

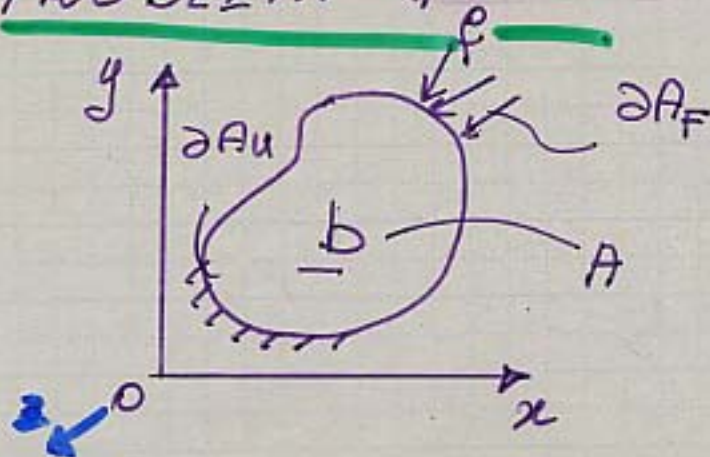
Problemi Piani di TENSIONE E DI DEFORMAZIONE

- FORMULAZIONE DEL problema pp 1-7
- FUNZIONI DI AIRY 8-12
- Con teoremi di TRIVÈ ponete 13-14....
- Funzioni di AIRY in coordinate polari
c.p.b. anisotrofici
- Il p.b. di Boussinesque

PROBLEMI PIANI

-1-

$$A \subset \mathbb{R}^2$$



(L. Corradi vol 1 cap 4)
pp 215...

SIA $\mathcal{B}$ un mezzo continuo di forma cilindrica (costante in z)
e sia $A \subset (x, y)$ la sua sezione trasversale

- Le azioni esterne, sia di superficie che di volume, e il peso x, y ovvero abbiano componenti nulle secondo z

$$\boxed{b_z = 0 \quad f_z = 0}$$

- ed inoltre sono indipendenti da z

$$\boxed{f = f(x, y), \quad b = b(x, y)}$$

- la condizione di vincolo non dipende da z .

Formulare la sol. come pb piano $\Rightarrow$ che non variano con z

le variabili indipendenti si riducono a 2

$$\boxed{\underline{u} = (u_x, u_y), \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}}$$

NB $\vec{x}$ è assunto $u_z = 0$ ($\sigma \in \mathbb{C}$)

(*)

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Leftrightarrow \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{u_z = \text{cost} \cdot z} \Rightarrow \begin{matrix} \epsilon_z? \\ \sigma_z? \end{matrix}$$

Eg. di Equilibrio

$$1_A - \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \end{cases}$$

in A

1_B

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = f_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = f_y \end{cases}$$

Eg. al contorno
in ∂A_F

Eg. di Compatibilità (rel. deformazioni spostamenti)

$$2_A - \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

2_B

$$\begin{cases} u_x = \bar{u}_x \\ u_y = \bar{u}_y \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{in } \partial A_u \\ \text{(al bordo)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{in } A \\ \text{(nel campo)} \end{matrix}$$

Le eq. di consequenza interne si
risolvono alle

$$\boxed{\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}}$$

• P₆ PIANO DI DEFORMAZIONE

$$u_z = 0$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ non solto.)

- il che accade nella sez di simmetria
- In un solido "molto lungo" ogni sez si comporta come una sez di simmetria



NASCONO delle tensioni normali $\sigma_z \neq 0$ (cost in z) che impediscono le def. e gli spostamenti lungo z. Le eq. costitutive diventano

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\epsilon_x + (1-\nu)\epsilon_y] \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\epsilon}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

ed inoltre $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

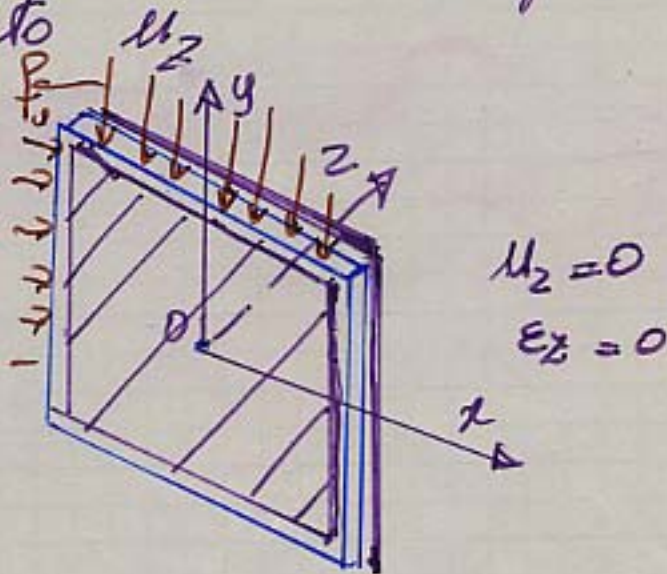
la legge di Hooke $\Rightarrow \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$

di conseguenza la presenza di uno $\sigma_z \neq 0$
influenza il legame costitutivo anche

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^{-1} \underline{\sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Oltre che nel caso di solidi "cementi" lunghi
siamo in un caso di def. piana anche
se il solido è vincolato sulle sezioni
estreme da vincoli che impediscano lo
spostamento

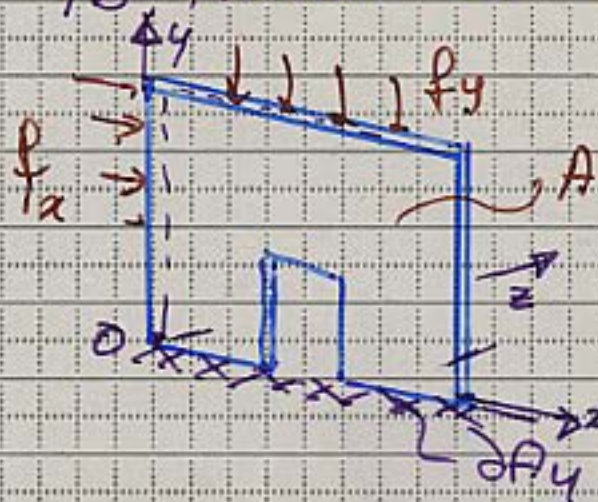


$$L_i = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_z \epsilon_z) =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} = (\bar{\phi} \text{ potenziale elastico})$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon}^{-1} \underline{\sigma} = (\bar{\phi}^c \text{ " complemento})$$

Pb PIANO DI TENSIONE



Si assume

$$\sigma_z = 0$$

$$(\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$$

lastre sottili

$$\Rightarrow (\text{Hooké}) \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \epsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \end{aligned}$$

e pertanto

$$\epsilon = \underline{\underline{C}}^{-1} \sigma$$

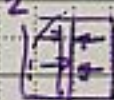
$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

il legame diretto si può ottenere direttamente per un volume

$$\sigma = \underline{\underline{C}} \epsilon$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$\frac{E}{1-\nu^2}$ (eff. Poisson)



la singola striscia non è libera di dilatarsi

N.B

A differenza del pb piano nelle deformazioni il pb piano negli sforzi fornisce (in generale) solo una soluzione approssimata che verifica l'equilibrio ma non la congruenza, ed è valida solo con opportuno o valori medi delle variabili

