Complementi di Idrologia
Appello del 1 Febbraio 2012

**Problema n°1 (8 punti)**

1. Si consideri la funzione $Y$=ln($X$). La variabile $Y$ è distribuita secondo una normale $N(m_Y,\sigma_Y)$. Quale è la distribuzione di $X$ e il suo dominio di definizione?
2. Posto che $m_X = \exp\left[m_{\ln X} + 1/2\,\sigma^2_{\ln X}\right]$ e $\sigma^2_X = m^2_X\left[\exp\left(\sigma^2_{\ln X}\right) - 1\right]$, derivare i parametri della distribuzione lognormale $m_{\ln X}$ e $\sigma_{\ln X}$ in funzione di $m_X$ e $CV_X$.
3. Posto $m_X$ = 40 e $\sigma_X$ =10, calcolare il valore di $X$ che viene superato con probabilità del 95%.
4. Calcolare inoltre la probabilità $P\left[X \geq 25\right]$

**Risposte**

1. Sia $Y$ una variabile $N(m_Y,\sigma_Y)$.
   $X = \exp(Y)$ $\quad g(Y)$
   $Y = \ln(X)$ $\quad g^{-1}(X)$

   $$f_X(x) = \left|\frac{dg^{-1}(x)}{dx}\right| f_Y\left(g^{-1}(x)\right).$$

   Poiché:

   $$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(y - m_Y\right)^2}{\sigma^2_Y}\right],$$

   allora:

   $$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln X}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(\ln x - m_{\ln X}\right)^2}{\sigma^2_{\ln X}}\right] \text{ con x>0}$$

2. $m_X = \exp\left[m_{\ln X} + 1/2\,\sigma^2_{\ln X}\right]$

   $$\sigma^2_X = m^2_X\left[\exp\left(\sigma^2_{\ln X}\right) - 1\right]$$

   $$CV^2_X = \frac{\sigma^2_X}{m^2_X} = \exp\left(\sigma^2_{\ln X}\right) - 1$$

   $$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln\left(CV^2_X + 1\right)}$$

   Inoltre:

   $$\ln m_X = m_{\ln X} + 1/2\,\sigma^2_{\ln X}$$

   $$m_{\ln X} = \ln m_X - 1/2\ln\left(CV^2_X + 1\right) = \ln m_X - \ln\left(CV^2_X + 1\right)^{1/2} = \ln\left[\frac{m_X}{\left(CV^2_X + 1\right)^{1/2}}\right]$$

3. $m_X$ = 40 e $\sigma_X$ =10 $\rightarrow CV_X$ =0,25.

$$m_{\ln X} = \ln\left[\frac{m_X}{\left(CV_X^2+1\right)^{1/2}}\right] = 3,58$$

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln\left(CV_X^2+1\right)} = 0,25$$

La variabile normale standardizzata $z$ con probabilità di superamento pari al 95% vale -1,645. Pertanto:

$$\frac{\ln x - m_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}} = \frac{\ln x - 3,58}{0,25} = -1,645 \quad \text{da cui}$$

$$x = \exp\left(3,58 - 1,645 \cdot 0,25\right) = 23,78 .$$

4. $P\left[X \geq 25\right] = 1 - F_X\left(25\right) = 1 - F_Z\left(\dfrac{\ln 25 - 3,58}{0,25}\right) = 1 - F_Z\left(-1,45\right) = 1 - 0,0735 = 0,926$

**Problema n°2 (8 punti)**

1. Derivare la distribuzione di Poisson $p_X\left(x\right) = \dfrac{\left(\nu\right)^x e^{-\nu}}{x!}$ partendo da una distribuzione di Binomiale
2. Nel caso di distribuzione di Poisson non omogenea il parametro $\nu$ assume la seguente espressione $\nu = \int_{t_1}^{t_2} \lambda\left(t\right) dt$ dove $\lambda(t)$ rappresenta il tasso di arrivo medio degli accadimenti. Si consideri la pioggia su periodi di 4 settimane ciascuno. Il tasso medio di arrivo su ciascun periodo varia con la seguente legge:

| | | |
|---|---|---|
| $\lambda(t)$ | $= 2t/3$ | $0 \leq t < 3$ |
| | $= 2$ | $3 \leq t < 7$ |
| | $=(13-t)/3$ | $7 \leq t \leq 13$ |

