

CAP. I
INTRODUZIONE AL METODO
DEGLI ELEMENTI FINITI

— PROBLEMI MONODIMENSIONALI —
(1-D)

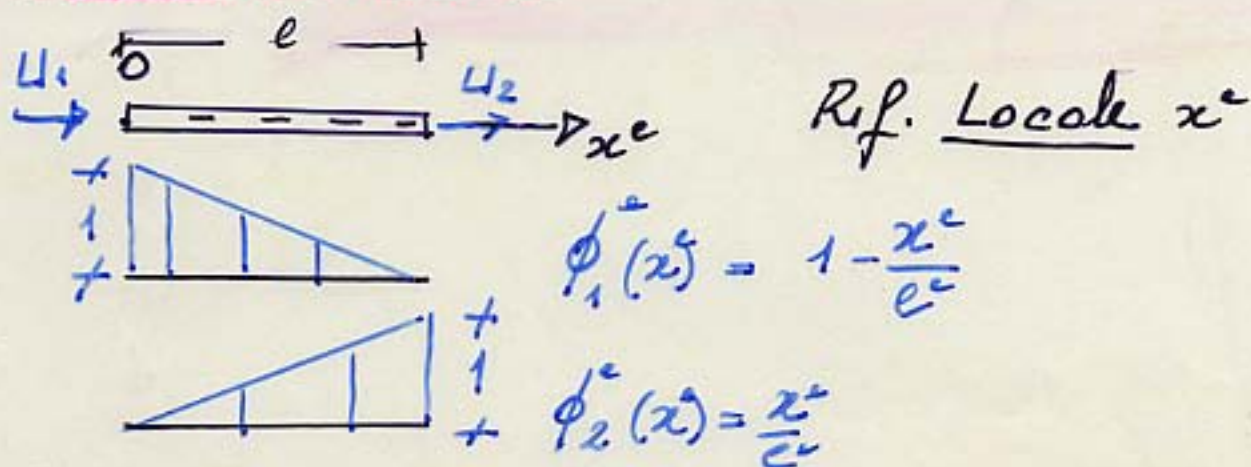
- FUNZIONI DI FORMA (SHAPE.)
e FUNZIONI DI BASE — pag 1-4
- CARICHI MODALI EQUIVALENTI — pag 5
- MAT. DI RIGIDEZZA E SUE PROPRIETA' pag 6-10
- ESEMPI pag 11-16 bis —
- APPENDICE A1 (RICHIAMI DI MATEMATICA)

STRUTTURE COMPOSTE DA ELEMENTI MONODIMENSIONALI

- 1 -

DEFINIZIONE DELLE PROPRIETA' DELL'ELEMENTO

ASTA (o TRUSS) : MODELLO CINEMATICO
- MODELLO LINEARE -



ϕ^e funzioni di forma o shape functions
(spesso denominate anche $N(x)$ vedi Conodi, Elementi finiti)
campo di spostamenti.

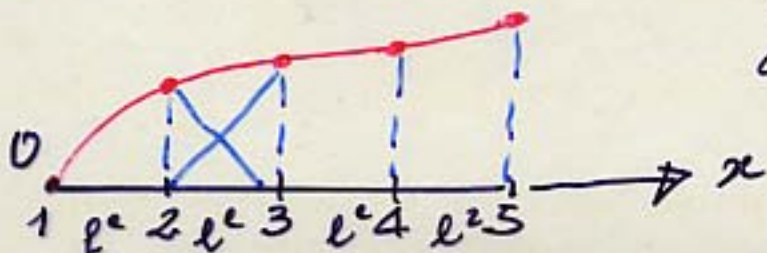
$$U^e(x^e) = U_1 \phi_1^e(x) + U_2 \phi_2^e(x) = \sum_L U_i^e \phi_i^e =$$

$$\underline{\Phi} \underline{U} = [\phi_1, \phi_2] \underline{U} \quad (1) \quad \text{all'interno di } l^e$$

PROPRIETA' I

Il campo di spostamenti è cinematicamente ammissibile (o compatibile):

I a) $u(x)$ è continuo se gli spostamenti nei nodi di 2 elementi contigui sono uguali.



-2-

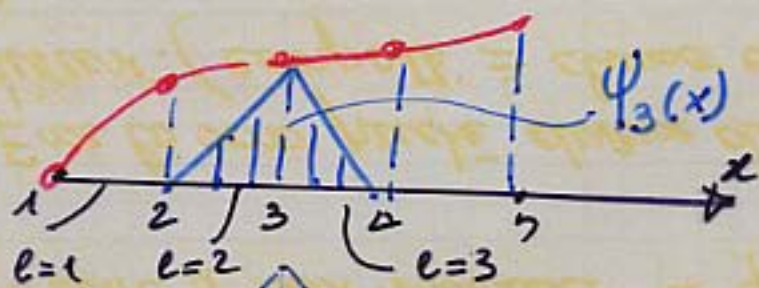
I_b) $u(x)$ verifica le condizioni di congruenza al bordo ($u_i = \bar{u}_i$ su ∂P_u) se ed u viene imposto di assumere particolari valori eg. $u_i = 0$ nell'esempio

I_c) Il campo di spostamento nell'intera struttura può essere scritto nella forma

$$u(x) = \sum_k \psi_k(x) u_k \quad (x \text{ rif. globale})$$

ove le funzioni $\psi_k(x)$ sono delle funzioni di base (basis functions) e valgono 1 nel nodo e 0 in quelli adiacenti

(le ψ sono composte dalle funzioni di forma efficienti al nodo 1)



ϕ_2 el. 2

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \epsilon$$



ϕ_1 el. 1/3

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \epsilon$$

I_d) l'E_{pot.} elastica è finita

$$\Pi^e(x^e) = \int_0^L \frac{1}{2} E (\epsilon^e(x^e))^2 dx^e$$

è finita ed integrabile nel senso di Lebesgue (o meno di un insieme di misura nulla)

$$\begin{aligned} \text{esempio } \epsilon_x &= \frac{du}{dx} \\ \epsilon^e(x^e) &= \frac{d}{dx^e} \left(\sum_i \phi_i(x^e) u_i \right) \\ &= \sum_i u_i \frac{d\phi_i^e}{dx^e} \end{aligned}$$

Gli elementi che generano un campo di spostamenti cin. ammissibili e verificano le le proprietà $I_a - I_d$ son detti element. compatibili.

REMARK

Le funzioni base ψ_i costituiscono le basi dello spazio vettoriale discreto. (nell'esempio $N=5$)
Di fatto si è trasformato un pb con una funzione incognita $u(x)$ (che ovviamente ha ∞ valori uno per x) in un pb con $N=5$ incognite $u_1, \dots, u_5 \Rightarrow$ Discretizzazione

Come tutte le basi vettoriali le ψ_i devono essere

i) Linearmente indipendenti

Essi lo sono perché diverse da zero su insieme diversi. (compatti $\Rightarrow$ chiuso e limitato)

ii) Ciascuna funzione di base è cinematicamente ammissibile (ovvero è una sol. possibile)

$\Rightarrow$ Siamo in presenza di un metodo alle GALERKIN (= Ritz-GALERKIN)

iii) la soluzione ^(vedi Appendice A₁) approssimata

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N u_k \psi_k(x) \quad \text{converge}$$

alle soluzione esatta $u^0(x)$ al crescere degli elementi.

$$\left| \Pi(u^N) - \Pi(u^0) \right| < \epsilon \quad \text{per } N \geq N_\epsilon \quad , \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \Pi(u^N) - \Pi(u^0) \right| \rightarrow 0$$

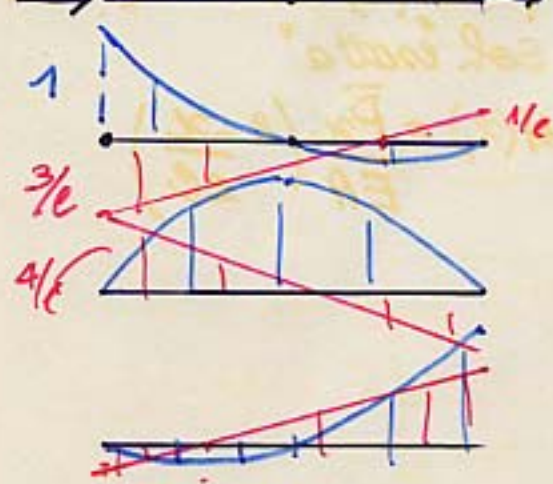
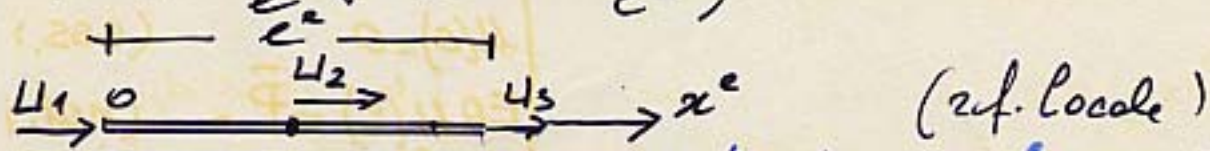
MODELLO QUADRATICO

-4-

Si assume un polinomio approssimante di II grado

$$u^e(x^e) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{x^e}{e^e} + \alpha_3 \frac{x^{e^2}}{e^{e^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x^e = \frac{1}{e^e} \left(\alpha_2 + 2\alpha_3 \frac{x^e}{e^e} \right)$$



$$\phi_1(x^e) = 1 - 3\frac{x^e}{e^e} + 2\frac{x^{e^2}}{e^{e^2}}$$
$$\phi_1'(\cdot) = \frac{1}{e^e} \left(-3 + 4\frac{x^e}{e^e} \right)$$

$$\phi_2(x^e) = 4\left(\frac{x^e}{e^e} - \frac{x^{e^2}}{e^{e^2}}\right) \quad \phi_2' = \frac{4}{e^e} \left(1 - 2\frac{x^e}{e^e} \right)$$

$$\phi_3(x^e) = \left(-\frac{x^e}{e^e} + 2\frac{x^{e^2}}{e^{e^2}} \right) \quad \phi_3' = \frac{1}{e^e} \left(-1 + 4\frac{x^e}{e^e} \right)$$

$$u^e(x^e) = \underline{\Phi} \underline{U} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3] \underline{U}$$

$$\varepsilon_x = \frac{d\underline{\Phi}}{dx^e} \cdot \underline{U} = [\phi_1', \phi_2', \phi_3'] \underline{U} = \underline{B} \underline{U}$$