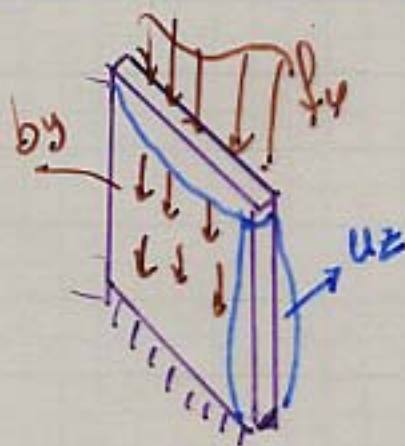
Si è visto infatti che le deformazioni tipiche dei pb piani (*)

-6-

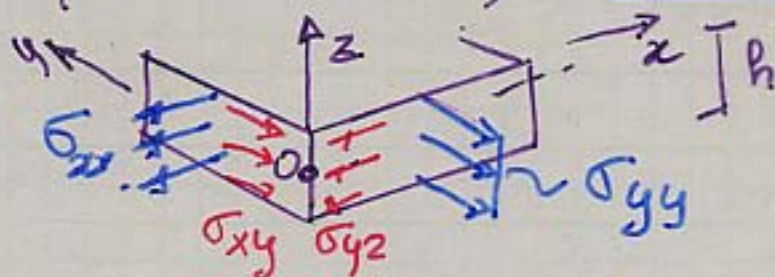
$$u_z = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow u_z = C_z$$

il che si verifica nel pb piano di deformazione
ove $\epsilon_z = 0 \Rightarrow C_z = 0$

mentre nel pb piano di tensione la $\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$
essendo σ_x e σ_y $f(x, y)$ generiche
composte la violazione di questa condizione



In entrambi i pb le variabili indipendenti u, ϵ, σ
sono (e si assumono) costanti nello spessore

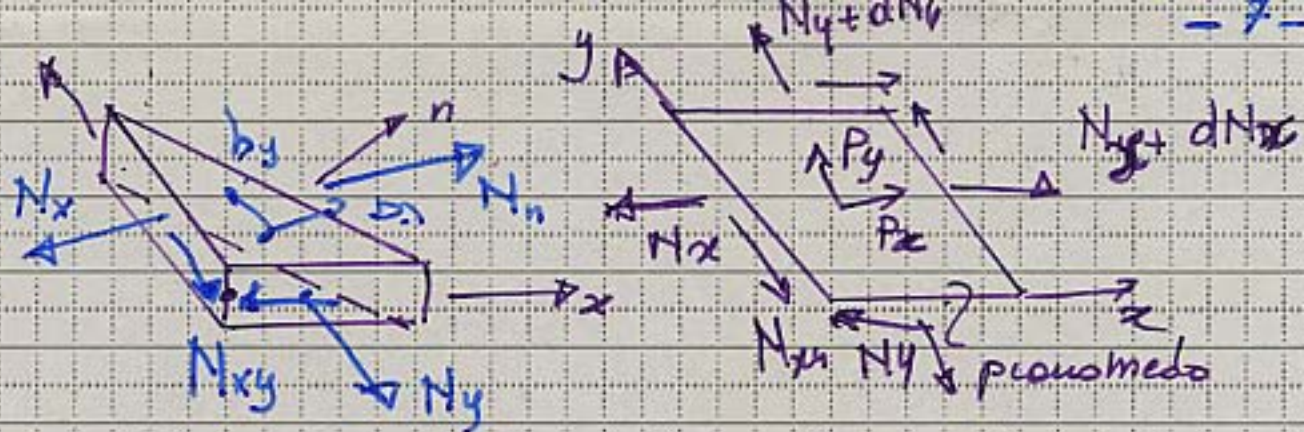


Sforzi membranali (risultanti nello spessore FL^{-1})

$$\begin{cases} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz \\ N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz \\ N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{cases}$$

N/m

Agiscono nel piano
medio della lastra



Se si definiscono delle forze di superficie

$$P_x = \int_h b_x, \quad P_y = \int_h b_y$$

o integrando sullo spessore le eq. indefinite di equilibrio o direttamente imponendo l'equilibrio degli sforzi membranali si perviene alle relazioni:

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} + P_x = 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} + P_y = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{brella} \\ \frac{dN}{dx} + p = 0 \end{array} \right)$$

Infine le variabili coniugate agli sforzi di membrana vengono definite mediante il PLV

$$\int_{dA} \left(\int_h \bar{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij} dz \right) dA = \int_{dA} N_{ij} \epsilon_{ij} dx dy \Rightarrow$$

$$e_x = \frac{1}{h} \int_h \epsilon_{xx} dz \quad (\text{valore medio di } \epsilon_x \text{ nello spessore})$$

$$e_y = \frac{1}{h} \int_h \epsilon_{yy} dz \Rightarrow \text{le eq. costitutive}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{h} \int_h \epsilon_{xy} dz$$

$$\underline{N} = \underline{C}' \underline{e}$$

$$\begin{vmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E(h)}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{vmatrix}$$

ove $\underline{C}' = h \cdot \underline{C}$
 si confronti con ***
 (ovviamente)
 $\underline{C}' \equiv \underline{C} \times h$ (costante)

-8-

Formulazione dei pb piani mediante
la funzione di sforzo o di (Airy)

Mentre i metodi numerici sono in genere basati
sul metodo degli spostamenti alcune
soluzioni di notevole interesse possono essere
derivate ~~e~~ particolarizzando al caso piano
le eq. di Beltrami-Michell (Conadi vol I pp 222-225)

Si omette per semplicità la derivazione, nel caso
generale si perviene alla seguente eq. di congruenza
in termini di sforzi:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -K \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right)$$

con $K = \frac{1}{1-\nu}$ p. piano di deformazione

$K = 1+\nu$ " di tensione

(ovviamente si ottiene una = eq in N_y con p al posto di b
Belluzzi vol III)

Se le forze di volume b sono costanti in A
il II membro si annulla ed i 2 problemi piani
vengono descritti dalle equazioni

Eq di congruenza

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

ed inoltre dalle eq. di equilibrio

(che non dipende dal
coef. di Poisson ν)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \end{array} \right. \quad \text{in } A \quad (\text{nel campo})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = f_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = f_y \end{array} \right. \quad \text{su } \partial A_f \quad (\text{al bordo})$$

FUNZIONE DI SFORZO o di Airy

-8 bis-

• Si formula il pb in termini di una sola funzione scalare $\varphi = \varphi(x, y)$

• Pb con dati nelle sole forze $\partial A_y \equiv 0 \Rightarrow \partial A \equiv \partial A_F$

Per semplicità si discute il solo pb piano di deformazione. La derivazione è analoga anche se più semplice della derivazione eq. di Beltrami-M.

