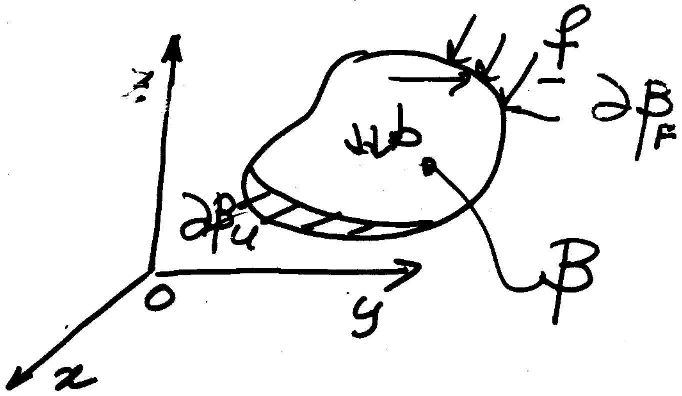
MECCANICA DELLE STRUTTURE

Richiami di meccanica dei continui

dal corso di S. d. C

• Pb. dell'equilibrio elastico (SdC cap V)



$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_F$$

• Eq. di equilibrio

1A $\quad \operatorname{div} \underline{T} + \underline{b} = \quad$ in B $\qquad \left(\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i,j = 1,3 \right.$

ovvero $\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \Big)$

\- - . - - -

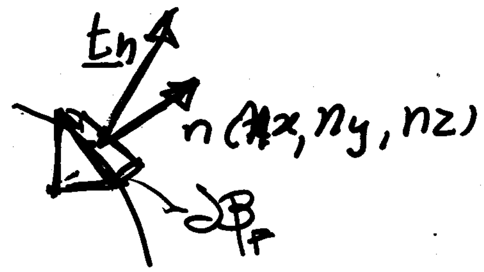
1B **Eq di equilibrio al contorno**

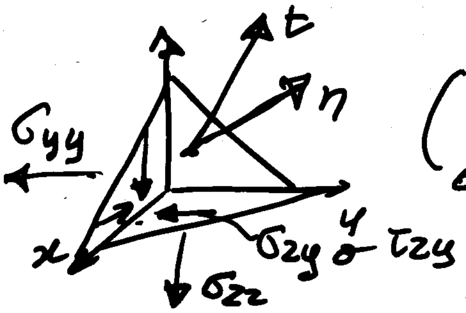
$\underline{T}\,\underline{n} = f \qquad$ su ∂B_F $\qquad \Big(\sigma_{ij} n_j = f_i \quad i,j = 1,3$

$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = f_x \Big)$

\- - - -

\- - - -





(Triedro di Cauchy)

•• Eq. di Compatibilità spostamento deformazioni

2A $\quad \underline{E} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + \nabla u^T \right)$ in B $\qquad \varepsilon_{ii} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ dilatazioni

$\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

$\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$

\- - - -

$\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$

\- - -

2B **Eq. di compatibilità al contorno**

$u_i = \overline{u_i} \qquad$ su ∂B_u

3. Equazioni costitutive

$$\boxed{\underline{T} = \underline{\mathbb{C}} : \underline{E} \iff \sigma_{ij} = C_{ijhk}\, \varepsilon_{hk}} \quad i,j,h,k = 1,3$$

Mat. iperelastico lineare $\underline{\mathbb{C}}$ sym, def. positivo

materiale iperelastico lineare isotropo. 2 sole costanti E e ν

$$\boxed{\underline{T} = 2G\underline{E} + \lambda \underbrace{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}_{= I_1(E)} \underline{I}}$$

cost. di Lamé:

$$\begin{cases} G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases}$$

ovvero nella notazione di Voigt

$$\underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} \end{vmatrix}$$

$\tau_{xy} = \sigma_{xy}$, $\tau_{xz} = \sigma_{xz}$

$\underline{\sigma} = \underline{\mathbb{C}}\,\underline{\varepsilon} \Rightarrow$ legame inverso

$\Rightarrow \underline{\varepsilon} = \underline{\mathbb{C}}^{-1}\underline{\sigma}$ (legge di Hooke)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) \\ \dots \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \dots \end{cases}$$

nelle usuali ipotesi – $\begin{cases} \text{I} & \text{Mat. iper elastico lineare} \\ \text{II} & \text{spost. e def. infinitesime} \\ \text{III} & \text{vincoli perfetti (i.e lisci e bilateri)} \\ \text{IV} & \text{Forze applicate staticamente} \end{cases}$

il pb. dell'equilibrio elastico che consiste nel determinare le $\boxed{15 \text{ incognite}}$ in B

$\underline{u}^T (u_x, u_y, u_z)$ (3)

$\underline{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{xx}, \text{-----} \gamma_{yz})$ (6)

$\sigma^T = (\sigma_{xx}, \text{----} \tau_{yz})$ (6)

