Esercizio

- $$\begin{aligned}
 p &= a'bc + \overbrace{ad' + ac'd}^{\text{prop.distr.}} + acd = a'bc + a \overbrace{(d' + c'd)}^{\text{semplificazione}} + acd = \\
 &= a'bc + \overbrace{a(d' + c')}^{\text{prop.distr.}} + acd = a'bc + \overbrace{ad' + acd}^{\text{semplificazione}} + ac' = \\
 &= a'bc + \overbrace{a(d' + cd)}^{\text{prop.distr.}} + ac' = a'bc + \overbrace{a(d' + c)}^{\text{complemento}} + ac' \\
 &= a'bc + ad' + \overbrace{ac + ac'}^{\text{el.neutro}} = a'bc + ad' + \overbrace{a(c + c')}^{\text{prop.distr.}} \\
 &= a'bc + ad' + \overbrace{a \cdot 1}^{\text{el.neutro}} = a'bc + \overbrace{ad' + a}^{\text{semplificazione}} = a'bc + a \overbrace{(1 + d')}^{\text{nullo}} \\
 &= a'bc + \overbrace{a \cdot 1}^{\text{el.neutro}} = \overbrace{a'bc + a}^{\text{semplificazione}} = bc + a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a'bc + ad' + \overbrace{a \cdot 1}^{el.neuro} = a'bc + \overbrace{ad' + a}^{prop.distr.} = a'bc + a \overbrace{(1 + d')}^{nullo} \\ &= a'bc + \overbrace{a \cdot 1}^{el.neuro} = \overbrace{a'bc + a}^{semplificazione} = bc + a \end{aligned}$$

- $$p = a'bc + ad' + ac'd + acd$$

Esercizio

Si ha quindi: $p = a + bc = a \vee b \wedge c$, ovvero il software può essere compilato se "la distribuzione del sistema operativo é Mandrake" o "la versione di gcc é > 3.1 " e "l'ambiente desktop é Gnome".

Esercizio proposto