Eq. di cong. interne o di St. Venant

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \Rightarrow$$

via eq. costitutive, ovvero sostituendo 2 in 1

$$\textcircled{2} \quad \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} [1-\nu(\epsilon_x) + \nu\epsilon_y] \quad \sigma_y = \dots, \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \textcircled{3} \quad 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left[\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} \right]$$

$$\Rightarrow \text{sommando ad entrambi i membri di 3} \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

$$\textcircled{4} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = K \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{2 \partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \text{derivando le eq. indefinite di eq. } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \dots$$

$$\textcircled{5} \quad \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = K \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right)$$

ove $K = \frac{1}{1-\nu}$ pb piano di def.

$K = 1+\nu$

di tensione

$\Rightarrow$ in assenza forze di volume ($b=0$)

$$\textcircled{6} \quad \boxed{\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{in } A}$$

Si introduce una funzione $\varphi(x, y)$, enf. regolare,
detta funzione (o potenziale) di sforzo o
funzione di Airy t.c.:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - b_x y - b_y x$$

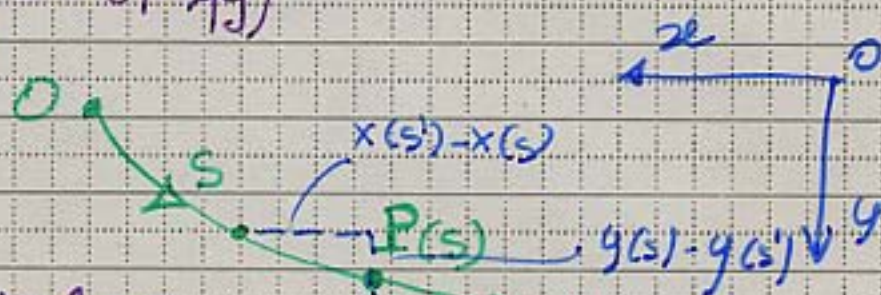
questa posizione rende le eq. di equilibrio
indefinite (in A) identicamente soddisfatte
come è immediato verificare per sostituzione $\Rightarrow$
la soluzione si ottiene risolvendo l'eq. biarmonica
o di Laplace

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad \text{in } A$$

con condizioni al bordo del tipo

$$\varphi = F(f_x, f_y) \quad \text{sul bordo } \partial A$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = G(f_x, f_y)$$



In particolare se
in assenza di forze di volume b
la componente $T(s)$ in direzione delle tang. t in A esterna f
è definita come:

$$T(s) = -R_x(s) n_y + R_y(s) n_x \quad \text{ove } R_x \text{ ed } R_y \text{ sono}$$

D'altra parte detto $M(s)$ il momento rispetto a P delle f. f_x e f_y risultanti di f
in direzioni x ed y

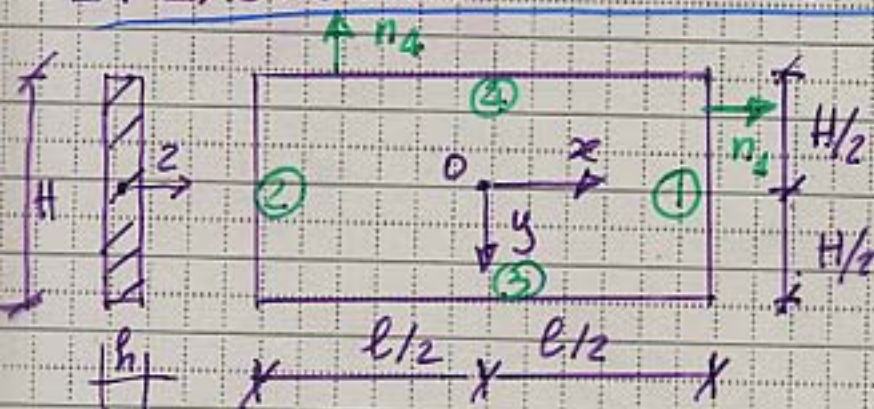
$$M(s) = R_x(s) y_0 - R_y(s) x_0 + \int_0^s (f_x y - f_y x) ds'$$

In assenza di forze di volume la formulazione in termini dello f . di sforzo φ avviene quindi:

$$\begin{cases} \nabla_4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 & \text{in } A \\ \varphi(s) = H(s) & \text{su } \partial A \\ \frac{\partial \varphi(s)}{\partial n} = -\bar{T}(s) & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Questa formulazione ben si presta a soluzioni per serie non ed essere affrontata via e.f.

LA LASTRA RETTANGOLARE CARICATA NEL SUO PIANO



$$\begin{aligned} n_1 &= (1, 0) \\ n_4 &= (0, -1) \end{aligned}$$

Le eq. di equilibrio al bordo $\Rightarrow$

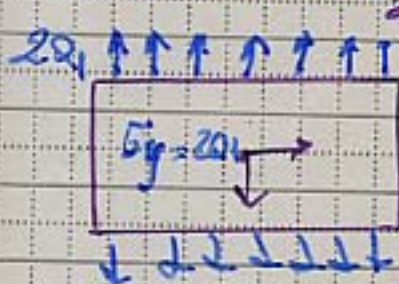
$$x = \pm l/2 \quad f_x = \pm \sigma_x, \quad f_y = \pm \tau_{xy}$$

$$y = \pm h/2 \quad f_x = \pm \tau_{xy}, \quad f_y = \pm \sigma_y$$

I. La più semplice $\varphi \Rightarrow \sigma_3 \neq 0$ è quadratica

$$\varphi(x, y) = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2a_3, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a_1, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -a_2$$



II φ Cubica

-11-

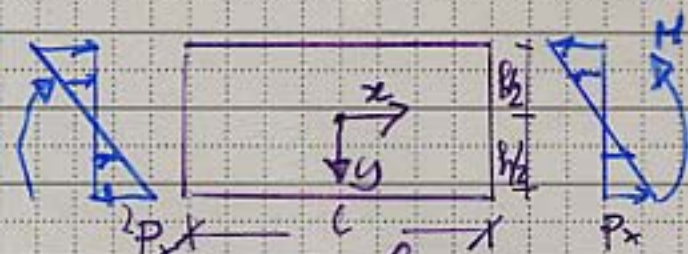
Mentre una f. φ di tipo quadratico è in grado di rappresentare uno stato di tensione (def...) costante mediante i termini del 3° ordine si può cogliere uno stato di tensione linearmente variabile. L'espressione generale può essere scelta come

$$\varphi(x,y) = b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2b_3 x + 6b_4 y \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6b_1 x + 2b_2 y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2(b_2 x + b_3 y) \end{cases}$$

a) σ_x variabile linearmente in y ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$)