B mat. delle derivate delle funzioni di forma

Una approssimazione è detta MINIMALE e CONFORME

se le funzioni di forma sono del grado più basso possibile affinché u sia cinematicamente

ammmissibile. Ovvero lo spazio approssimante

sia il più vasto (i.e. meno regolare) possibile

Il Modello lineare è minimale e CONFORME

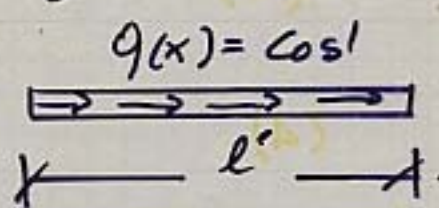
FORZE NODALI

-5-

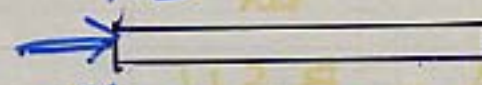
$$\underline{P}_{LV}$$

$$L_e = \underline{F}^T \underline{\delta U} = \int_0^{e^e} q(x^e) \cdot \underline{\delta u}(x^e) dx^e = \quad (2e)$$

$$= \int_0^{e^e} q \underline{\Phi}(x^e) dx^e \cdot \delta U \Rightarrow F_1 = \int q(x) \phi_1(x^e) dx$$



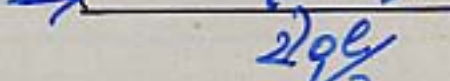
$$F_1 = ql/2$$



$$F_2 = ql/2$$

el. lineare

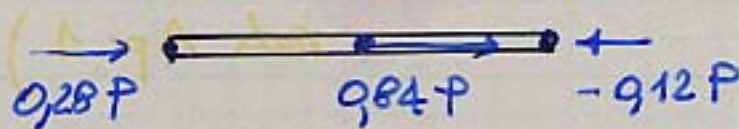
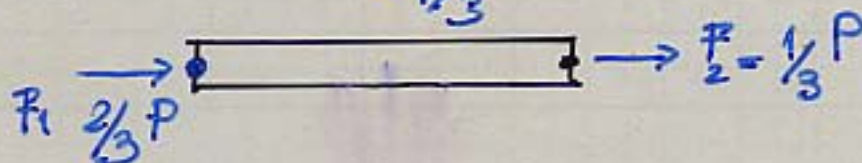
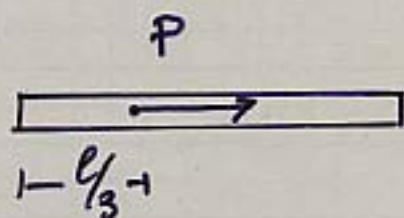
$$ql/6$$



$$ql/6$$

el. quadratico

$$2ql/3$$



REMARK

La forza concentrata va trattata nel senso delle distribuzioni.

Con rif. all'esempio si scrive

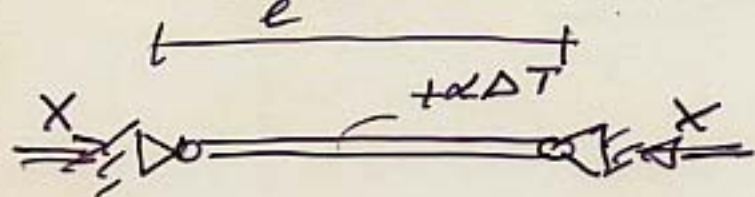
$$P \delta(x - 0,3 \frac{x^e}{e^e}) \Rightarrow \delta \text{ dist. di Dirac}$$

$$P_1 = \int_0^{e^e} P \delta(x^e - 0,3) \varphi_1(x^e) dx^e = P \cdot \varphi_1(x^e = 0,3) =$$

$$= 0,28 P$$

CARICHI NODALI EQUIVALENTI A DISTORSIONI IMPRESSE

DISTORSIONI DISTRIBUITE



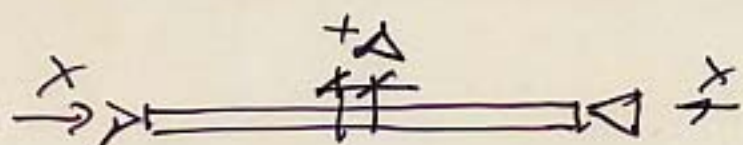
$$\frac{Xl}{EA} = \alpha l \Delta T \Rightarrow X = \alpha EA \Delta T$$

$$F^e = \begin{bmatrix} +\alpha EA \Delta T \\ -\alpha EA \Delta T \end{bmatrix}$$

$$F_{eL}^e = \int_0^l -\underbrace{\sigma \epsilon^0}_{\psi_1'} dx = \int_0^l -B_L^T EA \underbrace{\epsilon_0}_{\alpha \Delta T} dx$$

$$F_{eL}^e = \int_0^l -\left(-\frac{1}{l}\right) EA \alpha \Delta T dx = +\alpha EA \Delta T$$

DISTORSIONE CONCENTRATA



$$\frac{Xl}{EA} = \Delta \Rightarrow X = \frac{EA \Delta}{l}$$

$$L_e = \text{~~EA \Delta~~} - N(\bar{x}) \Delta(\bar{x})$$

$$F_{eL}^e = -EA \psi_1'(\bar{x})$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO

-6-

Con riferimento al pb modello si scrive il PLV

$$Lvi = \int_0^{le} A \sigma_x \delta \epsilon_x dx^e = \quad (2)$$

Tenendo conto che

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \frac{du^e(x^e)}{dx^e} = \underline{E} \underline{B} \underline{U} \quad (3)$$

$$\delta \epsilon_x = d \frac{\delta u(x^e)}{dx^e} = \underline{B} \delta \underline{U} \quad (4)$$

ASSUMENDO le stene ^{derivati del} mot delle funzioni di forma $\underline{\Phi}$, si esprimono per le tensioni e lo spostamento virtuale, le stene funzioni di base o di tentativo (trial) (vedi Ap. 4)

In alcuni pb (e.g. di meccanica dei fluidi) ciò non viene fatto

Sostituendo 3 e 4 in 2 e ricordando la def. di prodotto scalare si ha (vedi Appendice 2)

$$\begin{aligned} Lvi &= \int_0^{le} \underline{S} \underline{U}^T \underline{B}^T \underline{E} \underline{A} \underline{B} \underline{U} dx = \\ &= \underline{S} \underline{U}^T \underline{K}^e \underline{U} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{ove } \underline{K}^e = \frac{EA}{e^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \int_0^{le} \underline{B}^T \underline{E} \underline{A} \underline{B} dx^e \quad (6)$$

è la **MATRICE DI RIGIDEZZA NEL RIFERIMENTO LOCALE**

K_{ij}^e Forza i^{ma} indotta da spostamento $U_j = 1$
(coef di rigidezza)

- 7 -

Uguagliando il lavoro esterno dovuto ai carichi $(2a)$ e quello interno $(2b)$

$$L_{Vi} = L_{Ve} \Rightarrow \underline{S} \underline{U}^T \underline{F}^e = \underline{S} \underline{U}^T \underline{K}^e \underline{U}^e \quad (7a)$$

$\Rightarrow$ Eq. Eq. dell'elemento

$$\boxed{\underline{F}^e - \underline{K}^e \underline{U}^e} \quad (7b)$$

II PROPRIETA' DELLA MATRICE DI RIGIDENZA

$\underline{K}^e$ dell'elemento
mat. simmetrica semidefinita
positiva

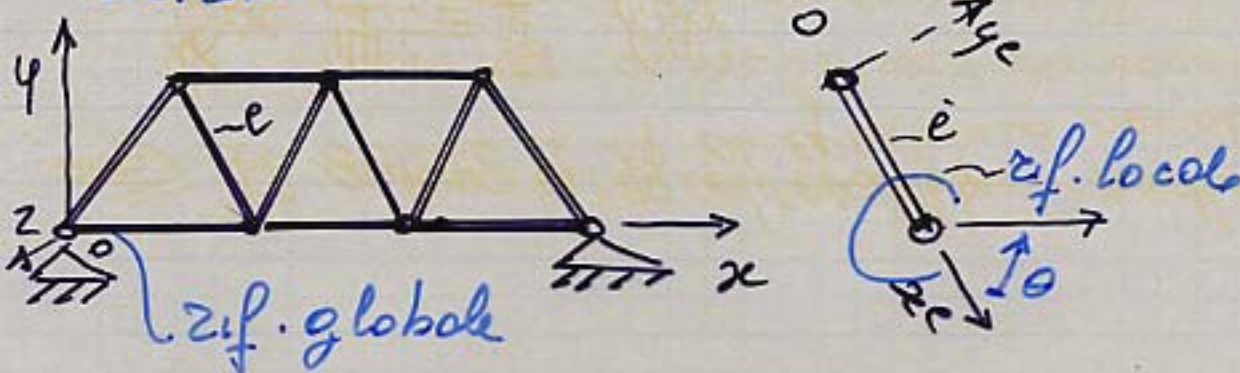
IIa La simmetria che al continuo deriva dal Teorema di Betti (MAXWELL) ($L_{12} = L_{21}$) è al discreto dovuta al fatto di scegliere le stesse funzioni di forma ϕ_i (o di base ψ_i) per $U^e(x)$ e $SU^e(x)$

IIb La semidefiniteness, ovvero la presenza di autovalori nulli di K^e , deriva dal fatto che essendo l'elemento privo di vincoli l'eq. di equilibrio $(7b)$ è verificata anche per spostamenti di moto rigido che sono sol. di 7 .

IIc La positività deriva dalla positività del potenziale elastico (II° p. Termodinamica)
 $\Rightarrow E > 0$

ASSEMBLAGGIO E. MATRICE DI RIGIDITÀ ⁻⁸⁻ DELLA STRUTTURA

* SISTEMA DI RIFERIMENTO GLOBALE ESTERNO



$$\underline{u} = \underline{T} \underline{u}^e$$

T matrice di trasformazione

- Rotazione assi
matriche che trasformano le
coordinate

$$\underline{R} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

R^e matrice che trasforma l'elemento $\left(\begin{array}{c|c} \underline{R}^e & \underline{R}^e \\ \hline 0 & \underline{R}^e \end{array} \right)$

$$\underline{\bar{K}}^e = \underline{R}^{eT} \underline{K}^e \underline{R}^e \quad (8)$$

Matrice di rigidità dell'elemento nel riferimento globale

* ASSEMBLAGGIO

Operazione che costruisce la continuità
della struttura imponendo quello degli
spostamenti nodali.

U vettore spost nodali della struttura

F vettore forze nodali

$$\boxed{\underline{\bar{K}} = \underline{U}^e \underline{\bar{K}}^e} \quad (9)$$

- 9 -

$\underline{K}$ Matrice di rigidità globale della struttura
 Spero conviene distinguere gli spostamenti:
 fra quelli liberi $\underline{U}_L$ e quelli vincolati $\underline{U}_0$.

$$\underline{U}^T = [\underline{U}_L, \underline{U}_0]$$

$$\begin{vmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L0} \\ \underline{K}_{0L} & \underline{K}_{00} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{U}_L \\ \underline{U}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{F} \\ \underline{R} \end{vmatrix} \quad \text{reaz. vincolari}$$

$\underline{\bar{K}}$ è semidefinita, sono possibili i moti
 rigidi della struttura

$\underline{K}_{LL}$, relativa alla struttura con vincoli,
 è simmetrica def. pos.

