

EL. FINITI Quadrilateri:

Lo sviluppo storico degli elementi finiti quadrilateri ha seguito per molti anni la strada riportata per gli elementi triangolari e che ripercorreremo brevemente nelle prossime "slides".

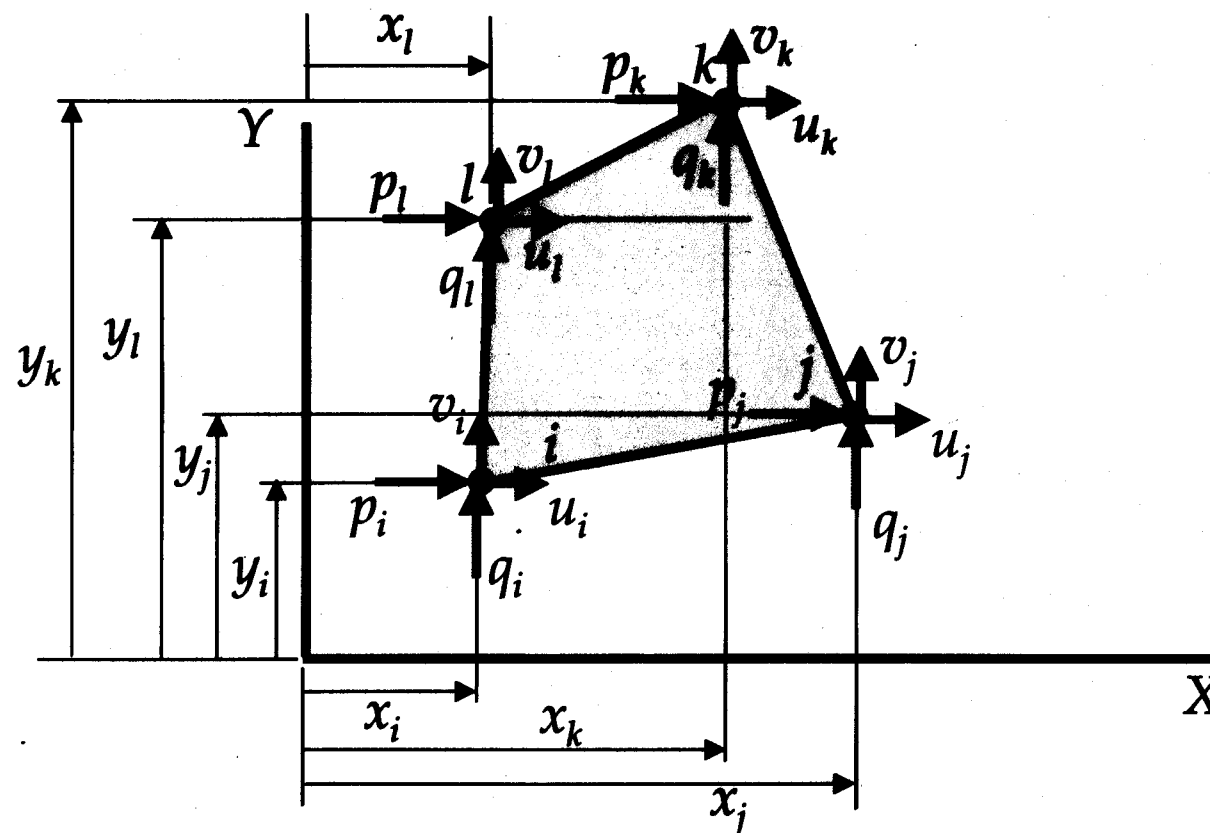
Tuttavia a partire dal 1968, e seguito soprattutto dai lavori di Bruce Irons, è stato introdotto un modo più efficiente per ottenere le matrici di rigidezza e tale metodo è basato sui seguenti presupposti:

- 1 - Si opera su un elemento di riferimento o "master element" di solito 1 quadrato (un cubo) di lati 2×2 ($2 \times 2 \times 2$)
- 2 - Si definiscono direttamente le funzioni di forme $N_i(x)$ (che valgono 1 in un nodo e 0 negli altri)
A partire dai Polinomi di Lagrange $(m-1)$
⇒ "tensor product elements"
- 3 - Gli integrali vengono valutati numericamente (in genere si usa il Metodo di quadrature di Gauss)

Plane Quadrilateral Bilinear Element



- The 4-node quadrilateral element is the simplest four-sided two-dimensional element



Bilinear Displacement Field



- The assumed displacement field for this element is

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

or

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}$$

Note that the assumed displacement field is not “complete” (neither linear nor quadratic)

Bilinear Displacement Field (cont'd)



- Writing these expression more concisely and performing the usual operations we obtain

$$\bar{\mathbf{X}}\mathbf{a} = \mathbf{u} \quad \mathbf{a} = \bar{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

where $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(x, y)$ is the shape function matrix for the the plane quadrilateral bilinear (PQB) element

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 & N_4(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 & N_4(x, y) \end{bmatrix}$$

PQB Strain-Displacement Matrix



- The strain in this element can now be computed from

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$$

where

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$



PQB Strains

- Note that because of the assumed displacement field

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(y)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y(x)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y)$$

- This strain distribution may be unsuitable for some applications

PQB Stiffness Matrix



- Using this matrix the stiffness matrix for a constant thickness h PQB element can be computed

$$\mathbf{k} = h \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dx dy$$

8×8 8×3 3×3 3×8

- The integration is complicated and is performed using Gaussian quadrature

-29-

DISCRETIZZAZIONI IN 2 (O 3) DIMENSIONI

Si assumono ancora interpolazioni polinomiali su ciascuna sottoregione Ω^e (elemento) ma occorre garantire la continuità delle f. incognite lungo le linee (o superfici) fra 2 elementi adiacenti.

Esistono 2 famiglie principali di elementi Lagrangiani:

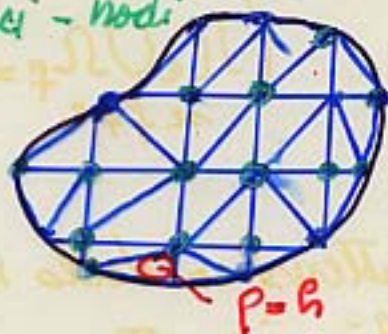
A) "SIMPLEX" elements

(el. di forma triangolare)

B) "Tensor-product" elements

(el. di forma di quadrato)

• Vertici - nodi



$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_e N_e \Omega^e$$

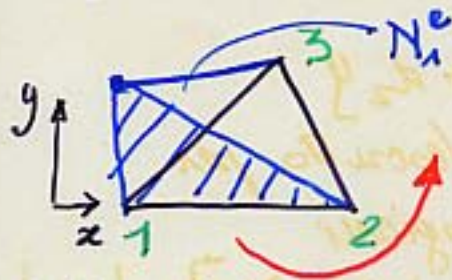
$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\Omega}_h \rightarrow \bar{\Omega}$$

(N^e → ∞)

$$(\Omega_e \cup \Omega_f = \emptyset \text{ se } f \neq e)$$

h parametro caratteristico dello mesh
raggio ρ del cerchio inscritto

SIMPLEX EL. — Elemento "lineare"
(in elasticità è detto CST)



$$u^e = d_0 + d_1 x + d_2 y$$

⇒ proc. come descritto per gli el. lagrangiani

$$\begin{vmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$|A^e|$ area del triangolo

$$A^e = \frac{1}{2} \{ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \}$$

Altre scelte di punti di interpolazione sono ovviamente possibili (e.g. pts a metà lato "midside nodes")
 Si ricorda che la f. interpolante deve risultare C^0 continua su tutto il lato non solo nei nodi.

$$v \in C^0(\Omega)$$

L'elemento è detto **conforme o compatibile** se è continua v e le sue derivate secondo quanto è necessario nella formulazione debole. Altrimenti l'elemento è detto **non-conforme**.

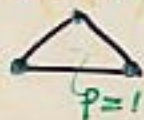
È stata proposta una moltitudine di elementi si ricorda che essi devono avere le seguenti caratteristiche:

- il polinomio deve contenere il termine $d_0(\text{cost})$ per riprodurre i moti rigidi
- L'accuratezza della soluzione dipende dal polinomio completo di grado più elevato
- Anche se non completo il polinomio interpolante deve essere "SIMMETRICO" in x e y per consentire la rotazione degli assi

T. di PASCAL
(Tetraglio)

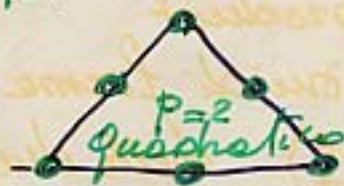
LINEARE

1

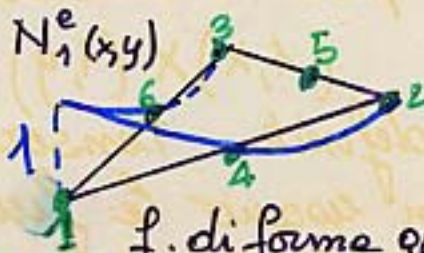


- x - - - y -

- x^2 - - xy - - y^2



x^3 x^2y xy^2 y^3



f. di forma quadratica



f di base quadratiche

in 3D gli elementi tetraedrici, costituiscono una generalizzazione

La teoria dell'interpolazione di Lagrange, sviluppata su di un intervallo, è semplicemente generalizzabile in 2 (o 3) D

sia $I_{x_i} = \{x \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $I_{y_j} = \{y \mid y \in [y_{j-1}, y_j]\}$
il corrispondente rettangolo (o tetraedro) è definito come

$$I_{x_i y_j} = I_{x_i} \times I_{y_j} = \{x, y \mid x \in I_{x_i}, y \in I_{y_j}\} \quad \text{etc.}$$

Se la discretizzazione consiste di rettangoli, le interfacce sono linee $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$.

In questo caso una interpolante bilineare $\Rightarrow$ ha intersezioni lineari ai lati ed è ovviamente continua (C^0) fra 2 el. adiacenti.

Ad es. si ha

$$u_h^e(x, y) = d_0 + d_1 x + d_2 y + d_3 xy = (b_1 + b_2 x)(c_1 + c_2 y)$$

Il prodotto delle basi monomiali $(1, x)$ e $(1, y)$

$$(1, x) \times (1, y) = (1, x, y, xy)$$

è definito tensor-product

Se si usano le funzioni di forme Lagrangiane

eg $N_1^e = \frac{(1-\xi)}{2}$, $N_2^e = \frac{(1+\xi)}{2}$ nelle due direzioni

si ottengono direttamente le f. base in 2 dimensioni

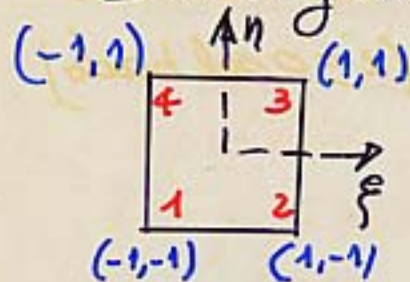
$$\{N_1^e(x), N_2^e(x)\} \times \{N_1^e(y), N_2^e(y)\}$$

ovvero

$$N_{ij}^e(x, y) = \{N_i^e(x) \cdot N_j^e(y)\}$$

A queste famiglie appartengono alcuni degli elementi più comunemente usati.