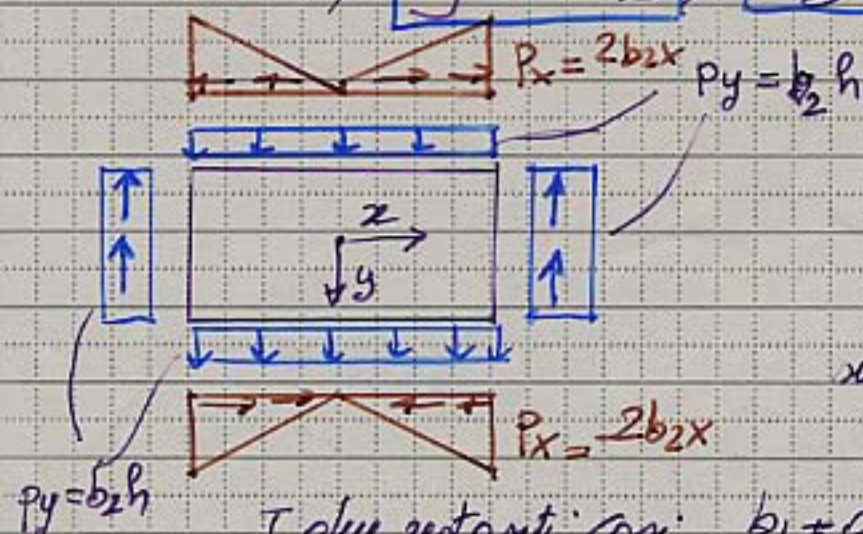
$$\rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 0 \quad b_4 \neq 0 \rightarrow \boxed{\sigma_x = 6b_4 y}$$



Si tratta della sol. di Navier della flessione costante

b) σ_y var. linearmente in y $b_1 = b_3 = b_4 = 0$ $b_2 \neq 0$

$$\sigma_x = 0, \quad \boxed{\sigma_y = 2b_2 y}, \quad \boxed{\tau_{xy} = -2b_2 x}$$



In Fig. si sono rapp. le forze omegmate al bordo $\bar{P}_i$

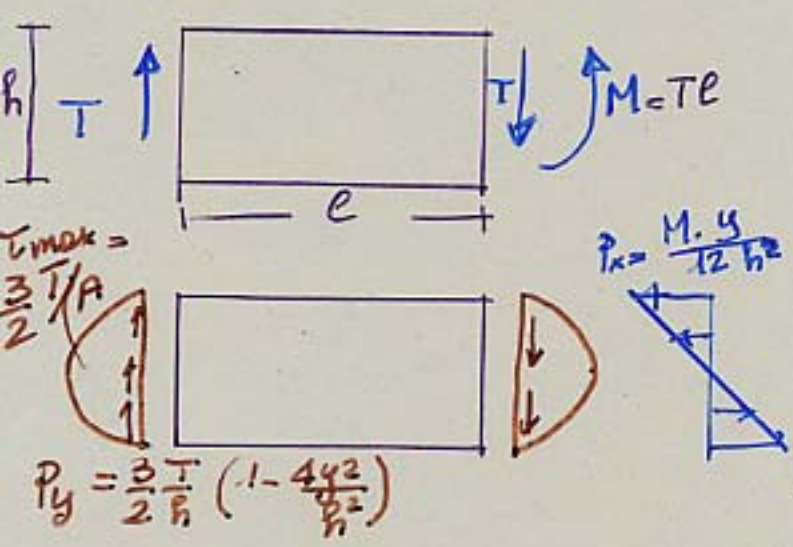
$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{P}_x \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x = \bar{P}_y \end{cases}$$

sul lato orizzontali: $n_x = 0$, $n_y = -1, +1$
 " " verticali: $n_y = 0$, $n_x = -1, +1$

I due restanti casi $b_1 \neq 0$, e $b_3 \neq 0$ compongono solamente uno scambio fra x e y .

Utilizzando polinomi di 4° grado si ottengono soluzioni quadratiche nelle tensioni, di 3° grado cubiche etc.
 Il principio di sovrapposizione degli effetti consente di costruire mediante combinazione lineare dei risultati i campi tensionali e le forze $\bar{p}_i$ desiderate.
 Si rimanda al testo citato di L. Conadi per la trattazione estesa. Si intende nel seguito discutere 2 casi importanti per le loro implicazioni.

III Flessione e taglio di una lastra rettangolare (spanne $b=1$) (p. piano di tensione)



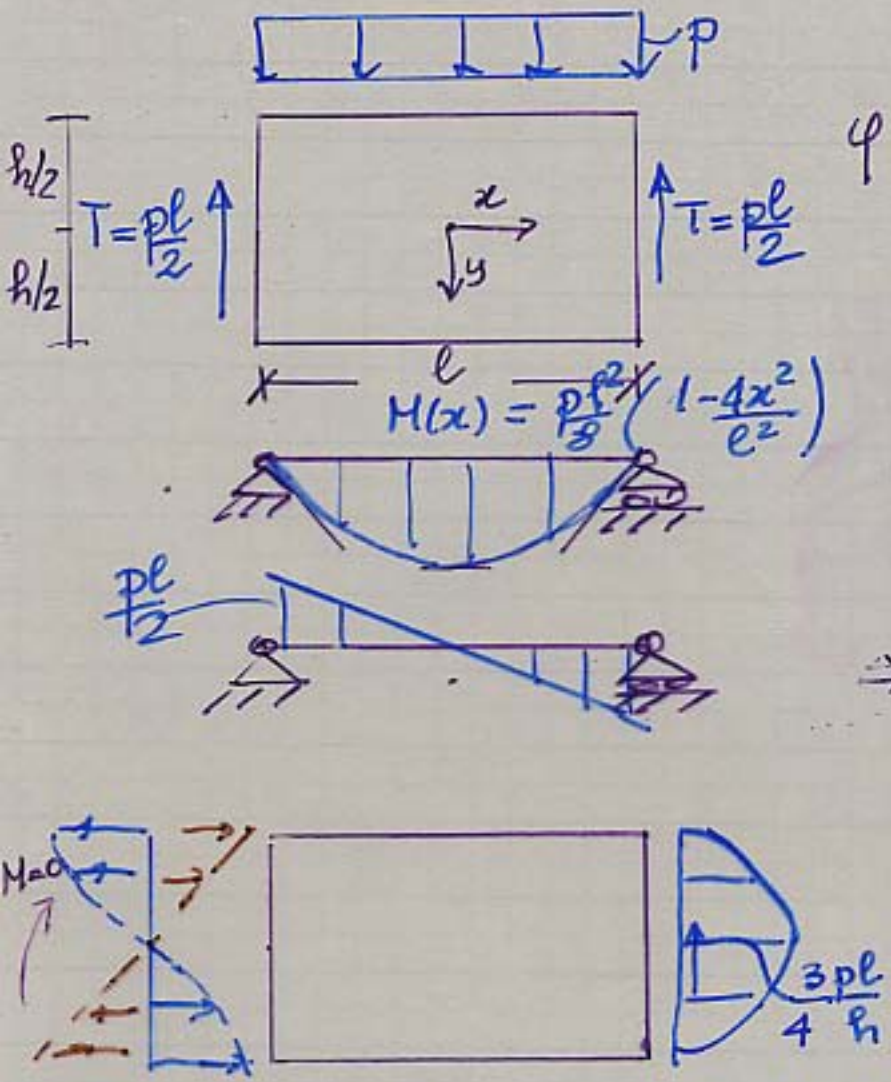
Dalla comb. delle soluzioni polinomiali del II°, III° e IV° si ottiene

$$\varphi(x,y) = \frac{T}{h} \left(-\frac{3xy}{2} + \frac{l}{h^2} y^3 + \frac{2}{h^2} xy^3 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 6 \frac{T}{h} \cdot \frac{y}{h^2} (l + 2x) \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \frac{3T}{2h} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) \end{cases}$$

La soluzione riportata coincide con quella vista a S.d.C., ed è valida, indipendentemente dalle effettive distribuzioni delle tensioni p_x e p_y applicate alle basi estreme, e non certo distorsione delle basi.
 La presenza del termine del IV° ordine $\frac{2}{h^2} xy^3$ (o.e. ep. costitutive) comporta la presenza del termine $u_z = \left(-\frac{2}{h^2} \frac{T}{h} \right) \cdot \frac{6}{E} yxz \Rightarrow$ VIOLAZIONE DELLA CONGRUENZA
 NB A S.d.C. la soluzione di Jourawsky è stata derivata in via approssimata, con sole considerazioni di equilibrio, ed ovviamente $\rightarrow$ la stessa violazione della Congruenza.