Nel seguito con $\underline{K}$ si indicherà in genere
 la matrice $\underline{K}_{LL}$ della struttura con vincoli.
 (per semplicità di notazione)

$\Rightarrow$ Il sistema di eq. di equilibrio nodale

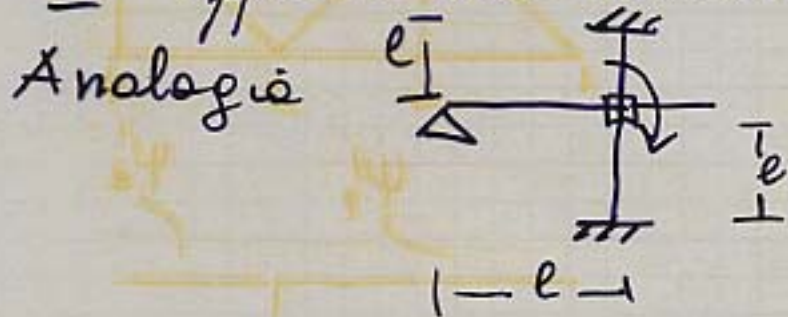
$$\underline{K}_{LL} \underline{U}_L = \underline{F} \quad (9)$$

per le proprietà di $\underline{K}_{LL}$ ammette una unica
 soluzione $\forall \underline{F}$. (T. di Kirchhoff)

III PROPRIETA' DELLA MATRICE $\underline{K}$ (ovvero del sistema di eq. (9))

III_a SOMMABILITA'

I coef. delle matrici di rigidezza globale $\underline{K}$ possono essere ottenuti per somma algebrica dei coefficienti delle matrici elementari $\underline{K}^e$ appartenenti allo stesso nodo



K del nodo come
somma di coeff delle
singole travi

$$K_q = (4 + 4 + 3) \frac{EJ}{l}$$

E' conseguenza della sommabilità del
potenziale elastico (o del lavoro interno)
dei singoli elementi.

III_b Sparsità

2 elementi (o 2 aste) che non hanno nodi in
comune non hanno coef. di rigidezza mutui.

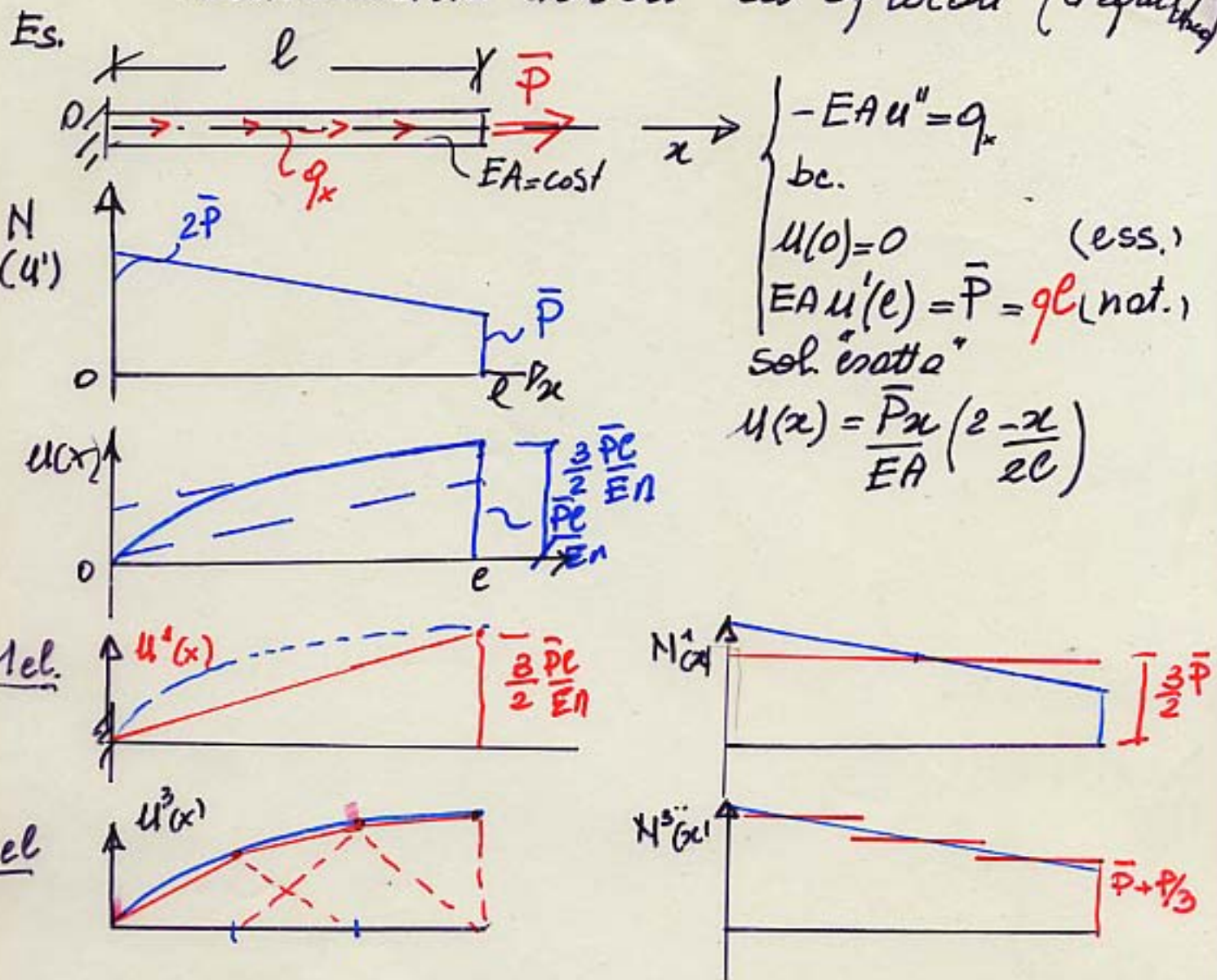
III_c Simmetria

La proprietà è, come solito, conseguenza
del teorema di Betti ($L_{12} = L_{21}$)

REMARKS

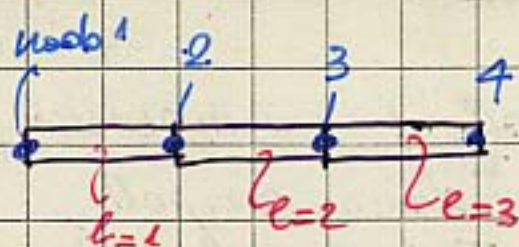
Poiché il calcolo di $\underline{K}^e$ può essere fatto elemento x elemento
esso viene in realtà fatto una volta per tutte per
l'elemento di riferimento

Formulazioni deboli ed eq locali. (d'equilibrio)

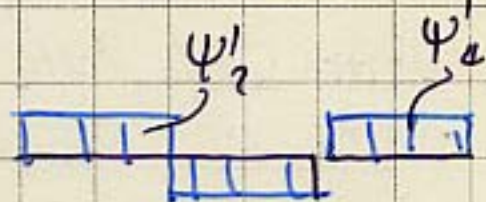
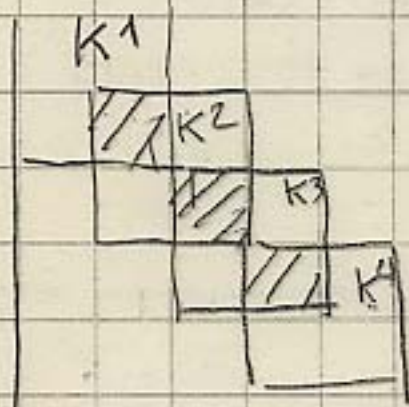
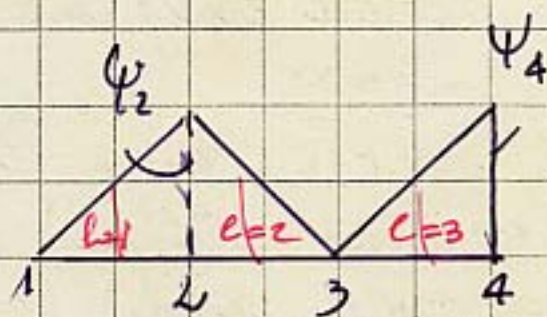


Commenti

- Le eq. locali (o indefinite) sono violate all'interno degli elementi.
- Le eq. naturali al bordo sono violate
- • • $u'(N)$ non è continuo
- Si osservi inoltre
- Sostanziale eq. con diff. finite centrali
- I vari codici per fornire u' (tensioni) continue introducono artifici tipo mediana e risultati nei nodi; il che se nel loro esame è corretto, in generale induce "pb" peggiori



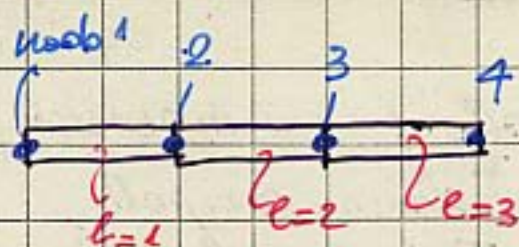
El lineare e. tratti



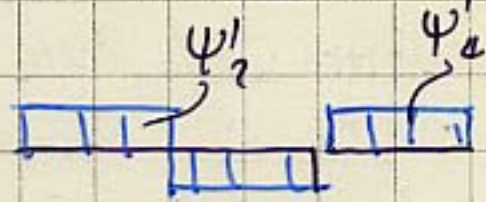
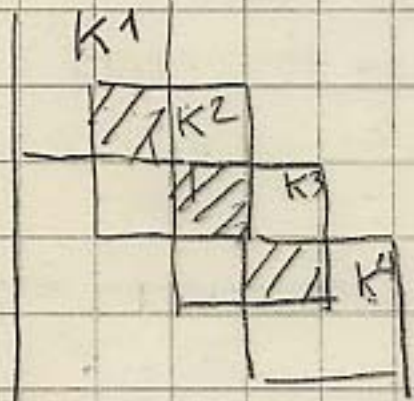
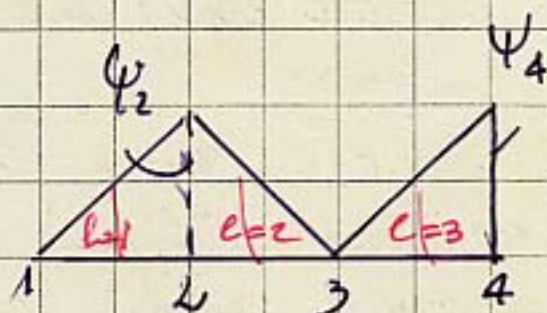
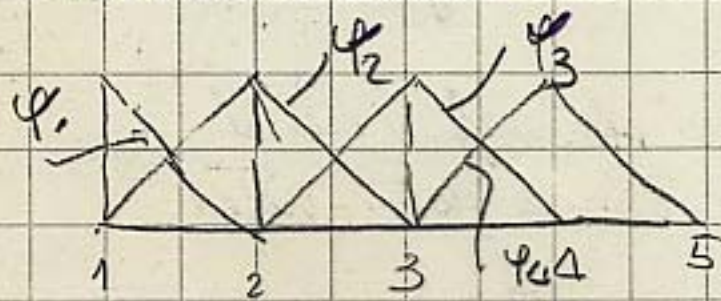
K TRIDIAGONALE