El. Lagrangiano del 1° ordine



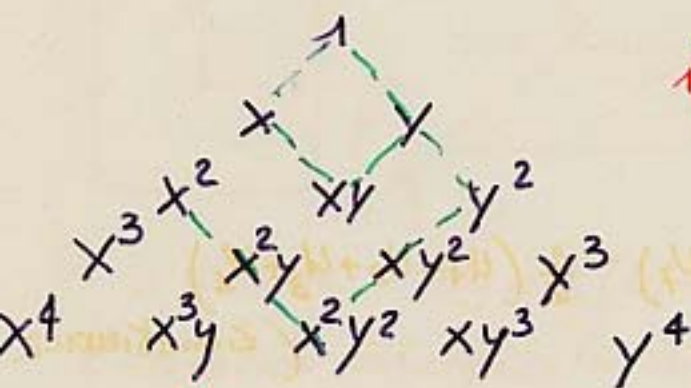
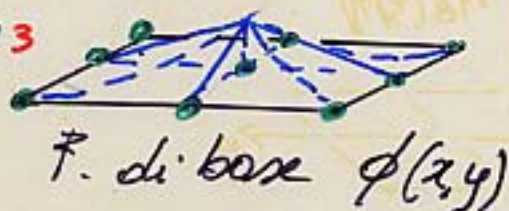
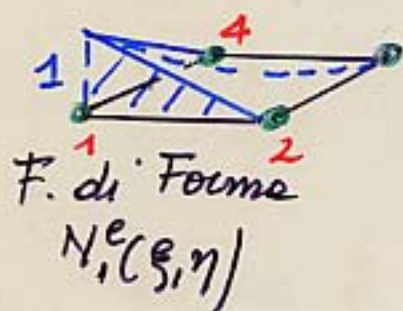
$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\frac{1+\xi}{2})(\frac{1-\eta}{2})$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\frac{1+\xi}{2})(\frac{1+\eta}{2})$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\frac{1-\xi}{2})(\frac{1+\eta}{2})$$

$$\Rightarrow N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$$



bilinear



biquadratico
(el. Lag. a 8 nodi)



ove come visto

$$N_1^e(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), N_2^e(\xi) = (1-\xi^2), N_3^e = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

$$N_{ij}^e(\xi, \eta) = N_i^e(\xi) N_j^e(\eta) \quad i, j = 1, 3$$

La generalizzazione in 3D è ovvia

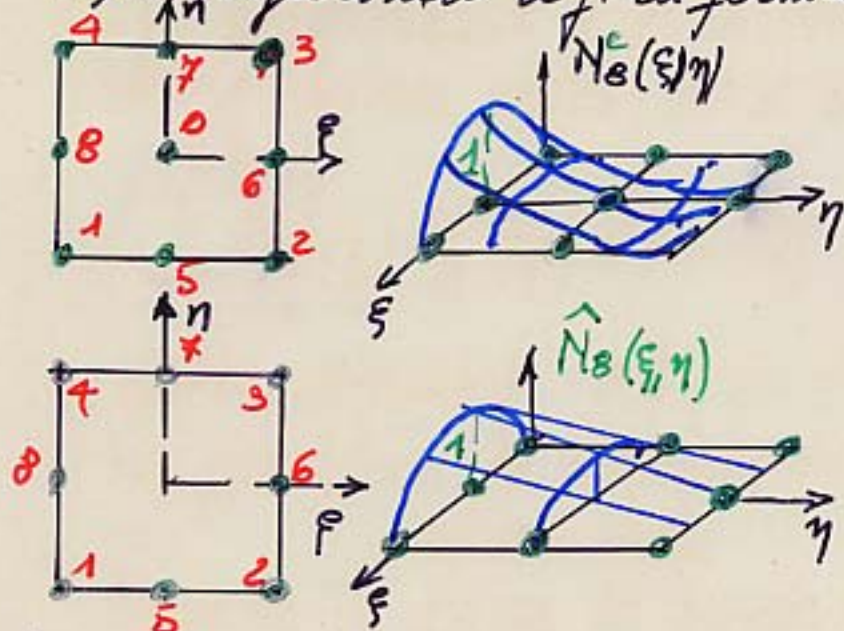
VINCOLI SULLE f. di FORMA e el. di TRANSIZIONE

Nell'el. biquadratico la funzione di forma associata al nodo interno (nodo "9") è locale ($i \equiv 0$ sul bordo) e può essere facilmente eliminata.

Ciò può essere fatto in 2 modi.

A) a livello algebrico: *condensazione statica* di K^e

B) modificando le f. di forma (secondo ODEN CAREY vol II)



Se si assume $u_9 = \frac{1}{2}(u_4 + u_5 + u_6 + u_7) - \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_8)$
l'elemento modificato viene detto "SERENDIPITY" (Zienkiewicz e Taylor, vol I op cit)



Di fatto si eliminano le f. di forma, nel caso insieme $N_8^e(\xi, \eta)$ (ODEN e CAREY vol II, K.J. BATHE op. citate)

Es. FINITI di tipo GERARCHICO

Si tratta di una variante degli e.f. Lagrangiani: visti che consente di ottenere f. interpolanti di tipo polinomiale ^{di grado più elevato} conservando le funzioni di forma relative all'elemento di ordine inferiore. Per raggiungere questo scopo tutte le nuove funzioni di forma dovranno essere ortogonali in $\| \cdot \|_E$ fra loro e a quelle precedenti.

Ovvero mantenendo le f. di forma $N_1^e(\xi)$ e $N_2^e(\xi)$ dell'el. lineare dovrà risultare:

$$\int_{-1}^1 N_i^e(\xi) N_j^e(\xi) d\xi = \delta_{ij} \quad i, j > 2 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 N_i^e(\xi) d\xi = 0 \quad i > 2$$

inoltre ovviamente $N_i^e(\xi = \pm 1) = 0 \quad i > 2$

Ciò giustifica la denominazione **INTERNAL SHAPE FUNCTIONS** ad esse date.

Funzioni di forma di questo tipo sono ottenute (STOKO-BABUSKA q.c.) utilizzando i POLINOMI ORTOGONALI DI LEGENDRE

Il Pol. di Legendre di grado $n \quad n=0, 1, 2, \dots, p$ è la soluzione della seguente eq. dif. detta di Legendre

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1)]y = 0 \quad -1 \leq x \leq +1$$

e si ha:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) - \dots$$

Le "shape functions" risultano così definite

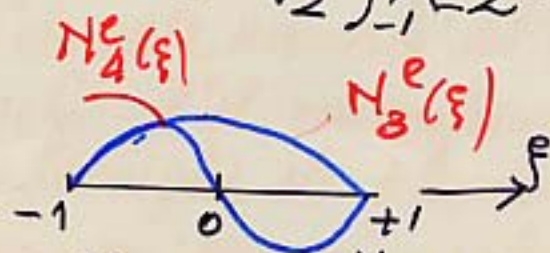
- 35 -

$$N_{j+1} := \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad j=2,3,4 \dots$$

$\Rightarrow$

$$j=2 \quad N_3^e = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{\xi} t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\xi^2 - 1}{2} \right)$$

$$j=3 \quad N_4^e = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{\xi} \left(\frac{1}{2} (3t^2 - 1) \right) dt = \frac{5}{2\sqrt{10}} \xi (\xi^2 - 1)$$



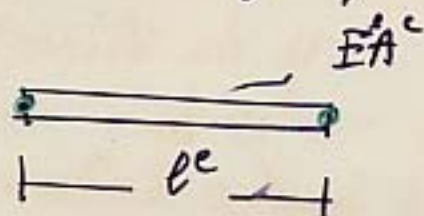
$$u^h(\xi) = \sum_{i=1}^N N_i^e(\xi) U_i = U_1 \left(\frac{1-\xi}{2} \right) + U_2 \left(\frac{1+\xi}{2} \right) + U_3 N_3(\xi) + \dots$$

N.B.

Le nuove variabili U_i ($i > 2$) non hanno il significato di valore di u^* in un nodo.

Per le proprietà di ortogonalità i termini aggiunti della matrice di rigidezza si trovano solo sulle diag. principali

E_s Aste sog. def. anisole



$$\underline{K}^e = \frac{EA^c}{l^e} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{el linear} \\ \text{el} \\ \text{quadratico} \end{matrix}$$

El di ordine superiore possono pertanto essere ottenuti ~~aggiunti~~ aggiungendo i termini cubici, quartici... in modo particolarmente efficiente migliorando in tal modo le approssimazioni

p-Convergence (Babuska...)

ELEMENTI DI TIPO HERMITIANO

Nei pb retti da eq. diff. del IV ordine (travi; piastre
certi pb di fluidi viscosi) la forma debole
comporta le derivate II delle funzioni trial e test.
Ciò comporta che le derivate I e II devono essere di qualche
integrabile (sec. Lebesgue) e che (f. di GAUSS-GREEN)
le derivate normali ai lati devono essere continue
perché l'el. sia conforme

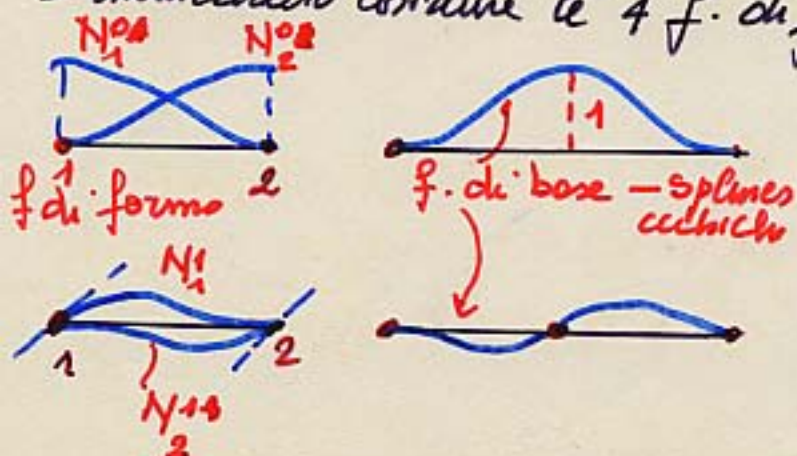
Le famiglie di elementi di Hermite, in cui le
funzioni base sono polinomi C^1 e tratti,
sono state introdotte per risolvere questi pb.