è retto dalle $\boxed{15 \text{ equazioni}}$:

3 eq. di equilibrio (1)

6. eq. di compatibilità (2)

6. eq. costitutive

Si può dimostrare:

- Il pb è ben posto e la soluzione esiste e dipende con regolarità dai dati.
- - La soluzione è unica T. di Kirchhoff.
- - - $L_{12} = L_{21}$ T. di Betti - Maxwell ----
- - - - Fra tutti i campi di spostamento cinematicamente ammissibili (i.e suff. regolari e che verificano le $z_{A e B}$) il campo u^o soluzione del pb rende minimo l'EPT $\Pi(u)$

$$\Pi(u^o) = \left(\int \Phi(u^o) - L_e(u^o) \right) \leq \Pi(u) \quad \forall u \text{ cin amm.}$$

Eq. di NAVIER (metodo degli spostamenti)

si sostituiscono le eq di compatibilità 2_A nelle eq. costitutive 3

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} \Longrightarrow$$

$$\sigma_{ij} = G\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$\Longrightarrow$ sostituendolo nelle eq. di equilibrio 1_A si perviene alle equazioni

$$G\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + b_i = 0$$

ovvero $$\boxed{G\nabla^2\underline{u} + \frac{G}{(1-2\nu)}\,\mathrm{grad\,div}\,\underline{u} + \underline{b} = 0}$$

Eq di Beltrami-Michell (metodo delle forze)

Si perviene alle seguenti equazioni di compatibilità in termini di tensioni.

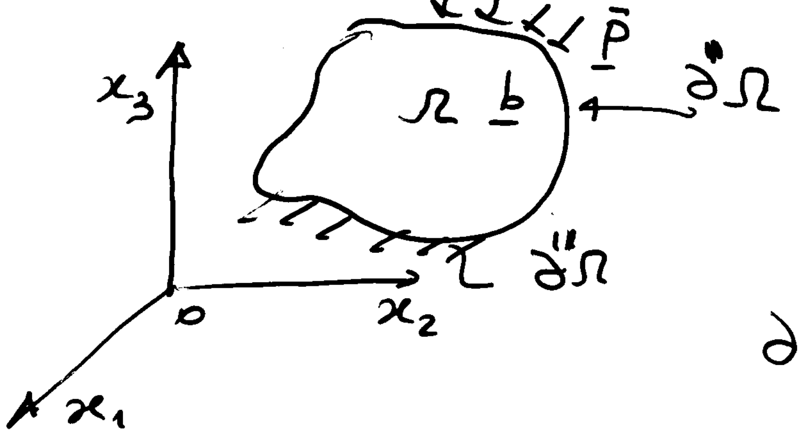
$$\boxed{(1+\nu)\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x_i\partial x_j} = 0} \qquad i,j = 1,\dots 3$$

a partire dalle eq. di Saint Venant di congruenza interna.

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2}$$

$$2\frac{\partial\varepsilon_{ii}}{\partial x_j\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial\varepsilon_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial\varepsilon_{kj}}{\partial x_i}\right)$$

Dal corso di S.d.C



su $\partial''\Omega$ $u_i = \bar{u}_i$
(b.c. ESSENZIALI)
su $\partial'\Omega$ $\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i$
(b.c. NATURALI)
$\partial\Omega = \partial'\Omega \cup \partial''\Omega$

P.(SPOSTAMENTI) VIRTUALI $\rightarrow$ PLV

$v = \delta u$ variazione $\qquad v_i = 0$ su $\partial''\Omega$

$$L_{ve} = \int_\Omega b_i v_i \, dv + \int_{\partial'\Omega} \bar{p}_i v_i \, ds = \int_\Omega \sigma_{ij}(\underline{u}) \varepsilon_{ij}(v) \, dv \qquad (1)$$

mat. Iper-elastico lineare $\quad A_{ijhk}$ sym, def pos

$$\sigma_{ij}(u) = A_{ijhk} \, \varepsilon_{hk}(u)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad ; \left(\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)\right)$$

$\underline{E}$. tensore def infinitesima

Il PLV può essere riscritto nella forma

$$\int_\Omega A_{ijhk} \, \varepsilon_{ij}(u) \, \varepsilon_{hk}(v) \, dv = \int_\Omega b_i v_i \, dv + \int_{\partial'\Omega} \bar{p}_i v_i \, ds \qquad (1)_s$$

ovvero

$$a(u, v) = l(v) \qquad (2)$$

a forma bilineare, sym, def pos

RAPPRESENTAZIONE DI VOIGT

$$\underset{\in Lin}{\underline{T}} \Rightarrow \underset{\in R^6}{\underline{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{vmatrix} \quad ; \quad \underset{\in Lin}{\underline{E}} \Rightarrow \underset{\in R^6}{\underline{\varepsilon}} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \gamma_{12} = \\ \gamma_{13} = \\ \gamma_{23} = \end{array} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{vmatrix}$$