IV LASTRA Rettangolare soggetta ad carico uniformemente distribuito (o Trave alve)



Si assume il pol. di 5° grado

$$\varphi = p \left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{4} \frac{x^2 y}{h} - \frac{1}{8} \frac{x^2 y^3}{h^3} + \frac{1}{5} \frac{y^5}{h^3} \right) + \frac{1}{8} \frac{p l^2}{h^3} \left(1 - \frac{2 y^2}{5 l^2} \right) y^3$$
 ove il termine in y^3 viene sommato per soddisfare $M=0$ agli estremi.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{2p}{h^3} (2y^3 - 3x^2 y) - 6y \frac{p l^2}{h^3} \left(1 - \frac{2y^2}{5 l^2} \right) \\ \sigma_y = \frac{p}{2} \left(-1 + \frac{3y}{h} - \frac{4y^3}{h^3} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{6p x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{cases}$$

Ricordando che

$$M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \sigma_x dy = \frac{p l^2}{8} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right), \quad T(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy = -p x$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{12 M(x)}{h^3} y + p \left(4 \frac{y^3}{h^3} - \frac{3y}{h} \right) = \sigma_x^{NAVER} + \sigma_x \\ \tau_{xy} = 6 \frac{T(x)}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right) \end{cases}$$

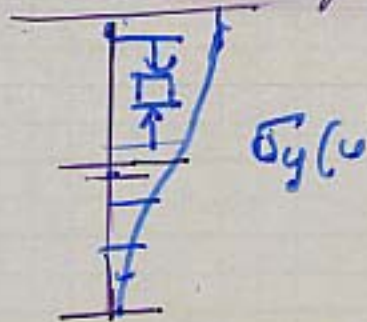
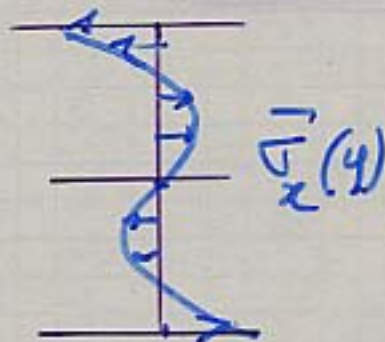
La soluzione operata è giustificata perché il 2° termine contribuisce al Momento flettente. $\sigma_y(y)$ corrisponde ad uno stato di coazione ($M=N=0$) indipendente da x

Sono inoltre presenti le tensioni (indip. da x)

-12-
bis

$$\sigma_y = \frac{p}{2} \left(-1 + \frac{3y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right)$$

Emi con pariamo le fibre in direzione y, $\sigma_y = p$ (b.c. di Cauchy)
al lembo superiore e si annullano a quella inferiore



σ_x è uno stato di coazione corrispondente a sforzo Normale e Momento nulli.

σ_y è indipendente da x e parte dal valore p annullandosi al lembo inferiore.

La soluzione è "esatta" a partire da una certa distanza dagli estremi.

$$|\sigma_x^M|_{\max} \left(x=0, y=\frac{h}{2} \right) = p \frac{3l^2}{4H^2}$$

$$\frac{|\bar{\sigma}_x|_{\max}}{|\sigma_x^M|_{\max}} = \frac{4}{15} \left(\frac{H^2}{e^2} \right), \quad \frac{|\sigma_y|_{\max}}{|\sigma_x^M|_{\max}} = \frac{4}{3} \left(\frac{H}{e} \right)^2$$

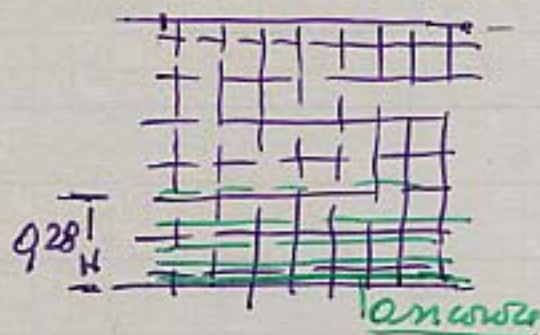
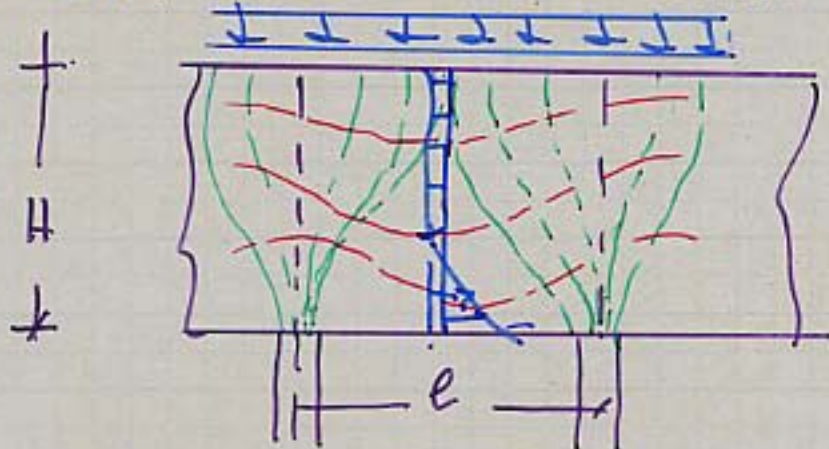
già per $l/H = 5$ i contributi valgono $\approx 1\%$ e 5%

per poi diminuire rapidamente.