Pb 1.D (per 2D o 3D si rimanda ai testi citati)

Si consideri per semplicità un el. di riferimento
(o master el) $-1 \leq x \leq 1$

Per garantire la C^1 continuità di u , si devono
utilizzare splines cubiche, e le f. di forma
devono essere di 2 tipi

Continuità di u $N_i^0(x_k) = \delta_{ik}$ $\frac{dN_i^0}{dx}(x_k) = 0$
" di u' $N_i^1(x_k) = 0$ $\frac{dN_i^1}{dx}(x_k) = \delta_{ik}$
E' immediato costruire le 4 f. di forma

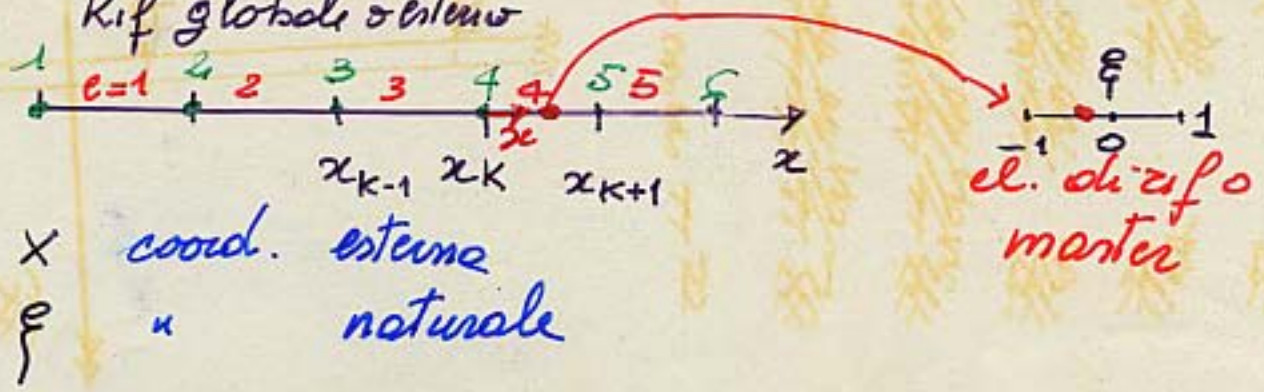


$$\begin{aligned} N_1^0(x) &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \\ N_2^0 &= \frac{1}{4}(x+1)^2(2-x) \\ N_1^1 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1) \\ N_2^1 &= \frac{1}{4}(x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

che come ben noto sono le sol. dell'eq lineare elastica
di una trave inflessa. Esempio un nodo $i=1$ e gli altri $= 0$

COORDINATE NATURALI e "MASTER" EL.

Rif globale esterno



x coord. esterne
 ξ " naturale

E' computazionalmente conveniente operare nell'el. di riferimento o master

$$\Omega^e := \{x \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad \xi \in [-1, +1] := \Omega_{\text{rif}}$$

Trasf. di coordinate

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_k + \frac{1+\xi}{2} x_{k+1} =$$

$$= N_1^e(\xi) x_k + N_2^e(\xi) x_{k+1} = Q_k(\xi)$$

si ottiene:

$$dx = J d\xi \quad J = \frac{dQ_k}{d\xi} = \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$$

J = JACOBIANO o gradiente delle trasf. di coordinate

In questo caso è facile definire anche la trasformazione inversa (inverse mapping)

$$\xi = Q_k^{-1}(x) = \frac{2}{x_{k+1} - x_k} \left[x - \frac{(x_k + x_{k+1})}{2} \right]$$

si ottiene che

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) = J^{-1}$$

FORMULE DI QUADRATURA

-38-

FORMULA DI NEWTON-COTES

(Esatto di un polinomio che cominci con f in pti equispaziate)

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^{n+1} w_i f(\bar{x}_i)$$

w_i per i , $\bar{x}_i$ pti base o knots ove si valuta la f

$n=1$ REGOLA DEL TRAPEZIO

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + O(h)^3$$

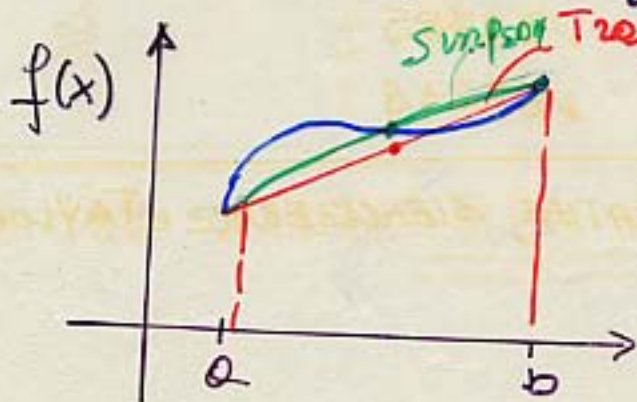
ove $h = (b-a)$

$n=2$ REGOLA DI CAVALIERI SIMPSON

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{b+a}{2}) + f(b)] + O(h)^5$$

$n=3, 4, 5, \dots$

Newton-Cotes integra esattamente un polinomio dispari di grado n , pari di grado $n+1$



n	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	$1/2$	$1/2$			
2	$1/6$	$4/6$	$1/6$		
3	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	
4	$7/90$	$32/90$	$12/90$	$32/90$	$7/90$

FORMULA DI GAUSS-LEGENDRE (QUADRATURA DI GAUSS)

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_N f(\xi_N)$$

$$= \sum_{g=1}^N w_g f(\xi_g) + O(1)^{2n+2}$$

w_g = Pesi di GAUSS

$$w_g = \int_{-1}^{+1} P_g^G(\xi) d\xi \quad \text{ove} \quad P_g^G(\xi) = \prod_{h \neq g} \frac{(\xi_h - \xi)}{(\xi_h - \xi_g)}$$

ξ_g = PUNTI DI GAUSS

si identificano con gli zeri del Polinomio di Legendre di grado G

La formula integra esattamente un polinomio di grado $2G-1$. G. Legendre richiede un numero minore di pti di Newton-Cotes, che viene usata quando valute f agli estremi (c.p. H estremi di una trave eplestia)

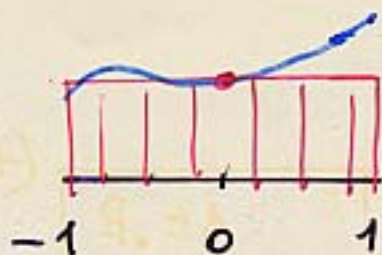
G	ξ_g	w_g	
1	0.	2.0	
2	$\pm \sqrt{3}/3$	1.0	
3	± 1.77459	.55555	
	0.	.88888	
4	± 1.86113	.34785	
	± 1.33998	.65214	

Si Veda L. Conadi vol II, K.J. BATHE, ZIENCKIEWICZ e TAYLOR..

Remark. f deve essere una funzione ^{ovunque} definita su $-1 \leq \xi \leq 1$, continua ed integrabile

Si osserva che con $G=1$

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2 \cdot f(0)$$



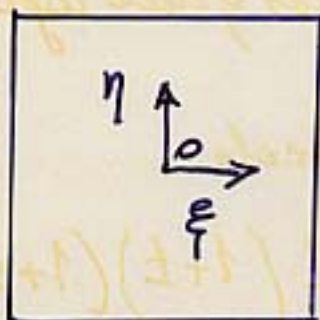
$\Rightarrow$ T. del valor medio

per $G=2$ è più preciso di CAVALLERI-SIMPSON

Se di un dominio quadrato

$$-1 \leq \xi \leq +1$$

$$-1 \leq \eta \leq +1$$



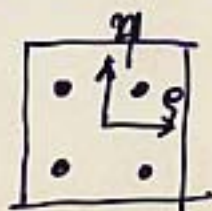
$(-1, -1)$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{h=1}^H \sum_{g=1}^G w_h w_g f(\xi_g, \eta_h)$$

Di regola $G=H$, il che significa uguale precisione nelle 2 dimensioni.

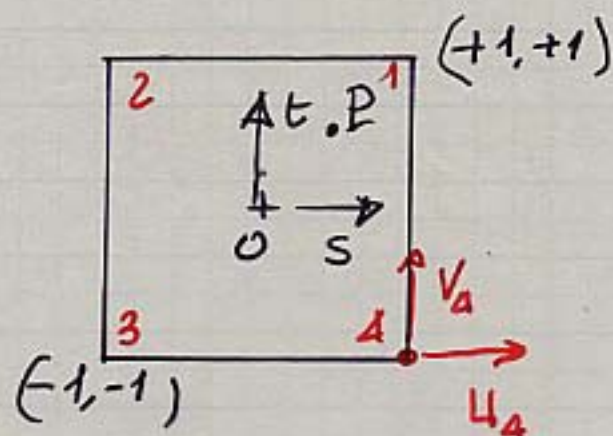
- NUMERO MINIMO di pti di GAUSS

Nel caso di elementi non quadrati (distorti) non si può usare un numero di pti di Gauss inferiore a quello che dà il valore esatto dell'area o del volume, in genere 2×2



$$\xi_g = \eta_h = \pm 0.57735$$

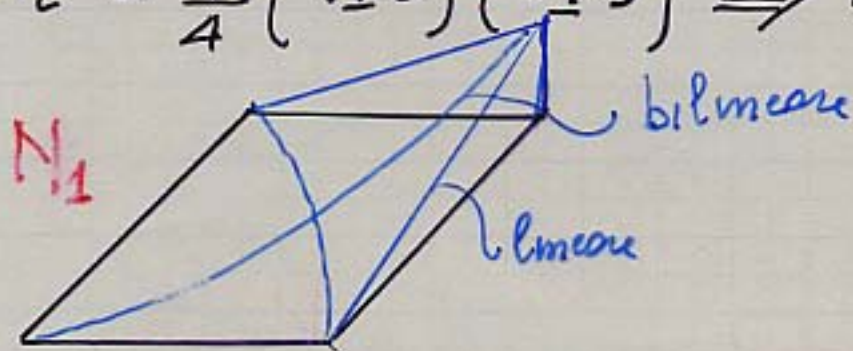
$$w_g = w_h = 1.0$$



- Se il riferimento locale (s, t) differisce per una traslazione da quello globale (x, y) coincide con quello lagrangiano visto

- Funzioni di forma nel riferimento locale

$$N_i = \frac{1}{4} (1 \pm t) (1 \pm s) \Rightarrow N_1 = \frac{1}{4} (1+t)(1+s)$$



Per ottenere un quadrilatero nel riferimento globale occorre esprimere le coordinate del generico pto P dell'elemento in funzione delle sue coordinate locali.

Questi elementi sono detti ISOPARAMETRICI

perché a questo fine si utilizzano le stesse funzioni di forma impiegate

per approssimare il campo di spostamento

$$u(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) U_i$$

$$v(s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(s, t) V_i$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial s} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \cdot}{\partial s} = \underline{J} \frac{\partial \cdot}{\partial x}$$

$\underline{J}$ (Jacobiano della trasformazione)

Nelle ipotesi del Teorema del Dini

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \underline{J}^{-1} \frac{\partial \cdot}{\partial s} \quad \text{ove } \underline{J}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{vmatrix}$$

La valutazione di $\underline{J}$ viene fatta nei pti di GAUSS ed inoltre

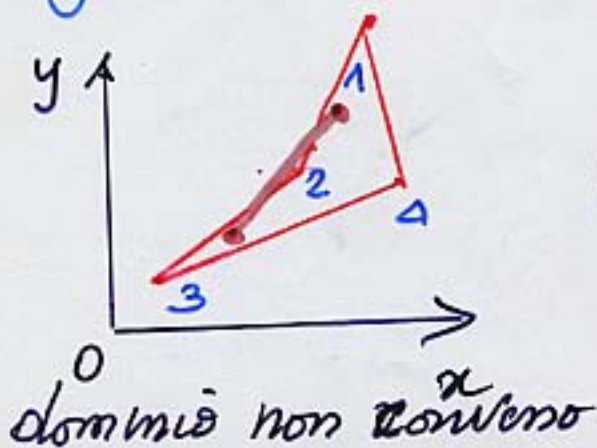
$$dA = dx dy = \det \underline{J} ds dt$$

$K^e \int_{A^e} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} dA$ non è valutabile in forma chiusa ma ...