SONNABILITA'
SPARSITA'
SINMETRIA

- 10 bis -



El lineare e. tratti



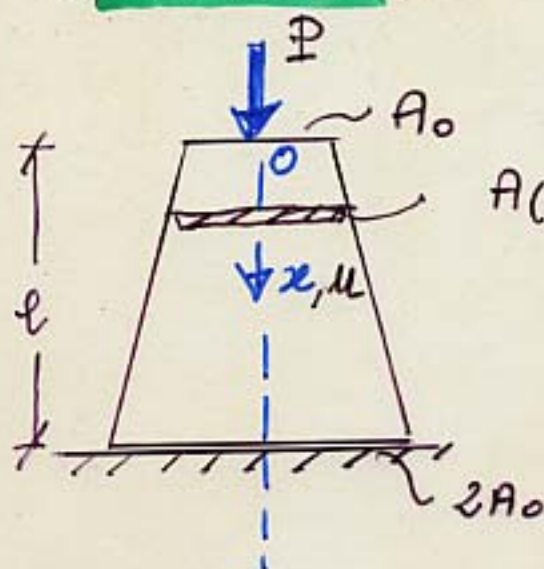
K TRIDIAGONALE

SONNABILITA'
SPARSITA'
SINMETRIA

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI "ELEMENTI FINITI"

-11-

- ESEMPIO N.1 -



$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

Cond. al contorno

$$u(l) = 0$$

b.c. essenziale o agli
spostamenti

$$N(0) = EA_0 u'(0) = -P_0$$

b.c. naturale (nulle forze)

Eq. equilibrio

$$\begin{array}{c} \leftarrow N \\ \leftarrow \quad \rightarrow N + dN \end{array} \quad \frac{dN}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \text{membr. } (N(x) = A(x) \cdot E \cdot \frac{du}{dx})$$

$$\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du}{dx} \right] = 0$$

Eq. di equilibrio in termini
di spostamenti

Soluzione "esatta" (o classica, o forte)

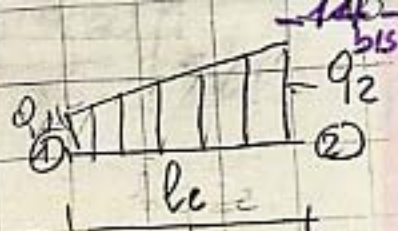
$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_x(x)}{E} = -\frac{P}{EA_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)} \Rightarrow$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x \epsilon_x(x) dx, \quad u(l) = u_0 + \int_0^l \epsilon_x dx = 0$$

$$\Rightarrow u_0 = -\int_0^l \epsilon_x dx = -\int_0^l \left(-\frac{P}{EA_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)} \right) dx = \left(\text{posto } \xi = \frac{x}{l} \right)$$

$$\frac{Pl}{EA_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi} = \frac{Pl}{EA_0} \ln 2 = \boxed{0.69315} \frac{Pl}{EA_0}$$

iii) Vettore dei carichi nodali per un carico lineare



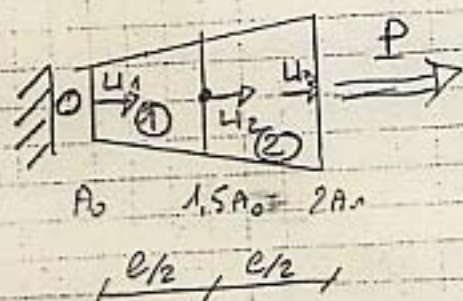
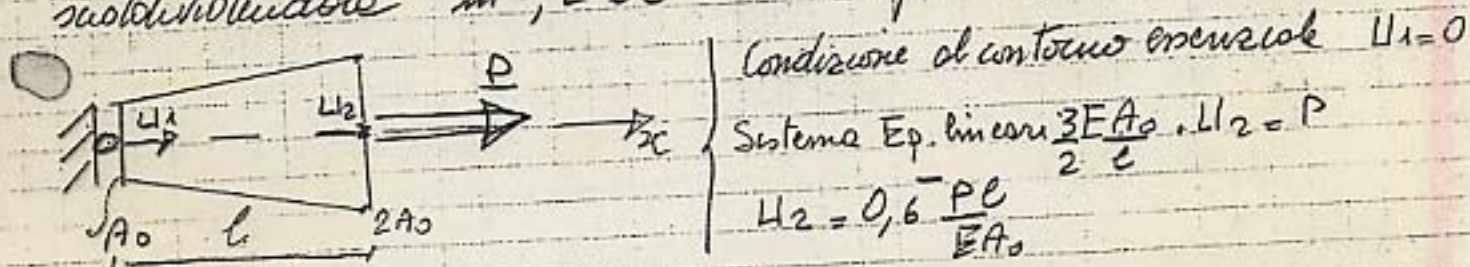
$$F_1 = \frac{le}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_1(\xi) q(\xi) d\xi = \frac{le}{6} (2q_1 + q_2)$$

$$F_2 = \frac{le}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_2(\xi) q(\xi) d\xi = \frac{le}{6} (q_1 + 2q_2)$$

carico uniforme $q_1 = q_2 \Rightarrow F_1 = F_2 = \frac{ql}{2}$

Esempio n. 1

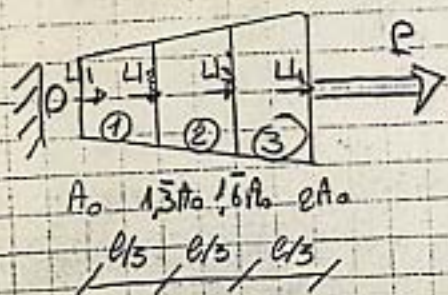
A titolo d'esempio si risolve l'asta esaminata col metodo di Ritz suddividendola in 1, 2 e 3 elementi finiti "lineari"



$U_1 = 0$

$\frac{EA_0}{l}$	$(1,25 + 1,75)$	$-1,75$	U_2	$=$	0
$(\frac{P}{l})$	$-1,7$	$1,75$	U_3	$=$	P

$U_3 = 0,686 \frac{Pl}{EA_0}$



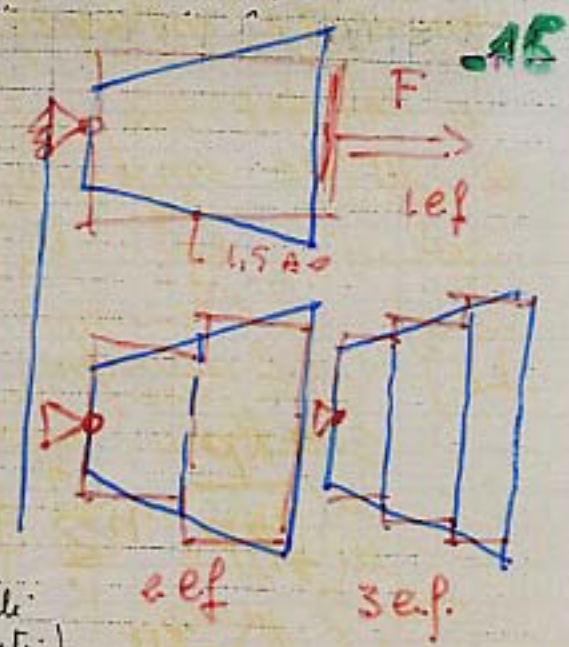
$U_1 = 0$

$\frac{EA_0}{l}$	$(1,16 + 1,5)$	$-1,5$	0	U_2	$=$	0
$(\frac{P}{l})$	$-1,5$	$(1,5 + 1,83)$	$-1,83$	U_3	$=$	0
$(\frac{P}{l})$	0	$-1,83$	$(1,83)$	U_4	$=$	P

$U_4 = 0,690 \frac{Pl}{EA_0}$

La soluzione esatta risulta $0,693127 \frac{Pl}{EA_0}$

La convergenza del metodo alla soluzione esatta è rappresentata dal grafico seguente



Il grafico ^{critica} mostra una convergenza monotona dal di sotto (tipo "lower bound") alla soluzione esatta, cosa è tipico del metodo degli elementi finiti basati sul Principio di minimo dell'E.P.T.

Inoltre si osserva che l'overestimation "lo spostamento ottenuto in un generico punto col metodo degli elementi finiti con interpolazione dello spostamento è sicuramente inferiore al valore esatto" è erranea.

Il ^{giustifica} metodo dei E.F. (con il metodo di) la convergenza dell'energia P.T. corrispondente allo spostamento minimizzato al valore esatto dell'E.P.T.

$$\Pi(u_{AP}^n) \Rightarrow \Pi(u) \quad n \rightarrow \infty$$

e che sempre risulta $\Pi(u_{AP}^n) \geq \Pi(u)$

^{ovvero, peraltro di} L'esempio ora discusso si riferisce ad una struttura a cui è applicato un carico concentrato e che per esso il Teorema di Clapeyron assicura che (l'energia potenziale elastica V) risulta

$$V = \frac{1}{2} P \bar{u}$$

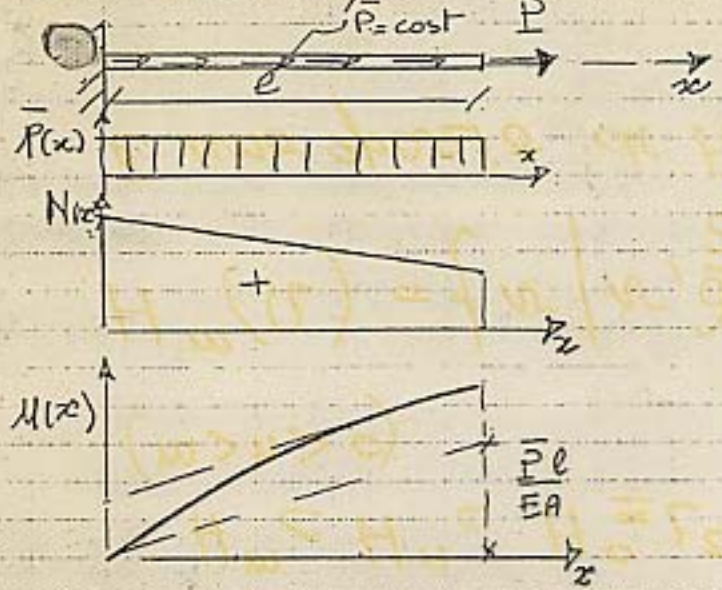
$\bar{u}$ spostamento del punto di applicazione della forza

e dunque, essendo $\Pi(u) = V - P \bar{u}$, $\Pi(u) = -\frac{1}{2} P \bar{u}$

Essendo dunque $\Pi(u_{AP}) \geq \Pi(u) \Rightarrow -\frac{1}{2} P \bar{u}_{AP} \geq -\frac{1}{2} P \bar{u} \Rightarrow \bar{u}_{AP} \leq \bar{u}$

nel caso in oggetto si ha che $\bar{u}_{AP} < \bar{u}$

la discretizzazione del lavoro dei carichi interni, sotto forma di carichi nodali equivalenti.