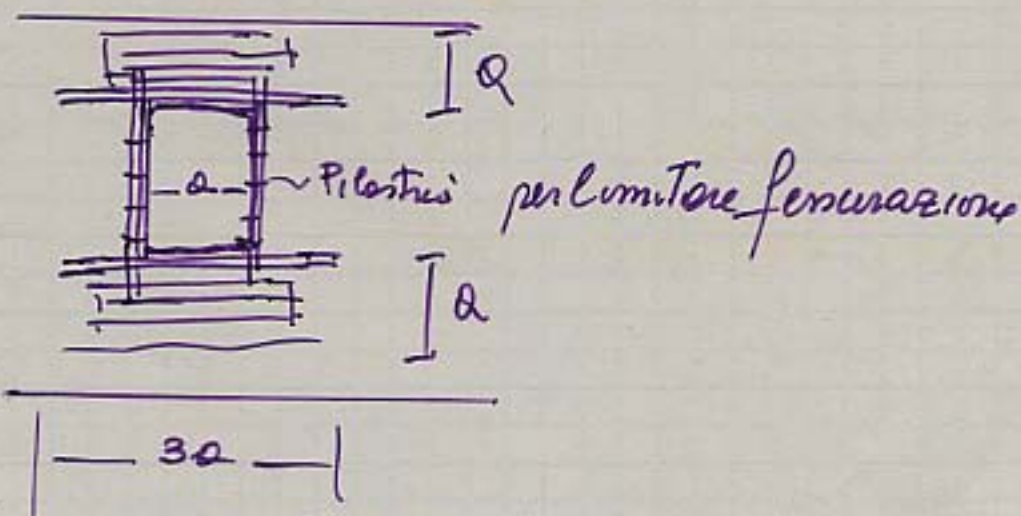
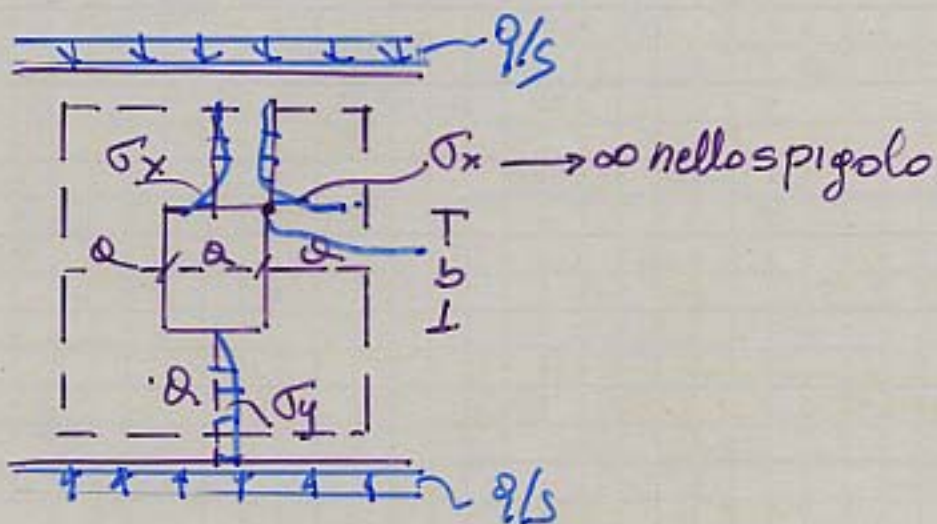
⇒ Per travi snelle è giustificata la soluzione teorica vista e S.d.C.

TRAVI PARETE A PIU' CAMPI

- 14 -



TRAVE PARETE FORATA

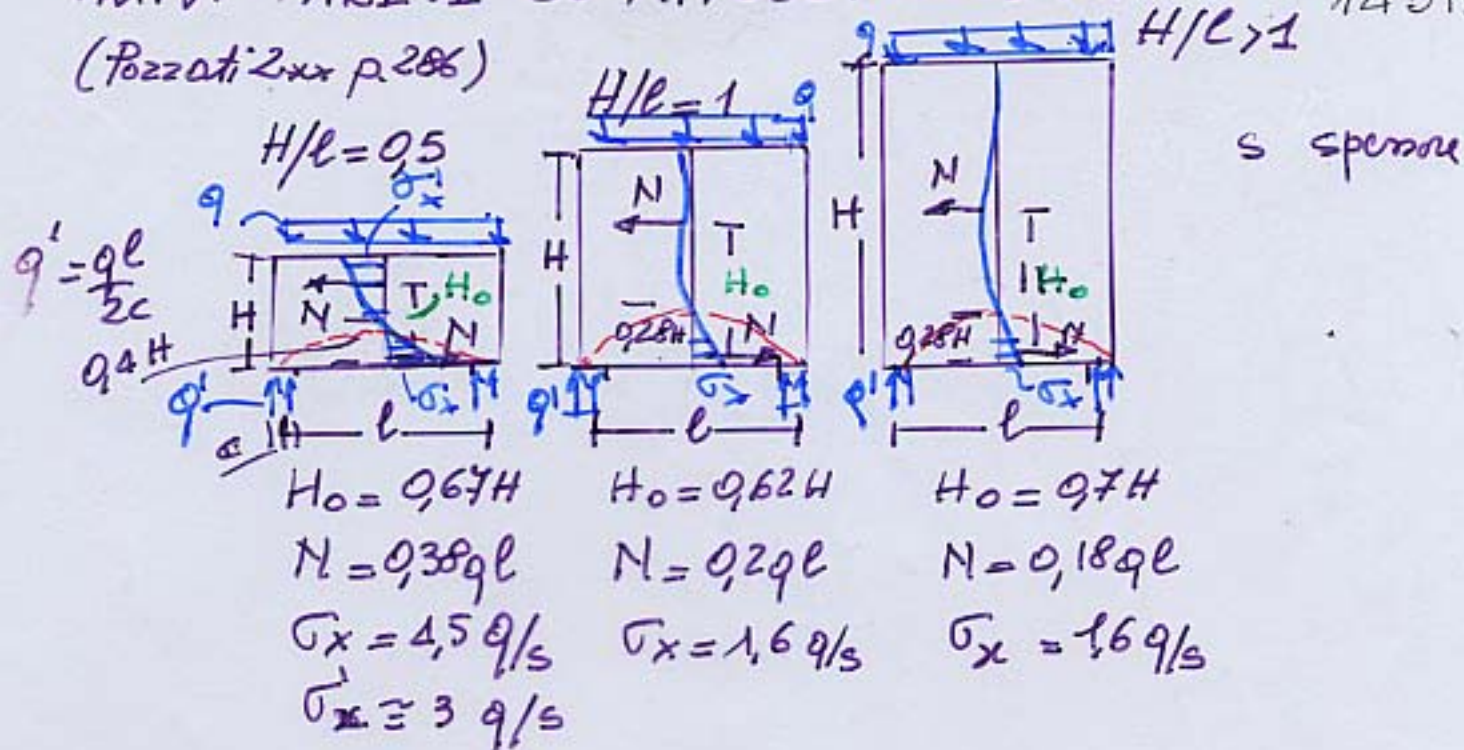


la risultante delle trazioni è circa pari
 $S \approx q^2 a$

TRAVI PARETE SU APPOGGI ISOLATI

(Pozzati 2^{aa} p. 286)

-13-
14 bis



CALCOLO DELLE ARMATURE

Può essere utilizzato un calcolo elastico standard.

Le armature diffuse (zefi) devono essere dimensionate in modo da assorbire le trazioni.