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{J}^{-1} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \det \underline{J} ds dt \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} \underline{J}_j^{-1} \underline{B}^T(s_i, t_j) \underline{E} \underline{B}(s_i, t_j) \det \underline{J}_j v_i w_j$$

Regole di "Irons" N_G minimo $\Rightarrow A^e$ valutato esattamente

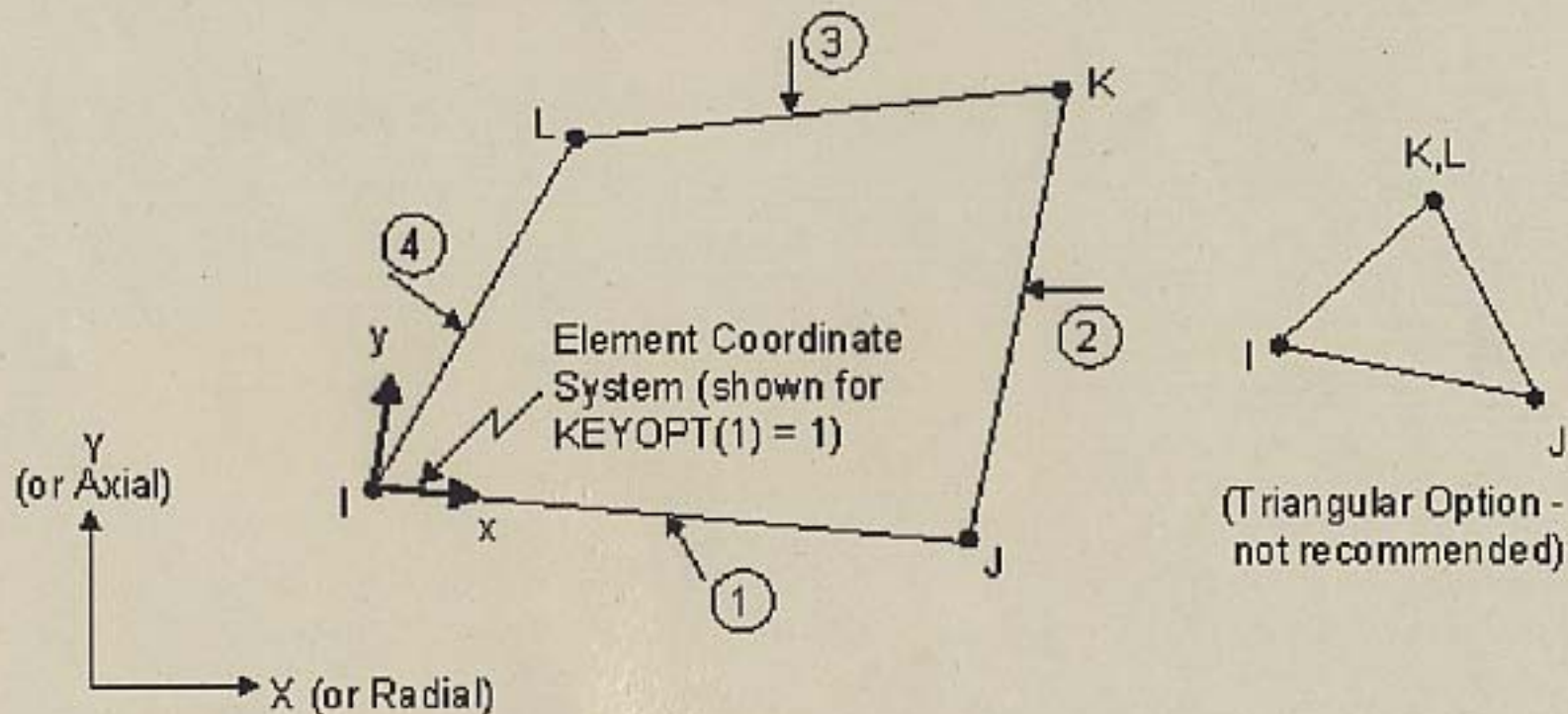


$\underline{J}$ non è definito universalmente
(ovvero $\underline{J}^{-1}$ non è definibile
se A^e deve essere un dominio
convesso, i.e. gli angoli $< \pi$)

PQB Element in ANSYS



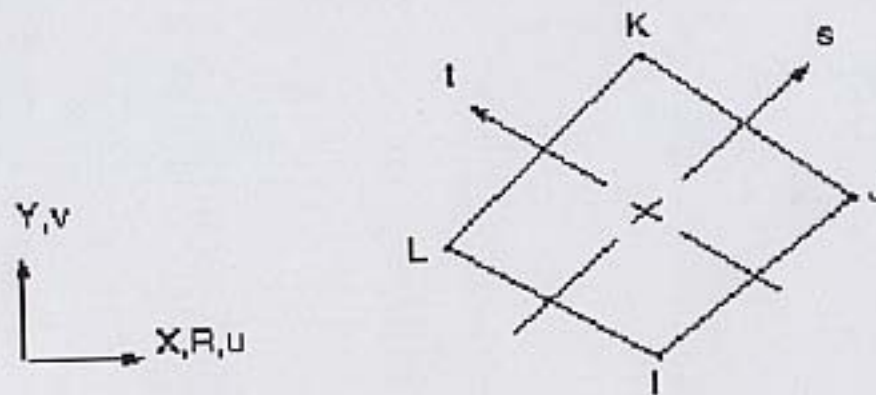
- The PQB element in ANSYS is called the PLANE42 2-D Structural Solid



Natural Coordinates



- ANSYS (and most other FE programs) use natural coordinates to define shape functions



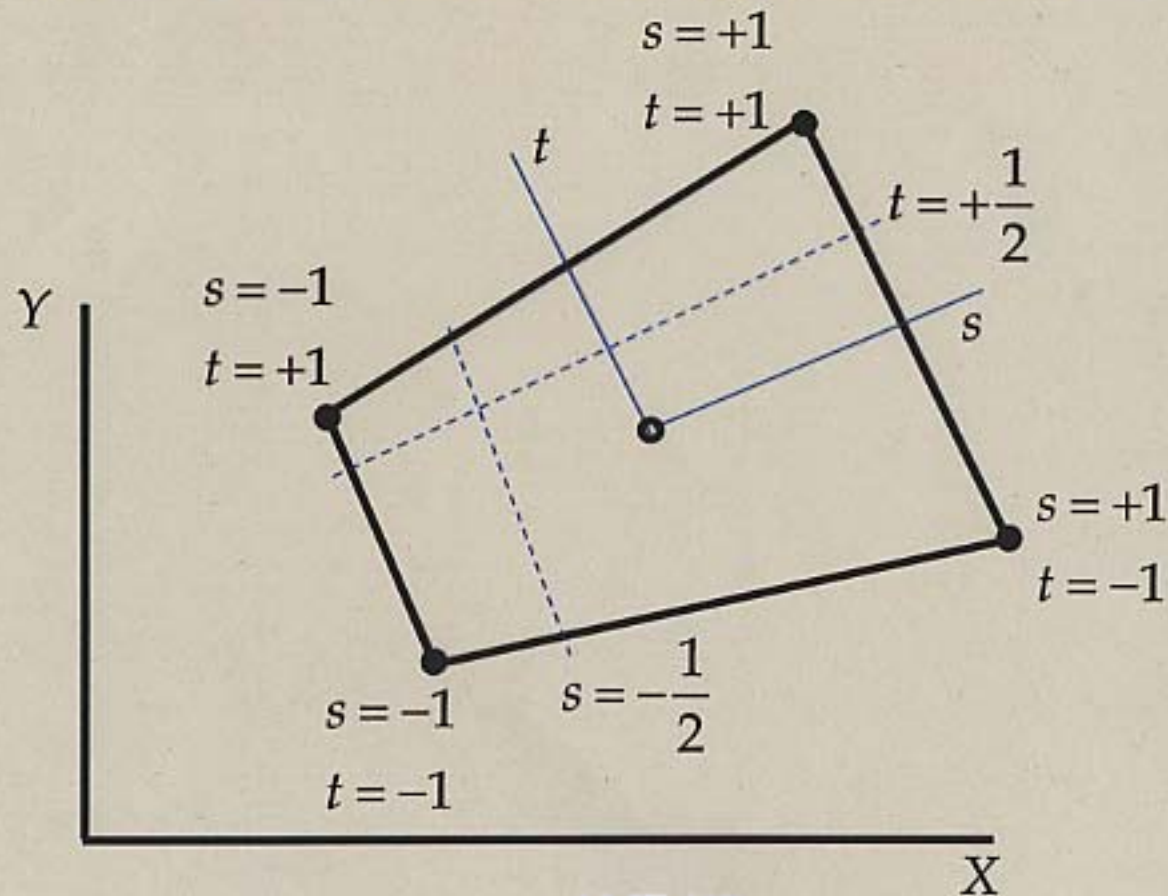
$$u = \frac{1}{4} \left(u_I (1-s)(1-t) + u_J (1+s)(1-t) + u_K (1+s)(1+t) + u_L (1-s)(1+t) \right)$$

$$v = \frac{1}{4} \left(v_I (1-s) \dots \text{(analogous to } u \text{)} \right)$$

Natural Coordinates (cont'd)



- Natural coordinates for quadrilaterals are defined as



Natural Coordinates (cont'd)



- This transforms the expression for the stiffness matrix to

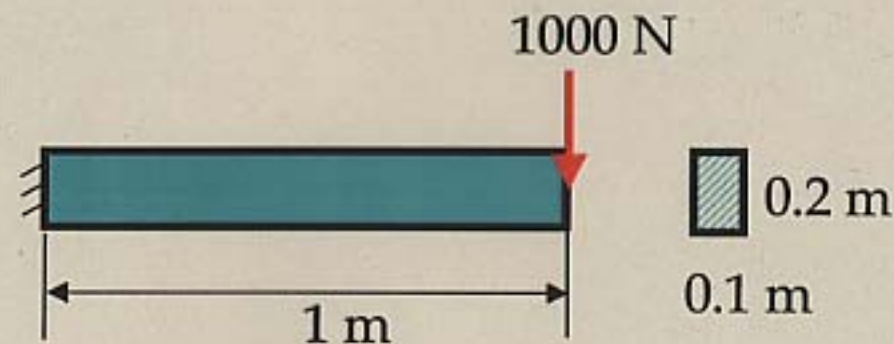
$$\mathbf{k} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} ds dt$$

- Additional mathematical operations required to transform strains and stresses from natural to global coordinates

Example 1: Beam Model Using 2D Elements



- A cantilevered beam 1 m long, 0.1 m wide, and 0.2 m high is loaded by an end load of 1000 N. The Young's modulus for the material is 200 GPa. Model a section of the beam using PLANE2 and PLANE42 elements and compare the maximum stresses produced with the exact solution.