$$\bar{P} = \bar{p}l \quad - \text{ES 12-}$$

condizioni al contorno

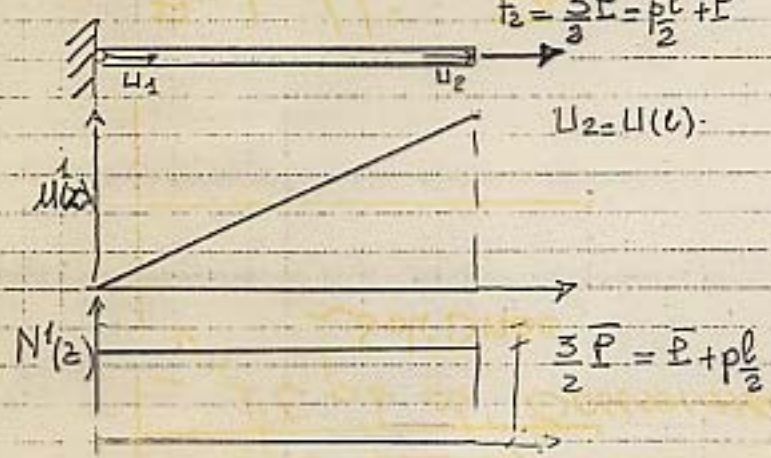
$$\begin{cases} u(0) = 0 & \text{essenziale} \\ EA u'(l) = N(l) = -\bar{P} & \text{naturale} \end{cases}$$

l'equazione $EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\bar{p}$

la soluzione $u(x) = \frac{\bar{p}x}{EA} \left(2 - \frac{x}{2l} \right)$

e quindi $u(l) = \frac{3}{2} \frac{\bar{p}l}{EA}$

Elemento finito



$$K^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \frac{3}{2} \frac{\bar{p}l}{EA} \end{cases}$$

-3 elementi finiti



$$\begin{aligned} F(1) &= \bar{p} \frac{l}{6} \\ F(2) &= \bar{p} \frac{l}{6} \\ F(3) &= \bar{p} \frac{l}{6} \\ F(4) &= \bar{p} \frac{l}{6} + \bar{P} \end{aligned}$$

otto carichi nodali equivalenti.

cond. al contorno essenziale.

$$\frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pl/3 \\ pl/3 \\ \bar{P} + pl/6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{11}{18} \frac{\bar{p}l}{EA} \\ u_3 &= \frac{20}{18} \frac{\bar{p}l}{EA} \\ u_4 &= \frac{3}{2} \frac{\bar{p}l}{EA} \end{aligned}$$

CAP I

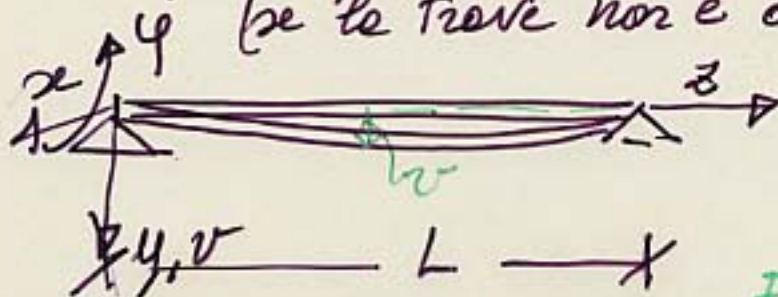
INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

- Il caso delle travi inflesse pp 17-19
- ELEMENTI "LAGRANGIANI" pp 20-22
- ELEMENTI "GERARCHICI" pp 23-24
- VELOCITA' DI CONVERGENZA E STIME
DELL'ERRORE pp 28 - 29_{bis}

Il caso delle travi inflesse

17.

l'eq. di equilibrio in termini di spostamenti
(se la trave non è deformabile a taglio)



risulta

$$EJ v'''' = q$$

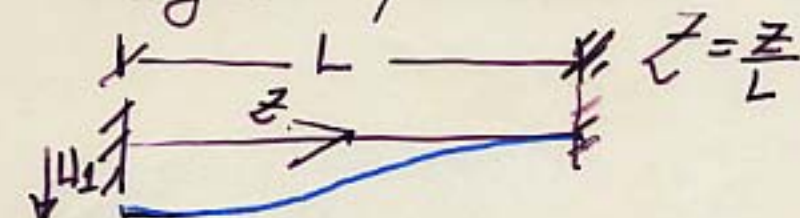
Eq. Linea ELASTICA (Euler-Bern.)

l'EPT assume la forma

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EJ v''^2 dz - \int_0^L q(z) v(z) dz + \dots$$

Le funzioni ammissibili saranno
continue con derivata prima continua e
derivata seconda di quadrato sommabile.
(e che il pot. elastico sia finito)

Si assumono come funzioni di forma
i seguenti polinomi di Hermite



$$\bar{z} = \frac{z}{L} \quad \psi_1(\bar{z}) = 1 - 3\bar{z}^2 + 2\bar{z}^3$$



$$\psi_2(\bar{z}) = L(-\bar{z} + 2\bar{z}^2 - \bar{z}^3)$$



$$\psi_3 = 3\bar{z}^2 - 2\bar{z}^3$$



$$\psi_4 = L(\bar{z}^2 - \bar{z}^3)$$

ponendo

$$B = [\psi_1'', -\psi_2'', -\psi_3'', -\psi_4''] = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12z}{L^3}, \frac{4}{L} - \frac{6z}{L^2}, -\frac{6}{L^2} + \frac{12z}{L^3}, \frac{2}{L} - \frac{6z}{L^2} \right]$$

Si ha

$$\underline{K}^e = \int_0^L \underline{B}^T E J \underline{B} dz, \text{ ovvero } K_{ij}^e = \int_0^L E J \psi_i'' \psi_j'' dz$$

che ovviamente, nel caso EJ cost, coincide con quella già vista.

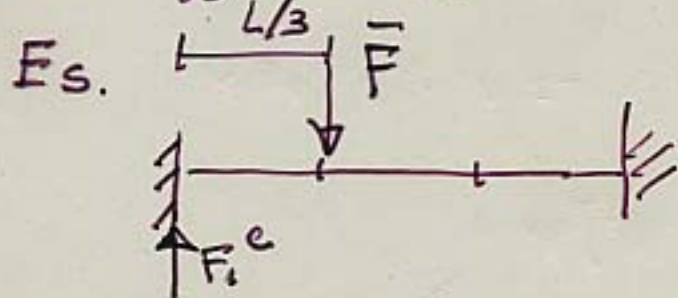
Dalla discretizzazione del L e si ottengono i conchi nodali equivalenti.

$$L e = \int_0^L q(z) v(z) dz + \int_0^L m \varphi(z) dz$$

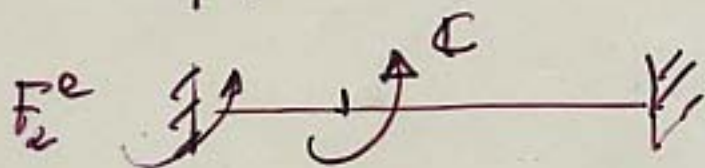
$$\text{poiché } v(z) = \sum_{i=1}^4 U_i \psi_i(z)$$

$$\varphi(z) = - \sum_{i=1}^4 U_i \psi_i'(z)$$

$$\underline{F}_L^e = \int_0^L q(z) \underline{\psi}(z) dz + \int_0^L -m(z) \underline{\psi}'(z) dz$$



$$\begin{aligned} F_1^e &= \int_0^L q(z) \psi_1(z) dz = \\ &= \bar{F} \cdot \left(1 - 3\frac{L^2}{L^2} + 2\frac{L^3}{L^3} \right) = \\ &= \frac{20}{27} \bar{F} \end{aligned}$$



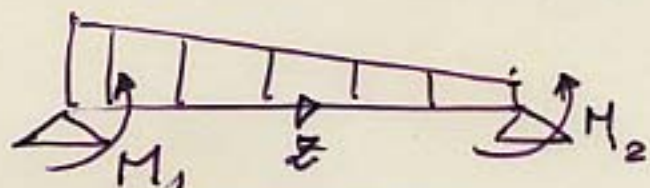
$$\begin{aligned} \bar{F}_2^e &= \int_0^L -m \psi_2' dz = \\ &= C \left(\psi_2' \left(\frac{z}{L} = \frac{1}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

SFORZI ALLE ESTREMITA'

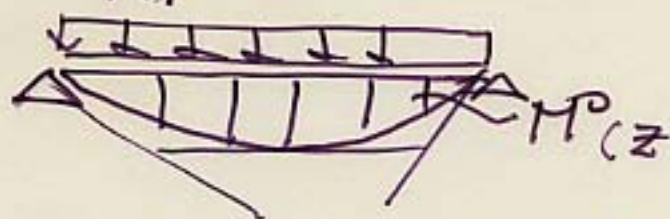
NEL RIFERIMENTO DELL'ASTA, COME VISTO

$$\underline{S}^e = \underline{K}^e \underline{U}^e + \underline{F}^e$$

SFORZI IN CAMPATA: OCCORRE SOVRAPPORRE
ALLE AZIONI DOVUTE DI MOVIMENTI DI ESTREMITA'
L'effetto del carico in campata.
ADES. per il momento flettente



$$\begin{aligned} M^H(z) &= -EI v'' = \\ &= -EI \beta \underline{U} \end{aligned}$$



$$M = M^H + M^P$$

Di solito, non viene volute l'espressione analitica
del momento, ma il valore in un numero
prefissato di sezioni (es. 10)

⇒ Sollecitazione Massima e
calcolo e disegno delle armature

CALCOLO DI UNA FRECCIA ($\theta \dots$) in campata
finito $\bar{z}$ è certamente possibile ottenere

$$v(\bar{z}) = \sum_{i=1}^n U_i \psi_i(\bar{z})$$

A volte è più pratico introdurre in $\bar{z}$ un nodo
ausiliario (cumentando coi elementi e variabili)

III 6 Integrazione numerica in 1-D

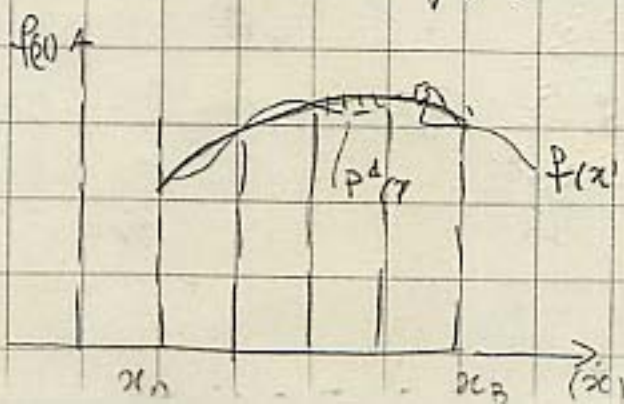
nel calcolo della mat di rigidità dell'elemento K_e^e e del vettore dei carichi nodali equivalente F_e^e , il calcolo dei coef K_e^e ed F_e^e richiede la valutazione di integrali del tipo

$$\int_{\Omega_e} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} f(\xi) J d\xi \quad (*)$$

se il problema è monodimensionale e gli elementi sono semplici come quelli descritti è possibile valutare esattamente $b_0(x)$, se il problema è bidimensionale o se si impiegano elementi isoparametrici una valutazione esatta è difficoltosa se non impossibile per la presenza di J (e J^{-1})

Una valutazione approssimata è talvolta richiesta quando l'integrando va necessariamente valutato in modo numerico (metodi: pencilty) o quando la f integrando è nota solo in certi punti (prob. non-lineari).