In tal modo $\underline{T} : \underline{E} = \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}$

$$\sigma_{ij} = A_{ijhk}\varepsilon_{hk} \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \cdots & A_{1123} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & \cdots & A_{2223} \\ - & - & - & & \\ - & - & - & & \\ - & - & - & & \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & \cdots & A_{2323} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{\varepsilon}}$$

Infine $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

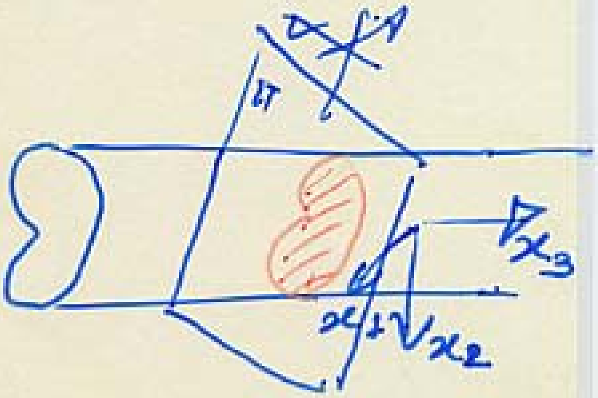
$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x_1 & - & - \\ & \partial/\partial x_2 & \\ & & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & - \\ \partial/\partial x_3 & & \partial/\partial x_1 \\ - & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{B}\,\underline{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{B}\,\underline{u}}$$

Nel PLV (1_{bis}) si scrive pertanto la forma $Q(U,V)$ come

$$\int_\Omega \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}\, dv = \int_\Omega \left(\underline{D}\,\underline{B}\,\underline{U}\right)^T \cdot (BV)\, dv = \int_\Omega \underline{U}^T \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B}\,\underline{V}\, dv$$

PROBLEMI PIANI



Pb piano di deformazione
(plane strain) $\underline{u_1}, \underline{u_2}$

$u_3 \equiv 0$.

π piano di sym $\Rightarrow \begin{cases} u_3 = 0 \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \equiv 0 \end{cases}$

$\Downarrow$ MAT ISOTROPO

$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

mentre $\sigma_{33} = \cancel{2\mu\varepsilon_{33}} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \cancel{\varepsilon_{33}})$

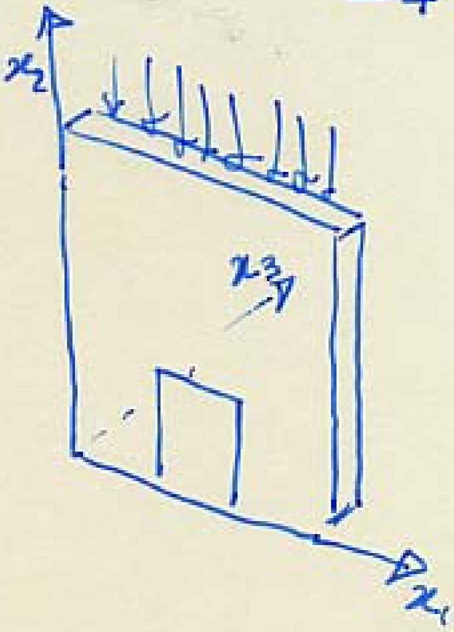
Tuttavia $\sigma_{33}\varepsilon_{33} = 0$

In questo caso $\underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix}$, $\underline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{vmatrix}$

$$\underline{D} = \begin{vmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{vmatrix} \cdot \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

nel caso isotropo

Problema piano di tensione
(plane stress) u_1, u_2



$$\langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\langle \varepsilon_{13} \rangle = \langle \varepsilon_{23} \rangle = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right]$$

$$\Longrightarrow \underline{\sigma_{33} \cdot \varepsilon_{33} = 0}$$

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$$ nel caso isotropo

In entrambi i pb. piani

$$\underset{(3,2)}{\underline{B}} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x_1 & \\ & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow L_{u} = a(u,v) = \int_\Omega \underline{u}^T \underline{B}^T \underline{D}\, \underline{B}\, \underline{v}\, d\Omega$$

CORSO DI MECCANICA DELLE STRUTTURE

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Leone Corradi Dall'Acqua, Meccanica delle strutture, vol. 2-3, McGraw Hill
2. Belluzzi O., Scienza delle costruzioni, vol. 3, Zanichelli
3. Szabò B., Babuska I., Finite element analysis, John Wiley & Sons.

TESTI CONSIGLIATI

1. Pozzati P., Teoria e tecnica delle strutture, UTET
2. Thimoshenko S., Goodier J.N., Theory of elasticity, McGraw Hill.
3. Thimoshenko S., Woinowsky-Krieger, Theory of plates & shells, McGraw Hill.
4. Leonhardt F., Monning E., C.a & c.a.p. calcolo di progetto e tecniche costruttive, vol 1, ed di Scienza e Tecnica.