Example 1 (cont'd)



- The maximum stress in the beam using “exact” methods is

$$\sigma_{x,\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(1000)(1)(0.1)}{\frac{1}{12}(0.1)(0.2)^3} = 1.500 \text{ MPa}$$

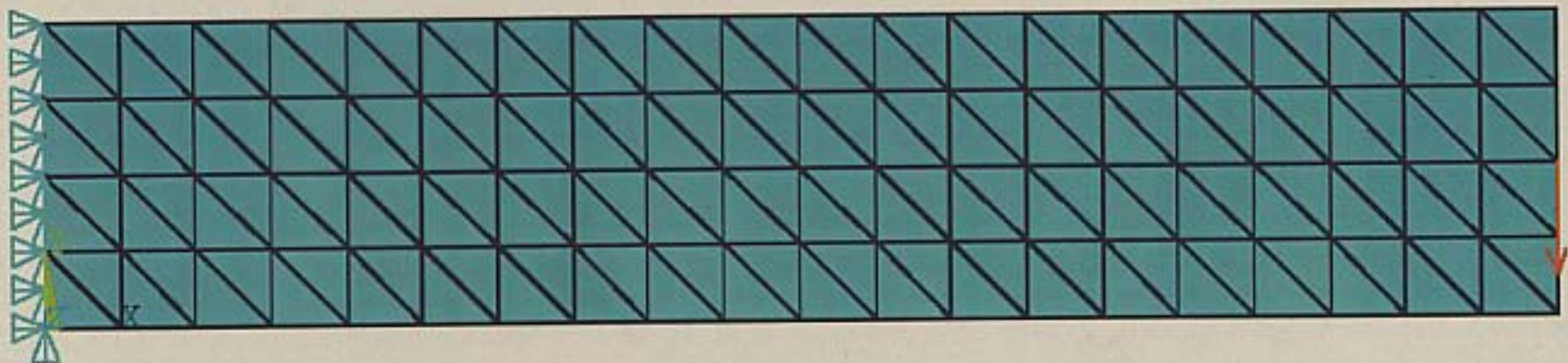
- The maximum deflection (at the free end) using “exact” methods is

$$v_{\max} = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{(1000)(1)^3}{3(200 \times 10^9) \frac{1}{12}(0.1)(0.2)^3} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Example 1 (cont'd)



- When the beam is modeled as a set of plane stress elements the load at its end must be divided by its width to produce a load per unit width; thus the load applied at the end must be $(1000/0.1 = 10000 \text{ N/m})$
- Using PLANE2 elements and mapped meshing (with an element side of 0.05 m) we obtain in ANSYS



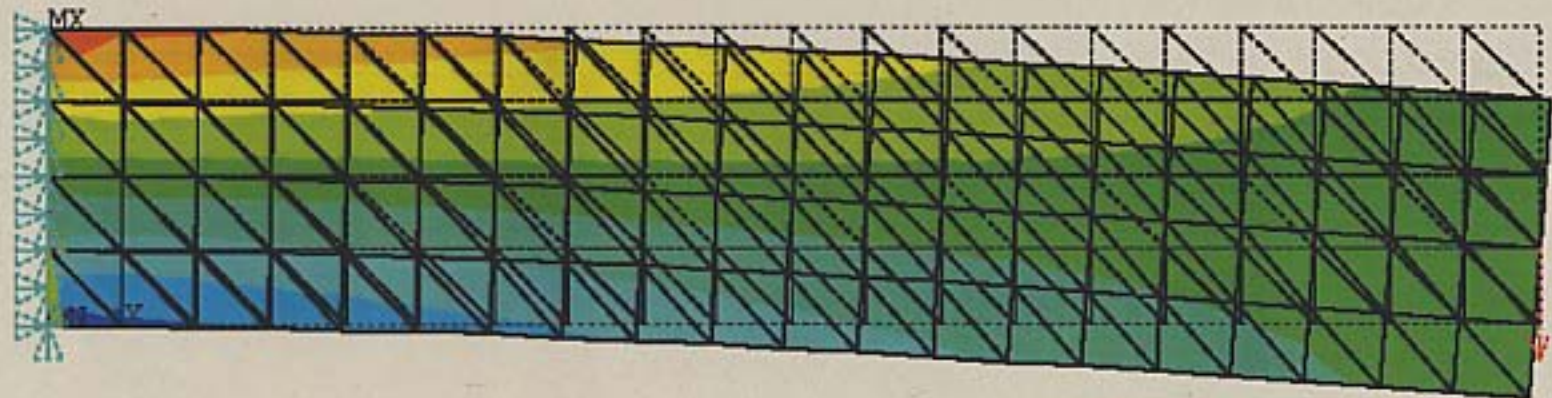
Example 1 (cont'd)



- ANSYS produces the following solution for this model (contour plot of SX on deformed shape)

DMX = .259E-04
SMN = -.165E+07
SMX = .168E+07

U
F



Example 1 (cont'd)

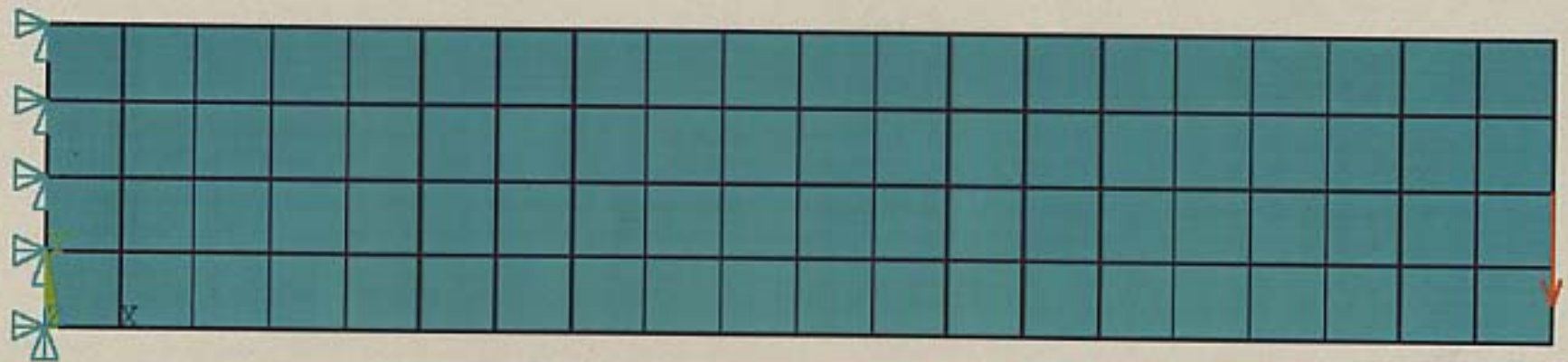


- The maximum axial stress predicted by this model is 1.68 Mpa, which is 12% higher than the exact solution
- Similarly the maximum deflection predicted by this model is 2.59×10^{-5} m, which is 3.6% higher than the exact solution

Example 1 (cont'd)



- Using PLANE42 elements and mapped meshing (with an element side of 0.05 m) we obtain in ANSYS

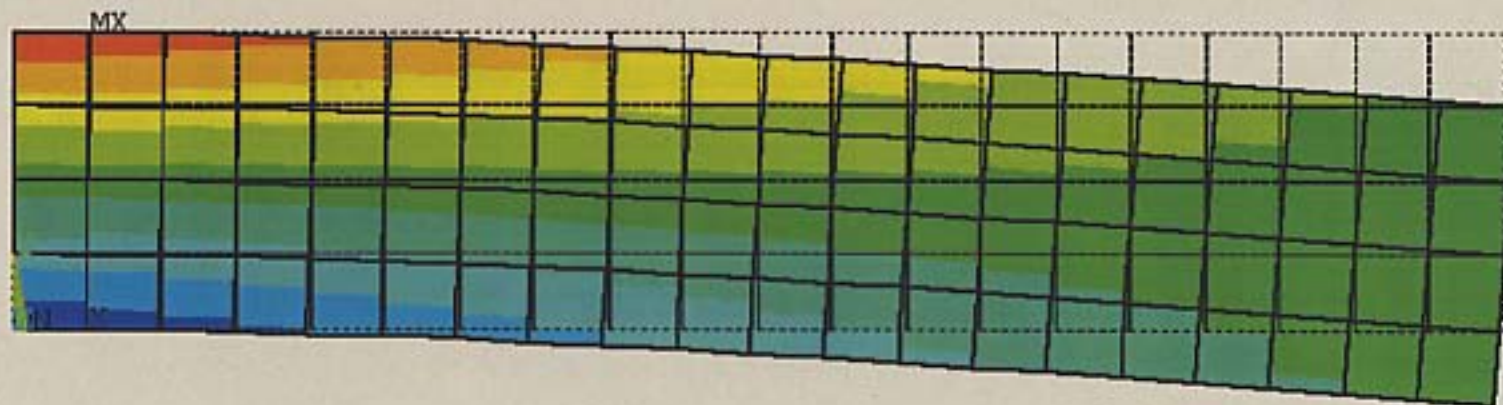


Example 1(cont'd)



- ANSYS produces the following solution for this model (contour plot of SX on deformed shape)

DMX = .258E-04
SMN = -.151E+07
SMX = .151E+07



Example 1 (cont'd)



- ❑ The maximum axial stress predicted by this model is 1.51 Mpa, which is 0.7% higher than the exact solution
- ❑ Similarly the maximum deflection predicted by this model is 2.58×10^{-5} m, which is 3.2% higher than the exact solution
- ❑ Note also that the x -direction stresses vary only in the y direction in each element



Example 1 (cont'd)

- ❑ The PLANE42 element provides a better approximation with fewer elements and DOF than the PLANE2 element in this case because the stress variation in the y direction is linear in the exact solution
- ❑ The PLANE2 element may provide a better approximation in instances when the bending moment varies quadratically or at a higher order in the x direction

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

56

A autovettori =
→ moti uguali;

... i modi
puramente
estensivi cond.
sono + uguali.
... I modi
flessionali
possono essere
adeguati:

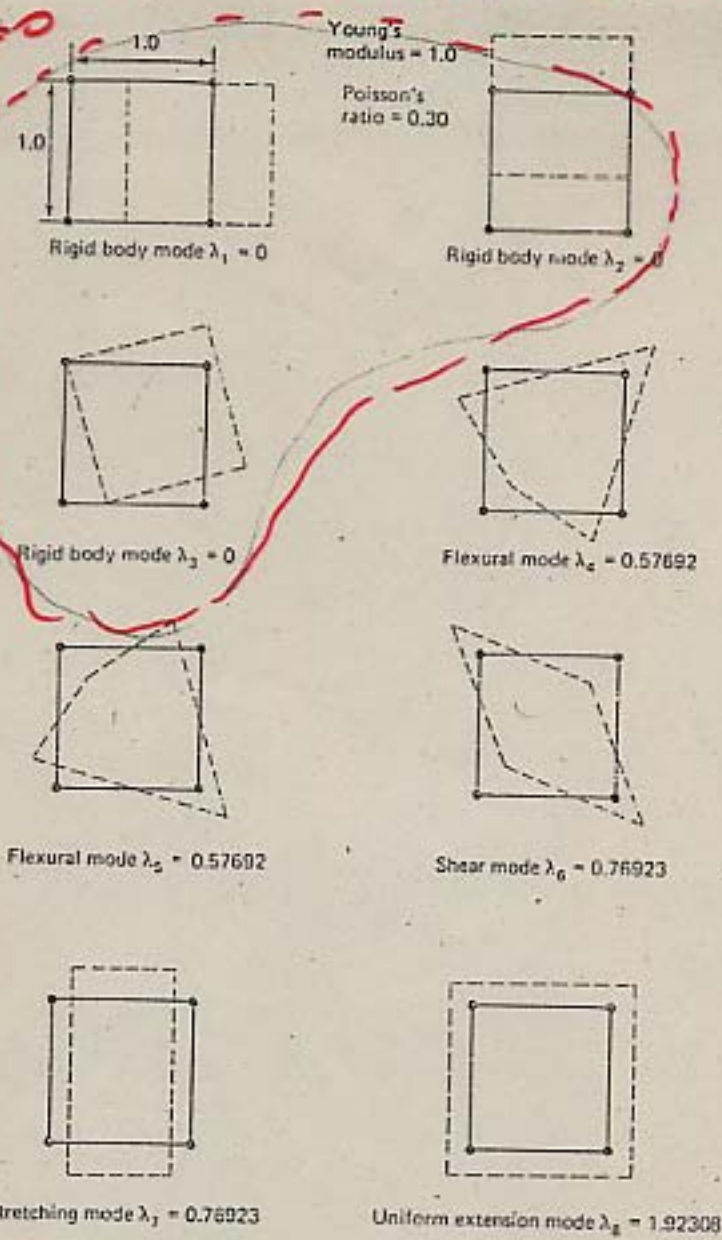
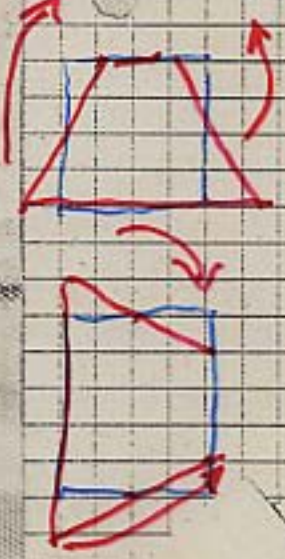


Figure 3.15. Eigenvectors and eigenvalues of four-node plane strain element.

Eseguendo un'analisi
spettrale più la K^e
dell'elemento in esame
si ha:

Osservate come si
abbiano 2 autovettori
multiplici λ₄, λ₅
e λ₆, λ₇.

Il modo puramente
estensivo è quello
a cui corrisponde
λ_{max}, e quindi quello
a cui corrisponde
il massimo di rigidezza.

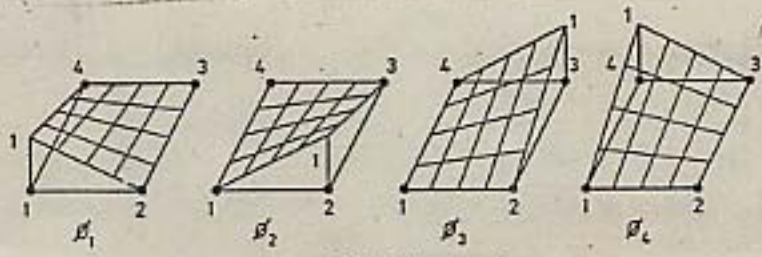
Table 6.4 STIFFNESS MATRIX FOR SIMPLE RECTANGULAR ELEMENT

U_1	V_1	U_2	V_2	U_3	V_3	U_4	V_4
$4\mu + 2(1 - \nu)/\delta$	$\frac{3}{2}(1 + \nu)$	$2\mu - 2(1 - \nu)/\delta$	$\frac{3}{2}(1 - \nu)$	$-2\mu - (1 - \nu)/\delta$	$-3(1 + \nu)/2$	$-4\mu + (1 - \nu)/\delta$	$-3(1 - \nu)/2$
	$4/\delta + 2(1 + \nu)/\delta$	$-\frac{3}{2}(1 - \nu)$	$-4/\delta + (1 - \nu)/\delta$	$-3(1 + \nu)/2$	$-2/\delta - (1 - \nu)/\delta$	$3(1 - \nu)/2$	$2/\delta - 2(1 - \nu)/\delta$
		$4\mu + 2(1 - \nu)/\delta$	$-\frac{3}{2}(1 + \nu)$	$-4\mu + (1 - \nu)/\delta$	$3(1 - \nu)/2$	$-2\mu - (1 - \nu)/\delta$	$3(1 + \nu)/2$
			$4/\delta + (1 - \nu)/\delta$	$-3(1 - \nu)/2$	$2/\delta - 2(1 - \nu)/\delta$	$3(1 + \nu)/2$	$-2/\delta - (1 - \nu)/\delta$
				$4\mu + 2(1 - \nu)/\delta$	$3(1 + \nu)/2$	$2\mu - 2(1 - \nu)/\delta$	$3(1 - \nu)/2$
					$4/\delta + 2(1 - \nu)/\delta$	$-3(1 - \nu)/2$	$-4/\delta + 2(1 - \nu)/\delta$
						$4\mu + 2(1 - \nu)/\delta$	$-3(1 + \nu)/2$
							$4/\delta + 2(1 - \nu)/\delta$

$K = \frac{Et}{12(1 - \nu^2)}$

Symm.

$\delta = \Delta/a$



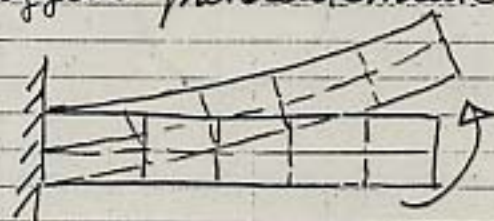
$$\epsilon_{012} = T \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ -dx dy \end{bmatrix}$$

ma anche la matrice di legame elastico
è risulta più complessa -

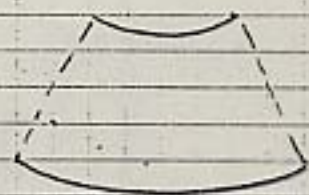
Nell'ipotesi di isotropia $dx dy = 0$, di isotropia $dx = dy = d$

Elemento Rettangolare del I° ordine modificato

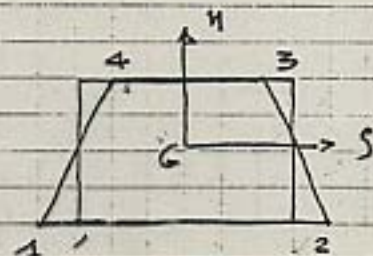
Si è osservato che questo elemento converge in modo relativamente lento nel caso di lastre snelle (travi) soggette prevalentemente a flessione.



Assunzione - Flessione pura



Deformata esatta
(Flessione cilindrica)



Deformata dell'elemento

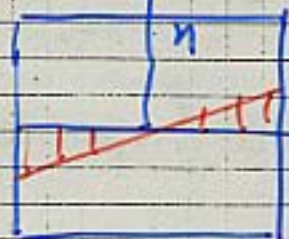
$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$$

$$-u_1 = u_2 = u_4 = -u_3$$

È evidente dalla figura che la deformata dell'elemento (bending mode) approssima la deformata "esatta" delle travi delle travi.

Si osserva però che in una trave soggetta a flessione pura gli sforzi σ_{xy} e le tensioni tangenziali τ_{xy} risultano nulli ovunque.

L'elemento non è in grado di approssimare questa circostanza.

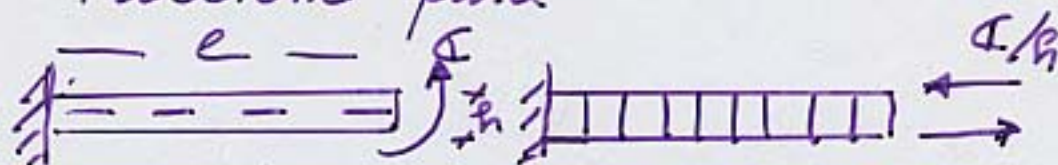


"SHEAR LOCKING"

1 pto Gauss (bivariate) $\rightarrow$ const. shear

"Incompatible"

Flessione pura



$$v = \frac{cl^2}{2ES}$$

Modello e.f.

$$\sigma_{z \max} = \frac{M}{W}$$

errore > 30%

$$y = z = 0$$

En. def. sol. Esatta

$$\bar{\Phi} = \int_V \frac{\sigma_z^2}{2E} A dz$$

Sol. e.f.

$$y_{xy} = \frac{U_1}{2b} (1-s) - \frac{U_1}{2b} (1+s) \Rightarrow \tau = G\gamma$$

$$\bar{\Phi}^T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{2G} ds dt = \frac{1}{2} G \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_{xy}^2(s, t) ds dt$$

PARASITIC SHEAR ENERGY

per $h \rightarrow 0$ $\bar{\Phi}^T \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ LOCKING.Rimedio: Annullare $\bar{\Phi}^T$

Il modo + semplice è integrare questo termine con 1 solo pto di Gauss (integrazione ridotta selettiva) ove $y(s=0, t=0) \equiv 0$

N.B. questo elemento non è conforme (è talvolta detto con nodi incompatibili)

Es  $l/5 = 5$

sol ex 103

Mesh 1

Mesh

Quadril.

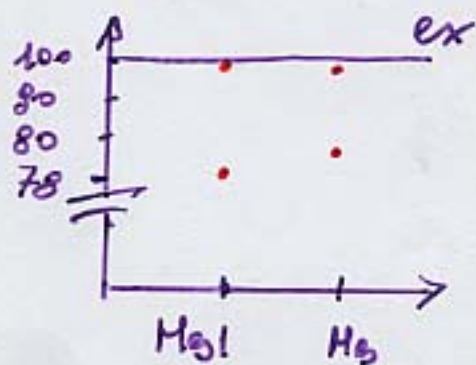
70,1

73,7

Incomp.

101,5

101,3



N.B. L'el. modificato mostra una convergenza non uniforme come è tipico degli el. non compatibili

4-node		2 x 2	—
4-node distorted		2 x 2	—
8-node		3 x 3	2 x 2
8-node distorted		3 x 3	2 x 2
9-node		3 x 3	2 x 2
9-node distorted		3 x 3	2 x 2

TABLE 5.5 Gauss numerical integration orders in evaluation of stiffness matrices of two-dimensional rectangular elements (use of Table 5.2).

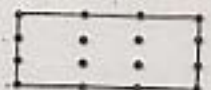
16-node		4 x 4	3 x 3
16-node distorted		4 x 4	3 x 3

TABLE 5.5 (cont.)

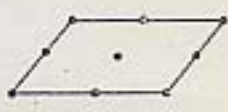
of Problem	Element			
Truss or cable	2-node		Three-dimensional beam	3-node or 4-node 
Two-dimensional Plane stress Plane strain Axisymmetric	8-node or 9-node		Plate	9-node 
Three-dimensional	20-node		Shell	9-nodes or 16-nodes 

TABLE 5.6 Isoparametric elements usually effective in analysis.

TABLE 5.6 (cont.)