2.a - Quale è la probabilità di avere 3 o più eventi di pioggia nei primi 5 periodi di 4 settimane?
2.b – Quale è la probabilità di avere non più di un evento di pioggia nei periodi 8, 9 e 10 **e** non più di un evento nei periodi 11, 12 e 13?

**Risposte**

1. Si consideri la distribuzione Binomiale dove $n$ rappresenta il numero di esperimenti, $p$ la probabilità di avere successo nel generico esperimento e con $X$ il numero di successi su n esperimenti:

$$p_X = \frac{n!}{x!\left(n-x\right)!} p^x \left(1-p\right)^{n-x}; \qquad x=0,1,2,3,...,n$$

Immaginiamo adesso che ogni esperimento sia cadenzato nel tempo (ad esempio ogni secondo). Dunque con $n$ esperimenti si copre un determinato intervallo di tempo. Se, fermo restando l'intervallo di tempo complessivo, eseguiamo gli esperimenti con maggior frequenza, $n$ tende ad aumentare e $p$ a diminuire ma il loro prodotto, che rappresenta il valore atteso dei successi sull'intervallo di tempo complessivo, resta invariato.
Posto $\nu = pn$ possiamo scrivere:

$$p_X = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\nu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{n-x} = \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{n!}{(n-x)!} \frac{1}{n^x\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n \left[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-x+1)}{\left[n\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right]^x}\right]$$

Per $n$ -> ∞ risulta:

$$p_X = \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n \left[\frac{n^x}{\left[n\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right]^x}\right] = \frac{\nu^x}{x!}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^n = \frac{\nu^x}{x!}\exp(-\nu)$$

Posto $\nu = \lambda t$ si ha:

$$p_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

2. 2.a – Occorre per prima cosa calcolare il valore di $\nu$ sul periodo considerato, quindi:

   $$\nu = \int_0^3 \frac{2t}{3}dt + \int_3^5 2dt = 7$$

   A questo punto la probabilità do avere 3 o più eventi durante i primi 5 periodi risulta pari a

   $$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \left(e^{-7} + 7e^{-7} + \frac{7^2 e^{-7}}{2}\right) = 0,97$$

   2.b – Il valore di $\nu$ sui periodi 8, 9 e 10 e sui periodi 11, 12 e 13, vale:

   $$\nu = \int_7^{10} \frac{(13-t)}{3}dt = 4,5$$

   $$\nu = \int_{10}^{13} \frac{(13-t)}{3}dt = 1,5$$

   Pertanto la probabilità cercata vale: $\left(e^{-4,5} + 4,5e^{-4,5}\right)\left(e^{-1,5} + 1,5e^{-1,5}\right) = 0,034$

**Problema n°3 (8 punti)**

1. Si consideri un campione di dati di portata massima annua la cui media è pari a $m_X$ = 500 m$^3$/s e la cui deviazione standard è pari a $\sigma_X$ = 500 m$^3$/s. Stimare i parametri della distribuzione *EV1* e rappresentarla nel piano di Gumbel.
2. Stimare la portata con tempo di ritorno 100 anni.
3. Stimare il tempo di ritorno di una portata pari a 2000 m$^3$/s.
4. Definire il coefficiente di asimmetria e dire quanto vale per la distribuzione *EV1*

**Risposte**

1. $\hat{\alpha} = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\sigma_X = 389,85$

   $\hat{u} = m_X - 0,5772\dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\sigma_X = 274,98$

   Nel piano di Gumbel la distribuzione *EV1* ha equazione $x = 389,85y + 274,98$ con $y = -\ln\left(-\ln\left(1 - \dfrac{1}{T}\right)\right)$ con *T* tempo di ritorno.