L'idea base di $\int$ integrazione numerica (o QUADRATURA) è trovare una funzione $P(x)$ (in genere un polinomio) prossima a $f(x)$ e di facile integrazione. Il polinomio di grado n , viene determinato imponendo che esso coincida con $f(x)$ in $n+1$ punti.



Oss. l'errore di $\int$ è $<$ errore interpolazione, infatti errori di segno $\neq$ si compensano.

FORMULE DI QUADRATURA DI GAUSS-LEGENDRE

i pti di base non sono equispaziati.

Si possono scegliere oltre $(n+2)$ parametri n pesi w_i , ed n pti. base ξ_i , in modo da integrare esattamente un polinomio di grado $[2n+1]$

F. di Gauss-Legendre

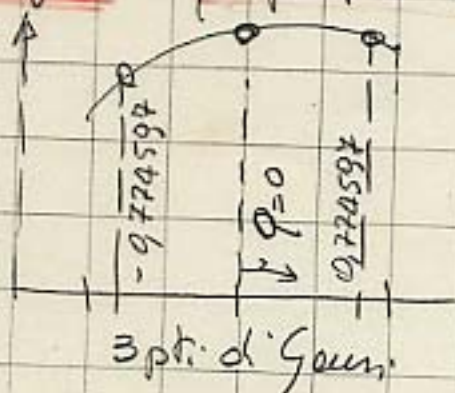
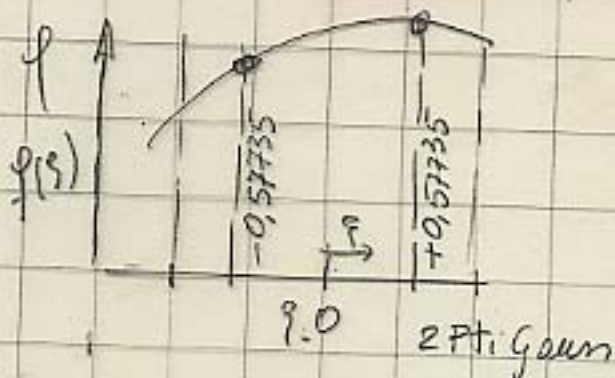
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{f}(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i \hat{f}(\xi_i) + O(h)^{2n+1}$$

con $\hat{f}(\xi) = f(x(\xi)) J(\xi)$

ξ = coordinate naturali

w_i pesi, ξ_i = coord pti di Gauss, sono gli zeri dei pol. di Legendre

NB un polinomio di grado p è integrato esattamente con $n = (p+1)/2$ pti di Gauss (se p pari 1 pto in più)



n	ξ_i	w_i
1	0.0	2 ($\frac{1}{2}$ medio $\times h$)
2	$(\frac{\sqrt{3}}{2}) \pm 0.57735 \dots$	1 $\frac{8}{9}$
3	$(\frac{\sqrt{5}}{5}) \pm 0.7745966 \dots$	$\frac{5}{9}$
4	± 0.339981 ± 0.8611363	$0.652145 \dots$ $0.34785481 \dots$

La funzione errore $e(x) = u_{ex} - u_n(x)$, $e \in H_1^0$, può ovviamente essere valutata puntualmente solo quando è nota la soluzione esatta.

Attenenti a ciò deve accontentarsi di valutare una norma dell'errore.

Varie sono le norme possibili.

Energy norm - $\|e\|_E = \left(\int_{\Omega} (e')^2 dx \right)^{1/2}$
(0 in H_1)

L_2 norm - $\|e\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} e^2 dx \right)^{1/2}$

norma uniforme - $\|e\|_{\infty} = \max_{\Omega} |e(x)|$

Per quanto concerne le prime si è mostrato

$$\|e\|_E = \|u_{ex} - u_n\| = \min_{v \in S^n} \|u_{ex} - v\|$$

mentre l'ultima, che è la più difficile da valutare, è quello che ha maggior significato ingegneristico.

Più in generale si è interessati ad una Misura dell'accuratezza della soluzione.

Sia $F(u)$ un generico funzionale (e.g. lo spostamento in un punto, lo stato di tensione, la tensione equivalente, lo stress-intensity factor) e ρ una prefissata Tolleranza si desidera garantire (CONTROLLO DELL'ACCURATEZZA)

$$\frac{|F(u_{ex}) - F(u_n)|}{F(u_{ex})} < \rho$$

Sono possibili sia stime a priori che stime a posteriori. 20
bis

- Di particolare interesse sono le stime a priori o asintotiche per $h \rightarrow 0$ in modo uniforme ($l_e = h = \text{cost}$) $\frac{1}{h^e}$

Se la soluzione u_{ex} è regolare ($\in C^2$) è possibile mostrare che

$$\begin{aligned} \|e\|_E &\leq C_E h^p \\ \|e\|_{L_2} &\leq C_2 h^{p+1} \\ \|e\|_\infty &\leq C_\infty h^{p+1} \end{aligned}$$

ove p è il grado del polinomio completo di (grado max) usato come polinomio interpolante.

Nel caso delle splines lineari o tratti: $p=1$

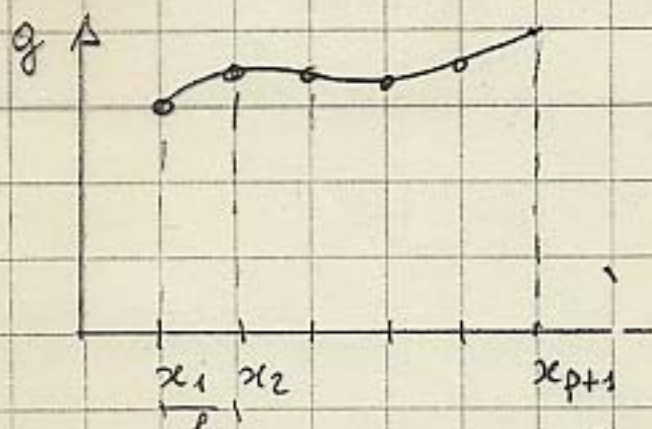
$$\begin{aligned} \|e\|_E &\leq C_E h \\ \|e\|_{L_2} &\leq C_2 h^2 \\ \|e\|_\infty &\leq C_\infty h^2 \end{aligned}$$

- Polinomi di Lagrange

Assunta una interpolazione polinomiale di grado p , conviene determinare i coefficienti in modo che il polinomio completo sia rappresentato da una combinazione lineare di polinomi di grado p che assumono il valore 1 in un nodo e si annullano negli altri. ed enumerare questi come funzioni di forma $\psi_i(x)$

I polinomi di Lagrange, introdotti inizialmente per interpolare una curva nota ("curve fitting") soddisfanno a questo requisito.

La loro determinazione è agevole e viene di seguito riportato



x_i = coord. nodi (knots)
dell'interpolazione

- || Trovare l'approssimazione polinomiale di ordine p
t.c. $g(x_i) = g_p(x_i)$ in $p+1$ punti equispaziati (x_{i+1} nuovo)

$$g_p(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + \dots + d_{p+1} x^p$$

si ha

$$\begin{cases} g(x_1) = g_1 = d_1 + d_2 x_1 + \dots + d_{p+1} x_1^p \\ \dots \\ g(x_{p+1}) = g_{p+1} = d_1 + d_2 x_p + \dots + d_{p+1} x_{p+1}^p \end{cases}$$

Ponendo $g_i = 1$, $g_j = 0$ con $j \neq i$ e risolvendo il sistema lineare di equazioni nei coeff. a_i si ottengono appunto le funzioni di forma ψ_i o Polinomi di Lagrange. -282-

$$\psi_i = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (x - x_j)}{\left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} (x_i - x_j) \right]}$$

$$\Rightarrow g_p(x) = \sum_{i=1}^{p+1} g_i \psi_i(x)$$

Per ottenere le f. di forma nell'elemento di riferimento nelle coordinate naturali $\xi \in -1 \leq \xi \leq +1$, basta

nelle relazioni precedenti porre $x_1 = -1$, $x_{p+1} = +1$

e di conseguenza valutare le coordinate x_i dei nodi intermedi

- E' facile verificare che per $p=1$ si ha

$$\psi_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-2} = \frac{1 - \xi}{2}; \quad \psi_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1 + \xi}{2}$$

- per $p=2$ ELEMENTO QUADRATICO

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = +1$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{1 - \xi(\xi - 1)}{2}$$

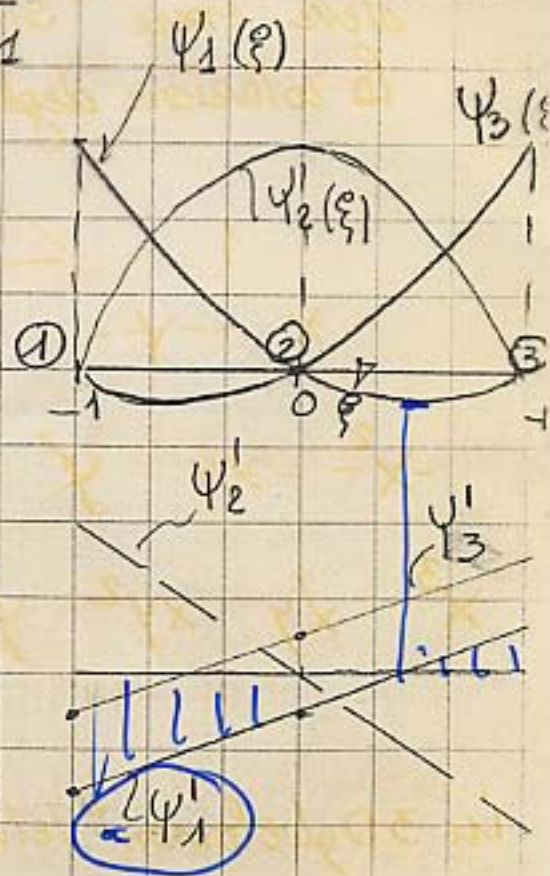
$$\psi_2(\xi) = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(-1)(+1)} = 1 - \xi^2$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{(\xi + 1)\xi}{(1 + 1) \cdot 1} = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1)$$

$$\psi'_1(\xi) = \left(-\frac{1}{2} + \xi \right)$$

$$\psi'_2(\xi) = -2\xi$$

$$\psi'_3(\xi) = \frac{1}{2} + \xi$$



$$K_{ij}^e = \frac{2}{l_e} \int_{-1}^{+1} EA \psi_i'(\xi) \psi_j'(\xi) d\xi$$

$$K^e (3 \times 3), M^e (3, 3)$$

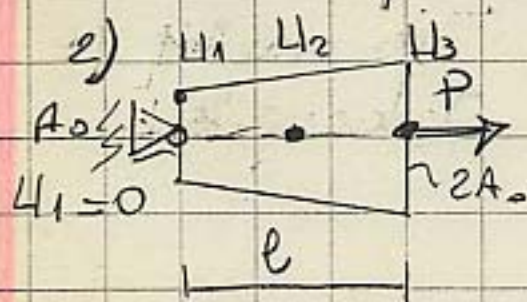
poiché $i, j = 1 \dots 3$

$$F_i^e = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} q \psi_i(\xi) d\xi$$

$$M_{ij}^e = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} k \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi$$

ESERCIZI

- 1) Si calcoli la met. di rigiolenza ed il vettore dei carichi nodali per l'este di sez. cost. soggetto ad un carico axiale unif. distribuito e si ritrovi la soluzione esatta.