TRIANGOLARI

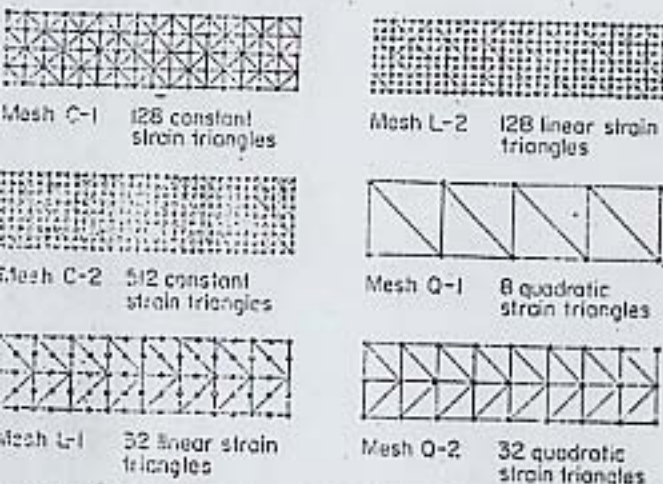
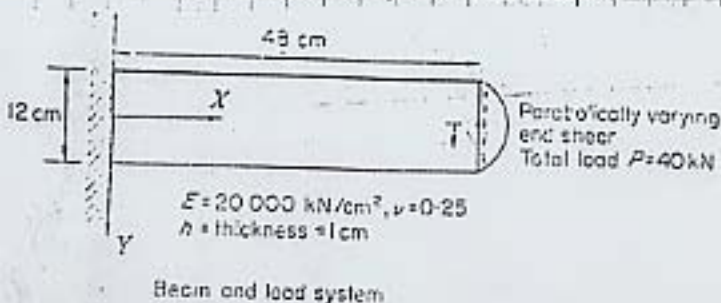


Figure 4.15 Cantilever beam under end shear load—Triangular meshes

Table 4.1 CANTILEVER BEAM: COMPARISON BETWEEN CONSTANT, LINEAR AND QUADRATIC STRAIN MESHES SHOWN IN FIGURE 4.15

Deflection and normal stress				
Element	Mesh	Total number of nodal unknowns	Tip deflection v_x (cm)	Stress σ_x (N/cm²) at $X = 12$ cm $Y = 6$ cm
Constant strain triangle	C-1	160	0.45834	51.225
	C-2	576	0.51282	57.342
Linear strain triangle	L-1	160	0.53259	59.145
	L-2	576	0.53353	60.024
Quadratic strain triangle	Q-1	68	0.53059*	59.973*
	Q-2	214	0.53259	59.843
Beam theory (Upper bound for v_x)			0.53374	60.000

*Average of values at $Y = 6$ cm and $Y = -6$ cm

Confronto fra FEM - Problemi piani di Torsione

- Rettangolari -

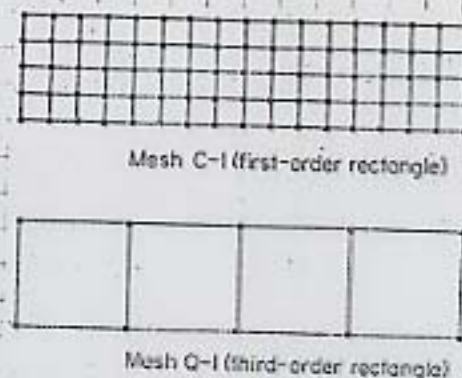
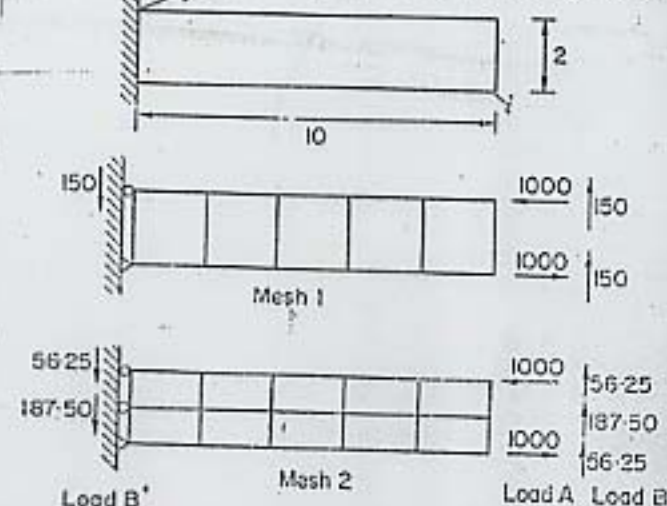


Table 4.2 COMPARISON OF RECTANGULAR AND TRIANGULAR ELEMENTS

Deflection and normal stress			
Element	Number of degrees of freedom	Tip deflection v_x (cm)	σ_x (N/cm²) at $X = 12$ cm $Y = 6$ cm
First-order rectangle	160	0.51679	58.266
Constant strain triangle	160	0.45834	51.225
Third-order rectangle (six variables per node)	52	0.52807	60.631
Quadratic strain triangle	68	0.53059	59.973

- Rettangolari - Conforming mesh



		Displacement at l		Bending Stress at j	
		Load A	Load B	Load A	Load B
First-order element	Beam Theory	10.00	103.0	300.0	4.050
	Mesh 1	6.81	70.1	218.2	2.945
First-order element with constant shear	Mesh 2	7.06	72.3	218.8	2.954
	Mesh 1	10.00	101.5	300.0	4.050
	Mesh 2	10.00	101.3	300.0	4.050

Figure 4.19 Cantilever beam—Modified shear element

MODELLI AGLI ELEMENTI FINITI per PIASTRE.

PIASTRE SOTTILI (Love-Kirchhoff)

Come visto questa teoria, basata sull'ipotesi di trascurabilità delle def. da taglio

$$\gamma_{xz} \cong \gamma_{yz} \cong 0$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

rappresenta la naturale generalizzazione della teoria di Eulero-Bernoulli per le travi.

L'eq di S. Germaine-Lagrange

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} \right) = \frac{q_z(x,y)}{D}$$

è la generalizzazione delle eq. della linea elastica

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = \frac{q}{EI}$$

così come le condizioni al bordo e

di tipo cinematico

$$\begin{cases} w = 0 \\ \varphi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{rot. normale al lato}) \end{cases}$$

che di tipo statico

$$\begin{cases} M_n = 0 \\ T_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

si ricorda che l'ultima b.c. coinvolge non la derivata del m. flettente Q_n ma T_n (l'opio di Kirchhoff...)

-291-

Su di questo modello, tipicamente applicabile
per piastre con uno spessore inferiore ad un
decimo - un ventesimo del lato più corto

$$t < \frac{l}{10-20}$$

ed in presenza di spostamenti limitati ($w_{\max} \leq t$)
e quindi alle usuali piastre metalliche
ed in c.a. e c.a.p. si concentrarono
fin dall'inizio degli anni 60 gli sforzi per
sviluppare el. finiti agli spostamenti di
tipo compatibile, basati sul P. di Minimum
dell'E.P.T. Φ

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\overbrace{A^T \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{\epsilon}} - q^T w) dA + \int_{\partial\Omega_F} (\bar{m}_n \varphi_n + \bar{F}_z w) ds$$

Nel pot. elastico Φ compaiono i quadrati
delle $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ ed affinché questo termine risulti
finito e valutabile occorre che:

w sia una f. continua dotata di derivate
prime $w_{,x}, w_{,y}$ continue e di quadrato sommabile
(nel senso di Lebesgue)

Per le travi (1-D) $w \in C^1[0, l]$ è bastato
approssimare w con polinomi cubici di HERMITE
che garantiscono la continuità di w e $\frac{dw}{dz}$
(di fatto essi coincidono con le linee elastiche
involte da cedimenti o rotazioni unitarie
degli estremi)

In 2-D ciò risulta più completo, si
ovvero molte che essendo

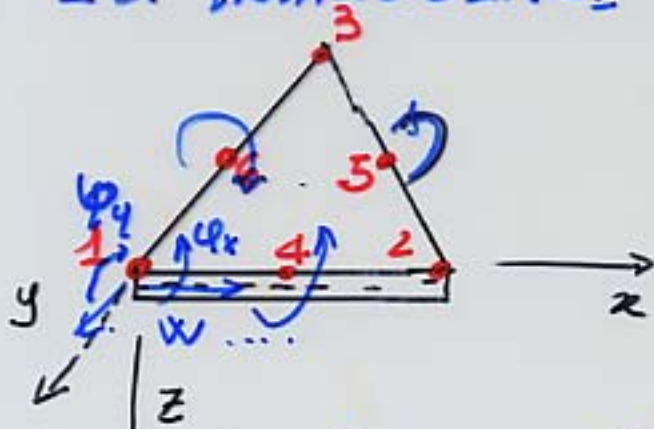
$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x} n_x + \frac{\partial W}{\partial y} n_y$$

la continuità di W, x e $W, y \Rightarrow$ la continuità di W, n / n
(in termini meccanici in campo elastico
non si possono avere "carniere cilindriche" comunque
dirette).

Si rimanda alla letteratura tecnica specifica
(e.g. Zienkiewicz e Taylor ... op. cit. etc...) per una
trattazione esauriente, nel seguito
si presenteranno brevemente i 2 el. "compatibili"
che verificano in pieno i requisiti di regolarità
citati.

EL. TRIANGOLARE a 21 d.o.f. (1969)

TRIANGOLO DI PASCAL
(TARTAGLIA)



W pol di 5° grado completo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & d_1 & & \\ & & & & d_2 x & & d_3 y \\ & & & d_4 x^2 & d_5 xy & d_6 y^2 & \\ & & d_7 x^3 & d_8 x^2 y & d_9 xy^2 & d_{10} y^3 & \\ & d_{11} x^4 & d_{12} x^3 y & d_{13} x^2 y^2 & d_{14} xy^3 & d_{15} y^4 & \\ d_{16} x^5 & d_{17} x^4 y & d_{18} x^3 y^2 & d_{19} x^2 y^3 & d_{20} xy^4 & d_{21} y^5 & \end{array}$$

Nei nodi 1, 2, 3 6 parametri nodali

$$W, W, x, W, y, W,_{xx}, W,_{yy}, W,_{xy} \quad (6 \times 3 = 18)$$

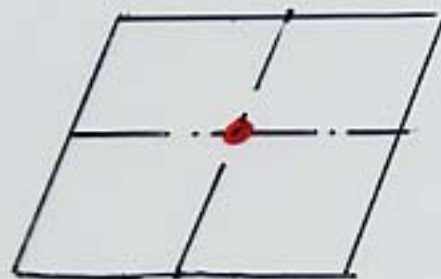
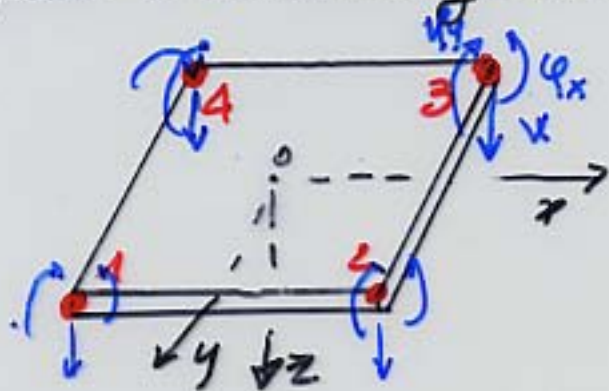
ed inoltre nei "mid side" node 4, 5, 6 le 3 derivate normali W, n

-301-

è facile osservare come approssimando la soluzione con polinomi di 5° grado risultano continue non solo u e $u_{,n}$ ma anche le curvature ($\propto$ alla ∂^2) e quindi i momenti, e ciò può non essere "vero" per alcune condizioni di carico.