2. $y = -\ln\left(-\ln\left(1 - \dfrac{1}{T}\right)\right) = y = -\ln\left(-\ln\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)\right) = 4,6$

   $x = 389,85y + 274,98 = x = 389,85 \cdot 4,6 + 274,98 = 2068,29$ m$^3$/s

3. $y = \dfrac{x - 274,98}{389,85} = \dfrac{2000 - 274,98}{389,85} = 4,42$

   $T = \dfrac{1}{1 - \exp\left[-\exp\left(-y\right)\right]} = \dfrac{1}{1 - \exp\left[-\exp\left(-4,42\right)\right]} \cong 85$

4. $\gamma_X = \dfrac{E\left[\left(X - m_X\right)^3\right]}{\left(\sqrt{E\left(X - m_X\right)^2}\right)^3} = 1,14$

**Problema n° 4 (8 punti)**

1. Si consideri un impianto di sollevamento dove si devono inserire 5 pompe. Ciascuna pompa ha una probabilità di essere difettosa del 10 %. Quante pompe devo acquistare per avere la probabilità del 95% che ve ne siano almeno 5 non fallate?
2. Si deve costruire un ponte su di un fiume. Il criterio di progetto è che la probabilità che una piena non raggiunga mai il profilo inferiore del ponte su di un periodo di 25 anni sia pari al 90 %. Quale tempo di ritorno devo utilizzare?
3. Determinare il tempo di ritorno che dovrebbe essere usato per progettare un’opera idraulica tale per cui la portata di progetto viene superata con una probabilità pari al 5% durante un periodo di 150 anni.

**Risposte**

1. Si utilizza la distribuzione binomiale negativa $p_{W_k}\left(w\right) = \begin{pmatrix} w-1 \\ k-1 \end{pmatrix}\left(1 - p\right)^{w-k} p^k$ . La probabilità che la generica pompa funzioni è $\underline{p}$=1-0,10=0,9.

   Se ne acquisto 5 la probabilità che tutte e 5 siano funzionanti è:

   $p_{W_k}\left(5\right) = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix}\left(1 - 0,9\right)^{5-5} 0,9^5 = 0,590$

   Se ne compro 6 la probabilità di averne 5 funzionanti è:

$$F_{W_k}(6) = p_{W_k}(5) + p_{W_k}(6) = \binom{5-1}{5-1}(1-0,9)^{5-5}\,0,9^5 + \binom{6-1}{5-1}(1-0,9)^{6-5}\,0,9^5 = 0,590 + 0,295 = 0,885$$

Se ne compro 7 la probabilità di averne 5 funzionanti è:

$$F_{W_k}(7) = p_{W_k}(5) + p_{W_k}(6) + p_{W_k}(7) =$$

$$= \binom{5-1}{5-1}(1-0,9)^{5-5}\,0,9^5 + \binom{6-1}{5-1}(1-0,9)^{6-5}\,0,9^5 + \binom{7-1}{5-1}(1-0,9)^{7-5}\,0,9^5 =$$

$$= 0,590 + 0,295 + 0,088 = 0,974$$

Pertanto il numero di pompe da acquistare è 7.

2. Non devo avere "successi" in 25 esperimenti:

   $\binom{25}{0} p^0 (1-p)^{25} = 0,90$ da cui $p$ =0,004. Il tempo di ritorno da utilizzare è $T$= 1/$p$=250 anni.

3. Il rischio $R$ su n anni è dato da $R = 1-(1-p)^n$

   Posto $R$ = 0.05 e $n$= 150 si ottiene:

   $p = 1-(1-0,05)^{1/150} = 0,00034$

   Il tempo di ritorno $T$ richiesto è:

$$T = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,00034} = 2941 \approx 3000 \text{ anni}$$