1 el. quadrato $\Rightarrow u_3 = \frac{9}{13} \frac{Pl}{EA_0} =$

$$= 0.6923077 \frac{Pl}{EA_0}$$

Si ottiene un risultato migliore di quella ottenuta con 2 el. f. lineari (stesso numero di incognite) che di quella ottenuta con 3 el. f. lineari.

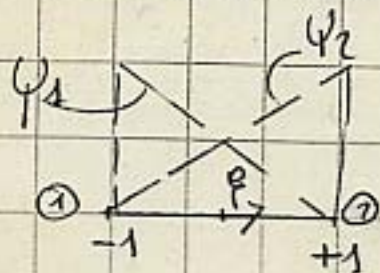
Si possono in modo analogo generare modelli agli elementi finiti con funzioni di forma costituite da polinomi di Lagrange di ordine p qualunque.

Si ottengono al crescere di p modelli più accurati.

Ma sempre più complessi ($p=1$ e $p=2$ è ciò che usualmente si impiega).

Si dimostrerà nel seguito che la "velocità di convergenza" dipende da p . Lo svantaggio principale è che i modelli per p diversi non sono generabili l'uno dall'altro.

Come visto se per migliorare la soluzione approssimata si passa da un el. f. lineare, $p=1$, ad uno quadratico occorre ricalcolare le mat. di rigidezza dell'elemento



- f di forma el. lineare

f. di f. el. quadratico Lagrange

Al fine di poter generare elementi di ordine più elevato senza dover modificare le precedenti funzioni di base e nuove matrici di rigidezza senza modificare i termini precedentemente calcolati sono stati introdotti gli elementi gerarchici.

Per raggiungere lo scopo tutte le ^{nuove} funzioni di forma dovranno essere ortogonali in energia, ovvero

mantenendo le ψ_1 e ψ_2 dell'elemento lineare, dovrà essere

$$\int_{-1}^{+1} \psi_i' \psi_j' d\xi = \delta_{ij} \quad i, j \geq 2, \quad \int \psi_i' d\xi = 0 \quad i \geq 2 \quad (*)$$

Un'altro requisito è che $\psi_i(\pm 1) = 0 \quad i \geq 2$, in modo da non alterare il significato di U_1 ed U_2 .
Le nuove funzioni di forma verranno pertanto dette INTERNAL SHAPE FUNCTIONS.

I gradi di libertà ad esse associati essendo relativi ad un solo elemento potranno essere espressi in funzione di U_1 ed U_2 , primo dell'assemblaggio (CONDENSAZIONE STATICA)

Funzioni di forma, con questi requisiti sono state ottenute -
 (SZABO, BABUŠKA) in funzione dei Polinomi ortogonali
 di Legendre. Il Polinomio di Legendre di grado -285-
 n , $n=0,1,2 \dots$ è la soluzione delle eq. diff. di Legendre

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad -1 \leq x \leq +1$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

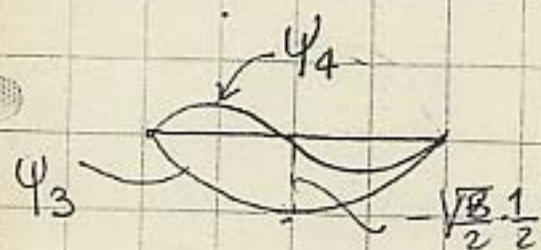
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad \text{etc}$$

$$\Rightarrow \psi_{j+1}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad j=2,3,4 \dots$$

$$j=2 \quad \psi_3(\xi) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{\xi} t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\xi^2 - 1}{2} \right) \quad j=2$$

$$\psi_4(\xi) = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{\xi} \frac{1}{2} (3t^2 - 1) dt = \frac{5}{2\sqrt{10}} \xi (\xi^2 - 1) \quad j=3$$



$$u^e(\xi) = \sum_{i=1}^N \psi_i(\xi) u_i = u_1 \left(\frac{1-\xi}{2} \right) + u_2 \left(\frac{1+\xi}{2} \right) + u_3 \psi_3 + u_4 \psi_4$$

u_3 ed u_4 non hanno il significato di valore dello spostamento
 in un nodo

Oss.

In virtù dello (i) le mat K^e differiranno al crescere di p solo
 di termini sulla diag. principale, mentre ciò non sarà vero per M^e .

Volte se AE è variabile non sarà più vero anche per le mat di riga

286

— matrice di rigidezza dell'elemento gerarchico del 2° grado

$$K_{ij}^e = \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 AE \psi_i' \psi_j' d\xi$$

per $i, j = 1, 2$ ritroviamo i termini $\frac{EA}{l_e} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ dell'elemento
Lagrangiano lineare.

I termini $K_{i3} = K_{3i}$ con $i \neq 3$ risultano nulli, infatti: a h

$$K_{13}^e = \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \psi_1' \psi_3' d\xi = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \xi d\xi = 0$$

resta il termine

$$K_{33}^e = \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 EA \left(\psi_3' \right)^2 d\xi = \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 EA \xi^2 d\xi = \frac{2}{3} \frac{EA}{l_e}$$

portando la matrice dell'elemento gerarchico quadratico
risulta

$$\underline{K^e} = \frac{EA}{l_e} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}$$

la matrice può essere portata ottenute semplicemente
aggiungendo un nuovo termine nello stag. principale.

elementi gerarchici: un grado p del polinomio superiore
può essere ottenuto aggiungendo i termini cubici, quartici, etc.
in modo tale che derivati III^a, IV^a etc nel punto di
mezzo risultino i gradi di libertà.

p- Convergenza (BABUSKA) per elementi gerarchici

Le stime a posteriori richiedono il calcolo di 20 più soluzioni e.
L'analisi asintotica ha mostrato come per soluzioni

suff. regolari

$$\|e\|_E \leq C_E h^p = K_E N^{-p}$$

$$\|e\|_\infty \leq C_\infty h^{p+1} = K_\infty N^{-p+1}$$

altrimenti $\|e\|_E \leq K N^{\beta} \quad (*) \quad \beta = \min(p, 1/2)$

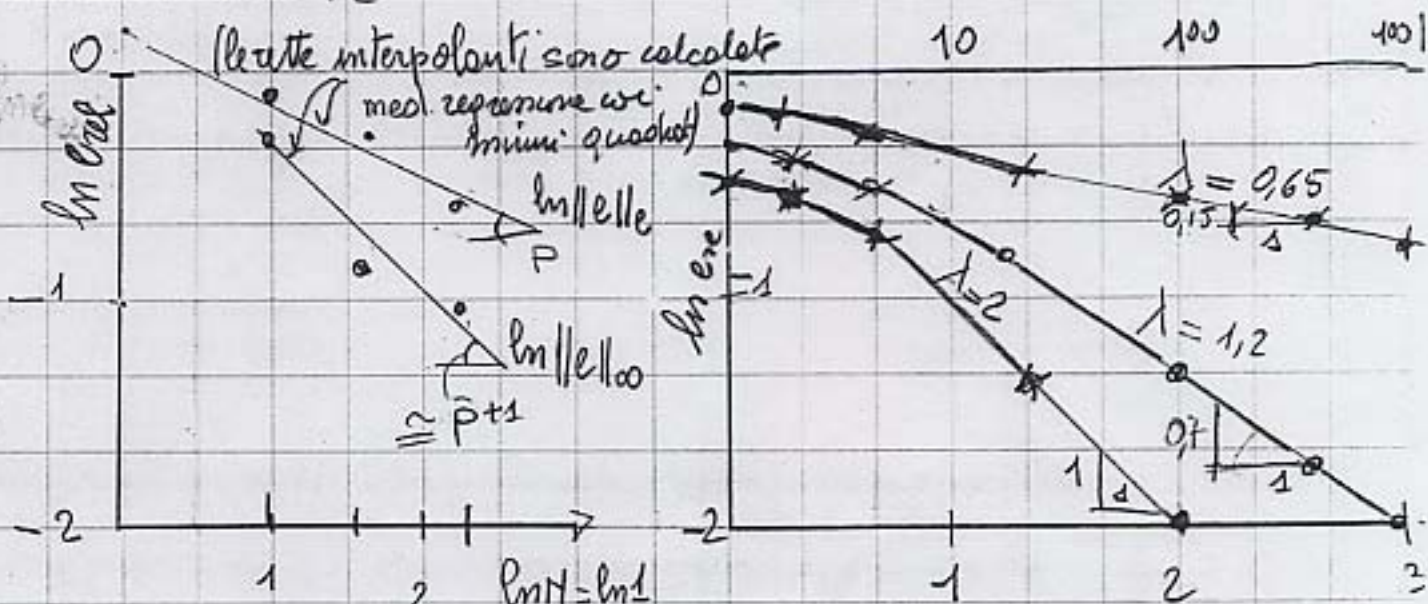
Cio suggerisce di rappresentare i risultati ottenuti

in un opportuna scala logaritmica, infatti $(*) \Rightarrow$

$$\ln \|e\|_E \approx \ln K - \beta \ln N.$$

In ordinata in genere si riporta l'errore relativo in Energia

$$e_{rel} = \frac{\|e\|_E}{\|u_{ex}\|_E}$$



Sol. reg $u_{ex} \in C^2$ - (Fig 1)

Solut. con λ variabile (Fig 2)

In convergenza, raffinamento uniforme, $(p=1)$

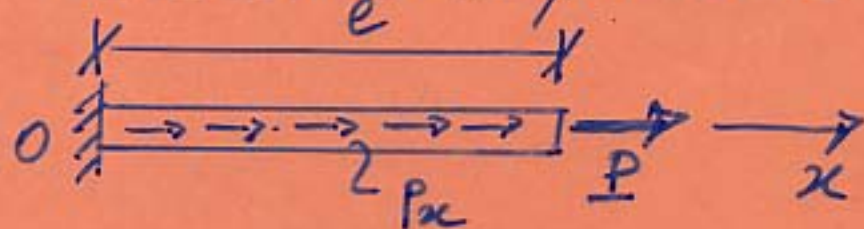
Osservazione i) La stima a posteriori più semplice da valutare è $\|u\|_\infty$, (e.g. Minimax), con almeno 3-4 soluzioni, considerando u_{ex} , quella ottenuta con la mesh più fitta disponibile

ii) si può riscontrare superconvergenza in alcuni punti.

iii) Le h -Estensioni sono computazionalmente molto più onere che le p -estensioni.