Calcolo armature tese $H = l$

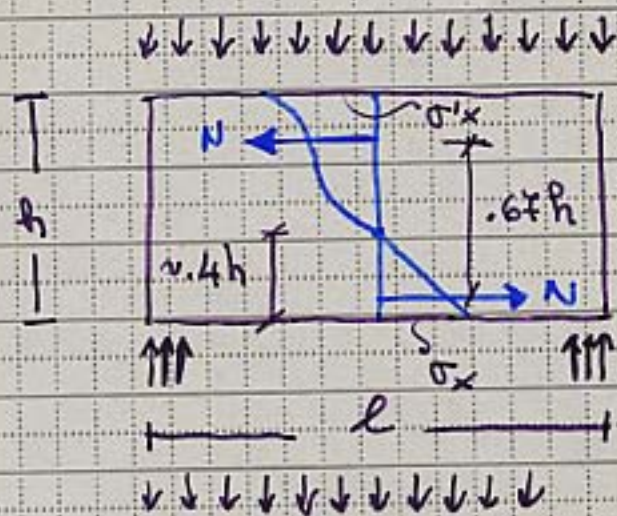
L_0 e forma S e dato-olo

$$N = S = \frac{M}{0.62H} = \frac{ql^2}{8 \times 0.62H} \approx 0.2 \frac{ql^2}{H}$$

$A_e = S/\sigma_a$ e deve essere distribuito nello spessore oltre $0.28H$, ovviamente più addensata all'intradosso. Deve essere mantenuta costante e adeguatamente ancorata agli appoggi.

In genere non ci sono pb. a taglio.

Per $H \geq l$ verifica di pressuramento agli appoggi.

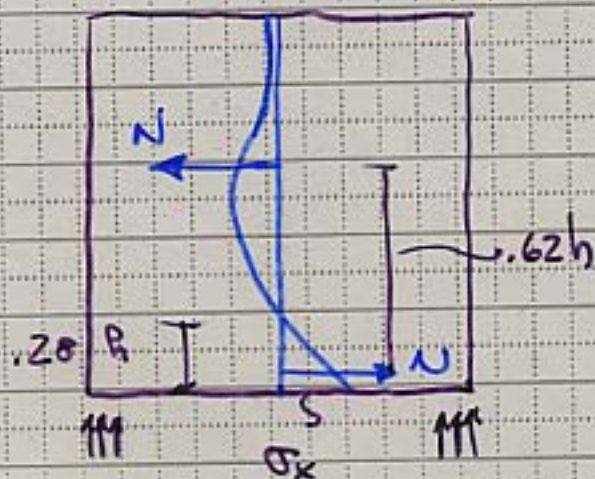


$$h/e = 0.5$$

$$N = .38 q l$$

$$\sigma_x = 4.5 q/s$$

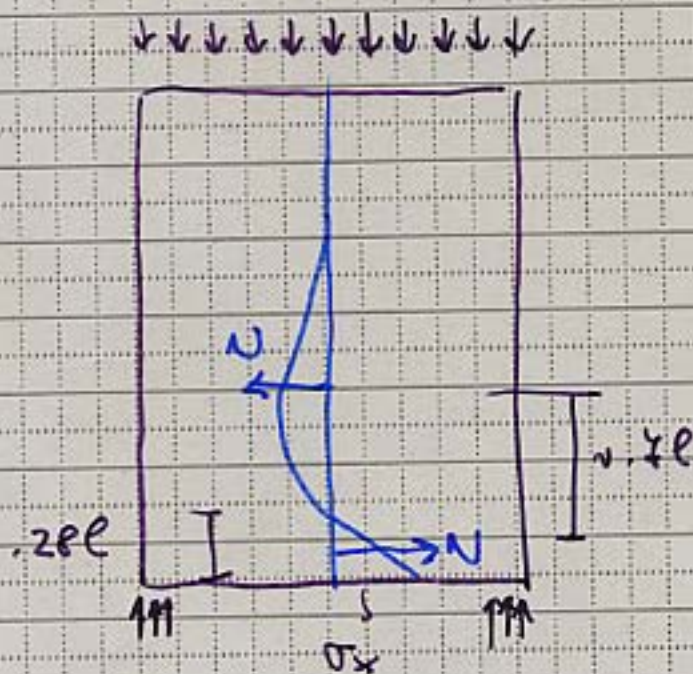
$$\sigma'_x = -3 q/s$$



$$h/e = 1$$

$$N = .2 q l$$

$$\sigma_x = 1.6 q/s$$



$$h/e > 1$$

$$N = .18 q l$$

$$\sigma_x = 1.6 q/s$$

Andamento delle isostatiche di trazione molto piatto $\Rightarrow$
ARMATURA ORIZZONTALE

- uso di staffe per recinzione armatura di corrente collegamento delle armature orizzontali
- Armatura di corrente per un'altezza d di $0.15 \div 0.20$

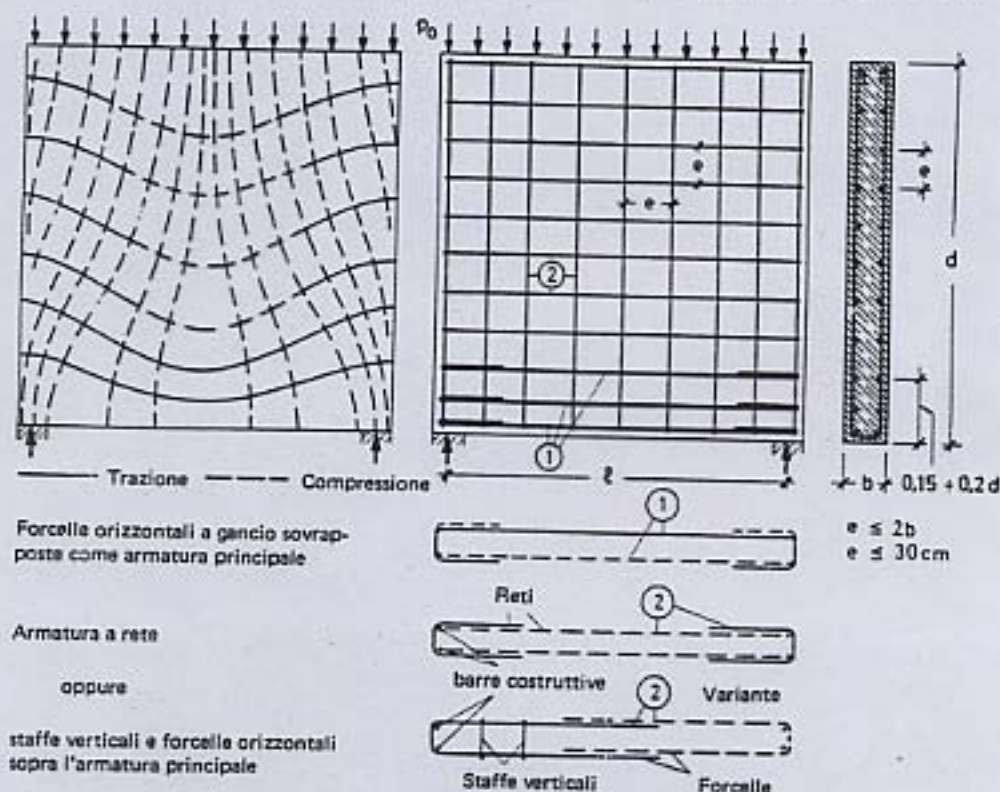
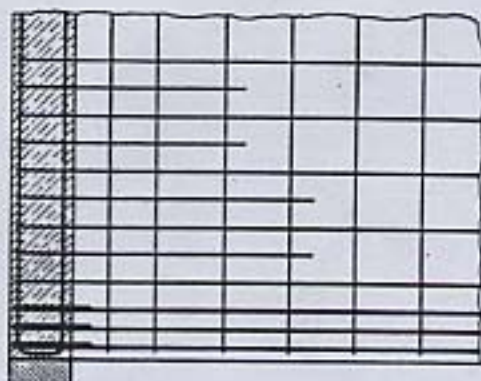
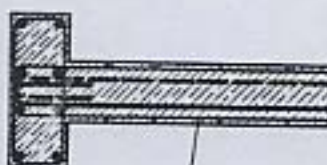