El. Rettangolare a 16 (12) d.o.f.

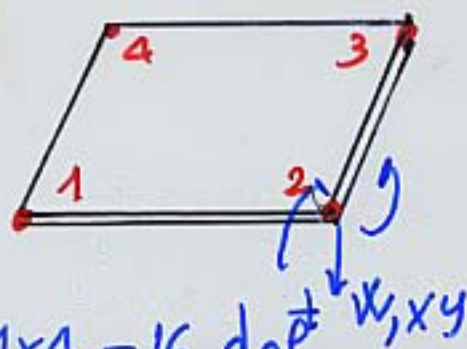
Assumendo come f. di forma i polinomi di Hermite in x ed y (ovvero ipotizzando una deformazione a trave nelle 2 direzioni) è stato proposto l'el. rettangolare a 12 d.o.f. in figura



"PATCH"
(di element)

- i) la $u_{,n}$ ($\sigma \varphi_n$) non è continua lungo i lati
- ii) Se al bordo del gruppo di elementi si assegna una def. uniforme (e.g. una curvatura costante) l'elemento non è in grado di riprodurre esattamente tutti gli stati di def. uniforme in tutti i punti interni.

⇒ Enon supera il patch test.

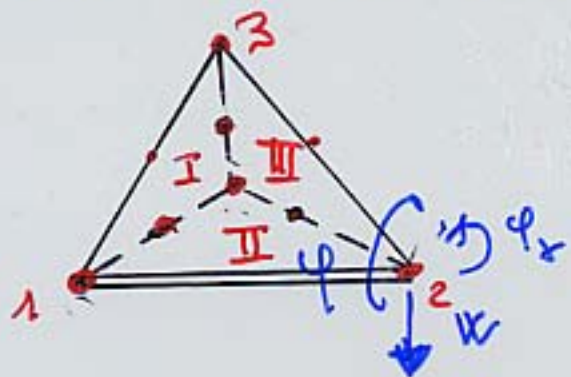


$4 \times 4 = 16$ d.o.f.
(Compatible)

Aggiungendo nei nodi come ulteriori variabili

$u_{,xy}$ (ovvero γ_{xy}) con le stesse f. di forma si ottiene un elemento completamente compatibile
(u cubico completo + termini di rotazione sup.)

L'elemento triangolare ad alta compatibilità
HCT a 12 (e 9) d.o.f. (Clough-Tocher 1968)



L'elemento compatibile
è stato ottenuto attraverso
la definizione di campi
di spostamento distinti
su 3 sottodomini in Figura

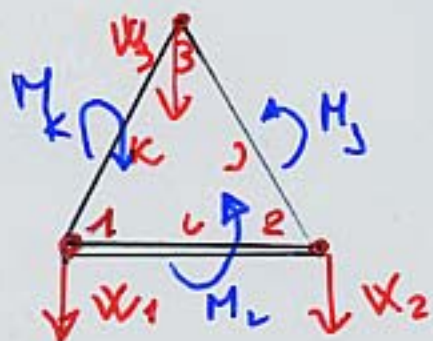
Mediante eliminazione (condensazione statica)
è stato ottenuto un elemento triangolare a
 $3 \times 3 = 9$ d.o.f. Ne è stata sviluppata una
versione anche a 12 d.o.f con 3 mid side nodes
ove assegnare φ_n . Questo elemento era
contenuto nei vari programmi S.A.P.
(e era molto accurato).

A partire dagli anni 70-80 sono stati proposti
numerosi elementi "non compatibili" basati
su interpolazioni non solo dello spostamento w
ma anche del Tensore dei momenti.

e quindi basati su principi variazionali
derivanti dal Principio minimo dell'E.P.T.

in genere nel principio di Stazionarietà
di Hellinger - Reissner

Il più semplice, ed il più antico di
essi, usato principalmente nel calcolo
a rottura delle piastre è il cosiddetto
elemento di Hellan e Hermann

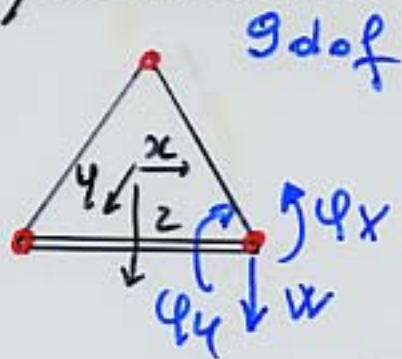


- v lineare

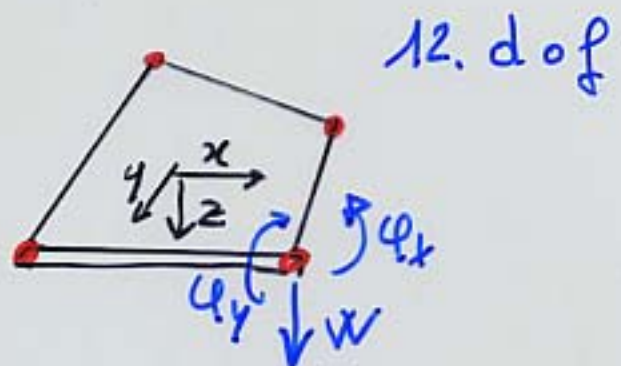
- m costante

L'elemento è detto "misto" se come variabili compaiono esplicitamente v e m , l'elemento è detto "Ibrido" se m è eliminato a livello dell'elemento per ottenere una matrice delle energie di rigidezza nelle sole variabili di spostamento.

Nelle versioni attuali dei programmi commerciali sono ora implementati alcuni ~~tipici~~ elementi di questo tipo che in genere, per poter essere interfacciati con pb piani di tensione (el. plate and shell) presentano 9 (d.o.f) per i triangoli e 12 d.o.f per i quadrilateri.



9 d.o.f



12. d.o.f

I più comuni sono dovuti a Bazeley, Irons e Zienkiewicz e Bathe.

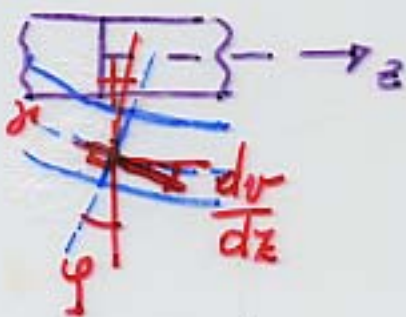
LASTRE DEFORMABILI A TAGLIO (REISSNER-MINDLIN)

Le difficoltà sopra ricordate nello sviluppare modell.

e.f. con continuità C^1 in 2-D hanno portato dalla metà degli anni 70 a sviluppare elementi per piastre di R-M. che attualmente sono disponibili ed i più utilizzati nei codici di calcolo più diffusi (ADINA, ABAQUS, SAP 200)

La ragione del successo sta nel fatto che la continuità richiesta per lo spostamento trasversale $w \in C^0$, quindi possono essere usate le stesse funzioni di forma, e lo stesso tipo di elementi isoparametrici visti per i problemi piani e 3D.

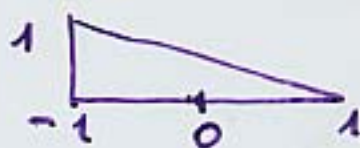
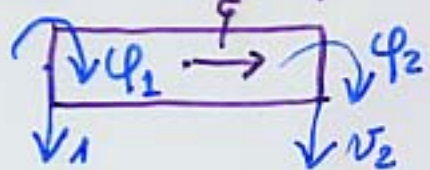
Trave def. a Taglio (Timoshenko)



$$\begin{cases} w(z) = \varphi(z)y & \text{cons. sez. piano} \\ v(z) = v_0(z) & \text{undef. sez. trasvers.} \\ y_{12} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = v' + \varphi \end{cases}$$

2 sono i campi indep. v e φ
e basta che siano continui

L'elemento "lineare"



posto $\xi = z/L$ si hanno

$$(1) \begin{cases} v(\xi) = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 \\ \varphi(\xi) = N_1(\xi)\varphi_1 + N_2(\xi)\varphi_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(1-\xi) = N_1(\xi)$$

$$\frac{1}{2}(1+\xi) = N_2(\xi)$$

ricordando che la curvatura $\gamma = \frac{d\varphi}{dz}$,
l'EPT dell'elemento di trave si scrive

$$\Pi(v, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^e EJ \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz + \frac{GA}{2\beta} \int_0^e \gamma^2 dz - \int_0^e \bar{q} v + \bar{m} \varphi dz \quad (2)$$

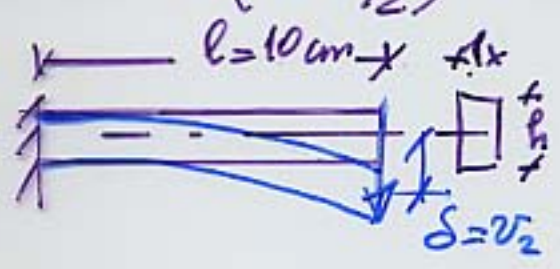
4/5 $\xrightarrow{1/r} v' + \varphi$

sostituendo 1 in 2 (nei primi 2 termini si ottiene)

$$K^e = \frac{Eh^3}{12} \int_0^e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/e \\ 1/e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/e & 1/e \end{bmatrix} dz + \frac{5GA}{6} \int_0^e \begin{bmatrix} -1/e \\ 4/e \\ -(1-z/e) \\ -z/e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/e & 4/e & -(1-z/e) & -z/e \end{bmatrix} dz$$

$EJ B^T B$ $\frac{GA}{\beta} B^T B$

se $v=0$ ($G=E/2$) si ha:



$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{5h}{e} & -\frac{5h}{e} & \frac{5h}{2} & \frac{5h}{2} \\ -\frac{5h}{e} & \frac{5h}{e} & -\frac{5h}{2} & -\frac{5h}{2} \\ \text{Sym} & & \left(\frac{h^3}{e} + \frac{5hl}{3} \right) & \left(\frac{5hl}{6} - \frac{h^3}{e} \right) \\ & & \left(\frac{h^3}{e} + \frac{5hl}{3} \right) & \left(\frac{5hl}{6} - \frac{h^3}{e} \right) \end{bmatrix}$$

Se si considera la mensola in Figura poiché $v_1 = \varphi_1 = 0$ si ha

$$\frac{E}{12} \begin{bmatrix} \frac{5h}{e} & -\frac{5h}{2} \\ -\frac{5h}{2} & \left(\frac{h^3}{e} + \frac{5hl}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta = \frac{12Pl}{5hE} \left(1 + \frac{5hl}{4 \left(\frac{h^3}{e} + \frac{5hl}{3} \right)} \right)$$

mentre la teoria tecnica $\Rightarrow \delta^* = \frac{Pl^3}{3ES} = \frac{4Pl^3}{Eh^3}$

per $h/e = 1/100 \quad \delta^* = \frac{4P}{E} (100)^3, \quad \delta \approx \frac{12P}{5E} \cdot 100 (1+3)$

"SHEAR LOCKING"

il termine in $\gamma = v' + \varphi = -\frac{v_1}{e} + \frac{v_2}{e} + \frac{1}{2}(1-\xi)\varphi_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\varphi_2$
essendo somma di un termine lineare e un termine costante
non si può annullare quindi $\int \gamma^2 dz \neq 0$
e l'elemento risulta molto più rigido.