Introduzione al metodo degli elementi finiti: Metodo di GALERKIN

Si consideri un problema 1-D modello



barra rettilinea
di area $A(x)$ e
modulo E .

Relazioni fondamentali.

i) Equilibrio $N(x) = \sigma A$

$$\frac{dN}{dx} = -p_x \Rightarrow \frac{d}{dx} [\sigma(x) A] = -p_x(x) \quad \dots$$

ii) Congruenza (comp. cinematica)

$$\epsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (2)$$

iii) Eq. costitutive

$$\sigma = E \epsilon \Leftrightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$

ponendo 2 e 3 in 1

$$\frac{d}{dx} [E \epsilon(x) A(x) \frac{du}{dx}] = -p_x \Rightarrow EA = \text{cost}$$

$$\boxed{EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -p_x} \quad (4)$$

u ha senso in senso
classico se e solo se
 $u \in C^2[0, e]$

Eq. linea elastica, Navier ... etc

condizioni al contorno

A₁-2-

$u(0) = 0$ b.c. essenziale (o di Dirichlet)
(5) o sugli spostamenti.

$N(e) = EA \frac{du}{dx} \Big|_e = P$ b.c. naturale (o di Neumann)
o sulle forze

Imporre in modo debole la (4) significa
richiedere che invece che $EAu'' + p_x = 0 \quad \forall x \in [0, l]$
valga:

$$\int_0^l (EAu'' + p_x) v(x) dx = 0 \quad \forall v(x) \text{ ammissibile}$$

v = funzione test

Integrando per parti.

$$\int_0^l -EAu'v' dx + \int_0^l p_x v dx + [EAu'v]_0^l = 0$$

ricordando che $EAu' = P$ e che affinché
 v sia c.in. ammissibile deve soddisfare
le condizioni omogenee sugli spostamenti: $v(0) = 0$

$$\xRightarrow{PLV} \int_0^l EA v' u' dx - \int_0^l p_x v dx - P v(l) = 0 \quad (6)$$

affinché 6 abbia senso
 $u'v'$ t.c. $\int u'v' < \infty$ (funz. di quadrato sommabile $v \in H$)

e.g. $\forall v$ continua $\in C^0[0, l]$ è di quadrato sommabile

A1 - 3

Come noto il P.L.V (6) rappresenta la
condizione di stazionarietà - ($\delta \Pi = 0$)
del Principio di Minimo dell'En. Pot. Totale

$$u_0(x) = \arg \min \Pi(u(x)) \quad \forall u(x) \in H$$

$$\Pi(u) = \int_0^L \frac{1}{2} EA u'^2 dx - \int_0^L p u dx - P u(L) = 0 \quad (7)$$

Metodi classici per la soluzione approssimata
delle eq. differenziali.

Ritz - Rayleigh (1905) - GALERKIN (1915)

Si sceglie una soluzione di tentativo
(trial) $u_N(x)$ dipendente da N parametri

$\rightarrow u_N$ deve essere ammmissibile i.e.:

i) suff. regolare ($u \in H$)

ii) verificare le condizioni essenziali al bordo
(ovvero quelle omogenee negli spostamenti)

al variare di N $\{u_n\}$ $n=1 \dots N$ induce
una successione di funzioni trial

A1 - 3

Come noto il P.L.V (6) rappresenta la
condizione di stazionarietà - ($\delta \Pi = 0$)
del Principio di Minimo dell'En. Pot. Totale

$$u_0(x) = \arg \min \Pi(u(x)) \quad \forall u(x) \in H$$

$$\Pi(u) = \int_0^L \frac{1}{2} EA u'^2 dx - \int_0^L p u dx - P u(L) = 0 \quad (7)$$

Metodi classici per la soluzione approssimata
delle eq. differenziali.

Ritz - Rayleigh (1905) - GALERKIN (1915)

Si sceglie una soluzione di tentativo
(trial) $u_N(x)$ dipendente da N parametri

$\rightarrow u_N$ deve essere ammmissibile i.e.:

i) suff. regolare ($u \in H$)

ii) verificare le condizioni essenziali al bordo
(ovvero quelle omogenee negli spostamenti)

al variare di N $\{u_n\}$ $n=1 \dots N$ induce
una successione di funzioni trial

Esempi

A1-4-

$$u_N = \sum_{n=1}^N a_n \frac{\sin \frac{n\pi x}{e}}{e} + b_n \frac{\cos \frac{n\pi x}{e}}{e}$$

(serie di Fourier)

$$u_N = \sum_{n=1}^N c_n x^n$$

(f. polinomiale)

etc

In generale si scrive

$$u_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(x) \quad \varphi_n \text{ f. di base}$$

Affinché $\{u_n\} \Rightarrow u_0(x)$ per $n \rightarrow \infty$

occorre che

$$i) \quad \| u_N - u_0 \| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\| u_N - u \| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall u \in H$$

ovvero l'insieme

$S_N \stackrel{\text{def}}{=} \{ u_N \in H : u_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(x), \alpha_n \in \mathbb{R} \}$
sia denso in H

ii) le funzioni di base φ_n siano linearmente indipendenti, ovvero che nessuna sia ottenibile mediante combinazione lineare delle precedenti.

$$\varphi_i(z) = \left(\frac{z}{e}\right)^i = \xi^i \quad (\text{soddisfanno la b.c. essenziale})$$

$$\tilde{V}_2(z) = v_1 \xi + v_2 \xi^2 \quad (\tilde{U}_2(\xi) = u_1 \xi + u_2 \xi^2)$$

Sostituendo nella esp. del $P \cdot L \cdot V$
avremo $\tilde{V}_2(z) = \tilde{U}_2(z)$

$$\int_0^e EA(z) u'(z) v'(z) dz - P v(e) = 0 \Rightarrow$$

$$E \left[\int_0^1 EA(\xi) u'(\xi) v'(\xi) d\xi - P v(1) \right] =$$

$$\sum_{i=1}^2 u_i \left[\sum_{j=1}^2 \left(E \int_0^1 A(\xi) i \xi^{i-1} j \xi^{j-1} d\xi \right) v_j \right] -$$

$$- P(v_1 + v_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 5/3 \\ 5/3 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix}$$

$$EA_0 \begin{bmatrix} 3/2 & 5/3 \\ 5/3 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{P}{EA_0} \begin{bmatrix} 2/3 + \frac{10 \cdot 1}{8 \cdot 69} \\ -1/69 \end{bmatrix}$$

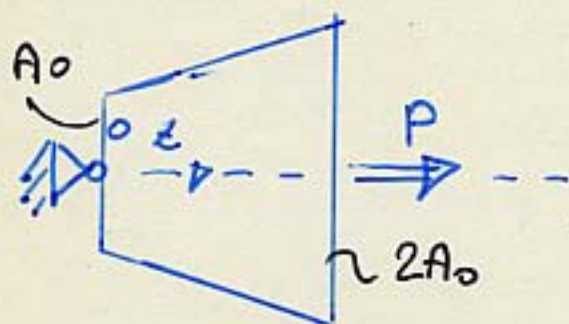
$$\Rightarrow u(\xi=1) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{69} \right) \frac{P}{EA_0} = 0,6811 \frac{P}{EA_0}$$

per $N=1$ $u(\xi=1) = 0,666$

per $N=6$ il valore è notevolmente migliore con 8 digits

Esempio

l



$$A_1 = 5A_0$$

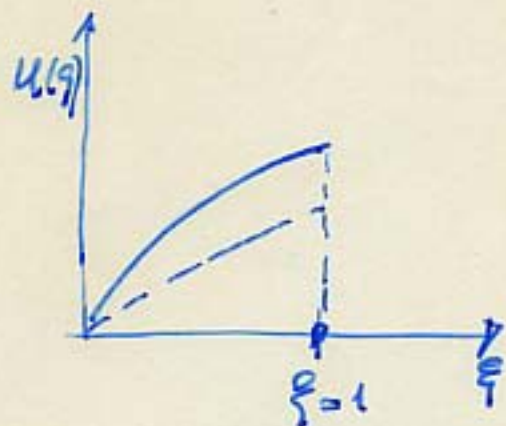
$$\xi = \frac{z}{l}$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

$$A(z) = A_0 \left(1 + \frac{z}{l}\right) = A_0 (1 + \xi)$$

Eq. Equilibrium $\frac{dN(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[E A(z) \frac{du(z)}{dz} \right] = 0$

b.c $\begin{cases} u(0) = 0 & \text{"essenziale" (Dirichlet, support.)} \\ N(l) = E A(l) u'(z=l) = P & \text{"naturale" (Neuman, relief)} \end{cases}$



$$u(\xi=1) = \frac{P}{E(2A_0 - A_0)} \ln \frac{2A_0}{A_0}$$

$$= 0,693147 \frac{P}{A_0 E}$$

Se invece di sostituire nel P.L.V (M. di Ritz) ⁴⁻⁶⁻
 si sostituisce

$$\tilde{u}_N = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k(z) \quad \text{nell'EPT}$$

$$\Rightarrow \Pi^N(\tilde{u}_N) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(z) \tilde{u}_N'^2(z) - P \tilde{u}_N(e)$$

Minimizzando Π^N , i.e. imponendo
 le condizioni di stazionarietà

$$\frac{\delta \Pi^N(v_1, \dots, v_N)}{\delta v_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

$\Rightarrow$ sistema precedente di N eq in N incognite
 sistema sym, def. pos. nelle v_i .
 essendo $(\delta^2 \Pi < 0)$

ovvero

$$\Pi^N(u_N) = \frac{1}{2} u_N^T K u_N - F^T u_N$$

$$\frac{d\Pi^N}{du_N} \Rightarrow \boxed{K u_N = F}$$

CONFRONTO FRA SOL. COL METODO DI GALERKIN TRADIZIONALE E METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

A1-4-

M. GALERKIN

φ_i : Polinomi $\Rightarrow$ Met. Coef. mal condizionato
F. trigonometriche (S. Fourier) K diagonale
P. Legendre. "
F. Bessel. "

Inconvenienti caratteristici:

- 1) I 2 (3D) è praticamente impossibile
ott. f. di base φ_i che soddisfino le condizioni
al contorno e nessun' irregolarità
- 2) non sono possibili raffinamenti locali delle
soluz. approssimate.
- 3) le φ_i non si prestano a generare soluzioni
in domini di forma f.
- 4) Risulta difficile trattare problemi
con vincoli coinvolgenti.
- 5) Con polinomi si ottengono mat. coef. piene
e mal condizionate.