Fig. 12.1: Andamento delle traiettorie delle tensioni principali e armatura di una trave-parete ad appoggio diretto e caricata dall'alto

Vista

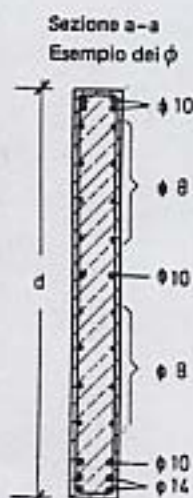
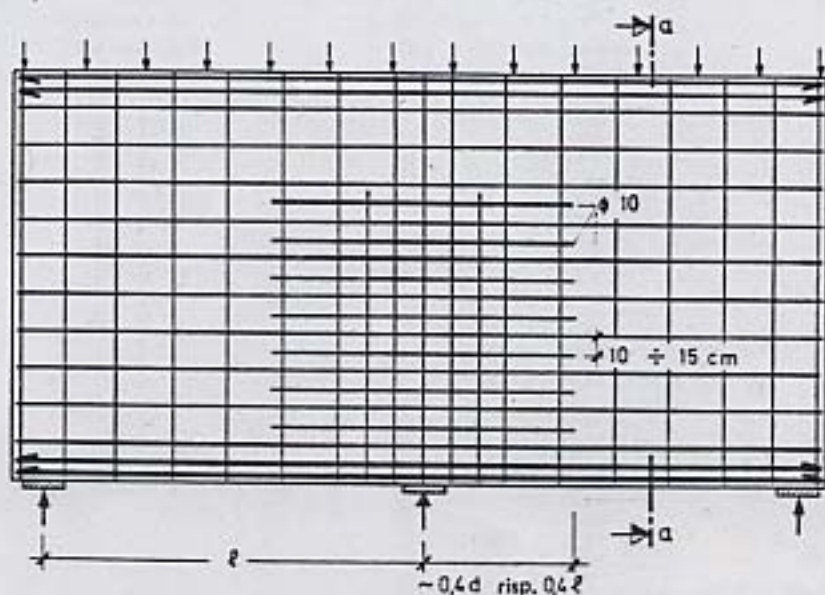
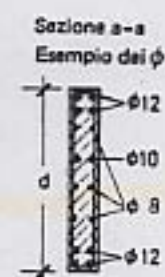
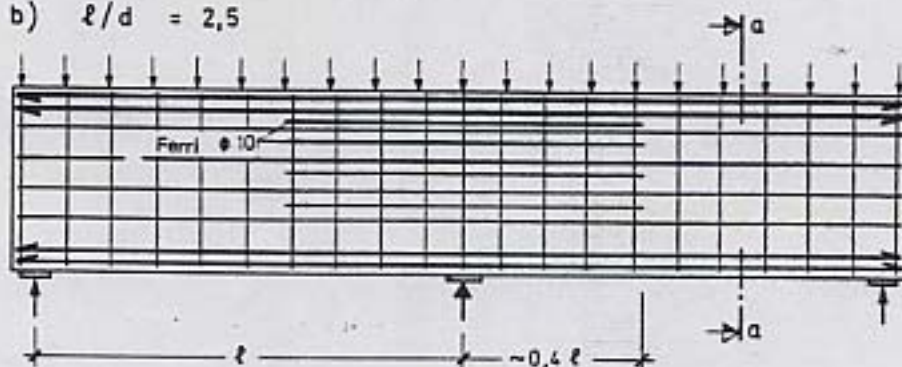


Planta



Fili sottili supplementari sopra l'armatura principale

Fig. 12.2: Conformazione dell'armatura nella zona di trasmissione del carico di una trave sec. fig. 12.1, il cui supporto sia rinforzato da pilastri o lesene

a) $\ell/d = 1$ b) $\ell/d = 2,5$ 

c) Parete di cantina con montanti singoli su fondazione a banchina

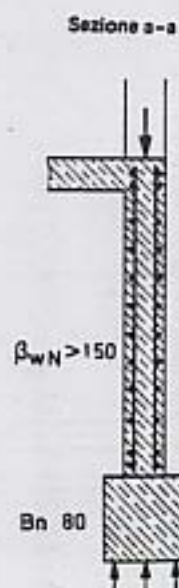
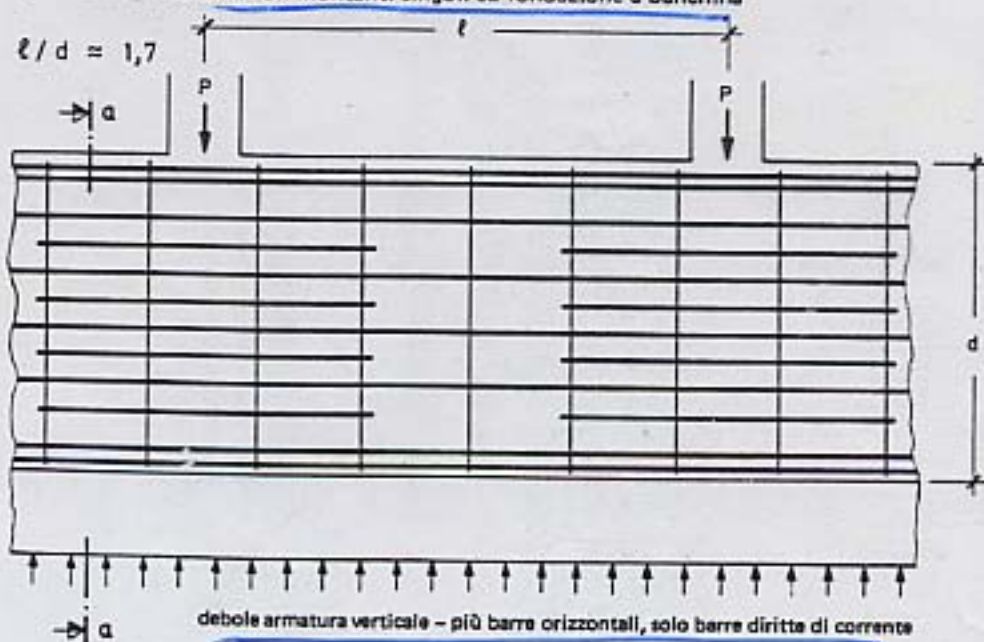
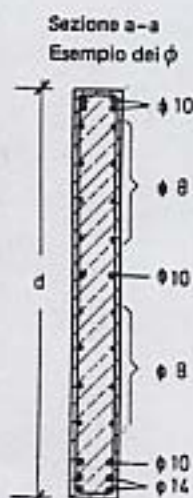
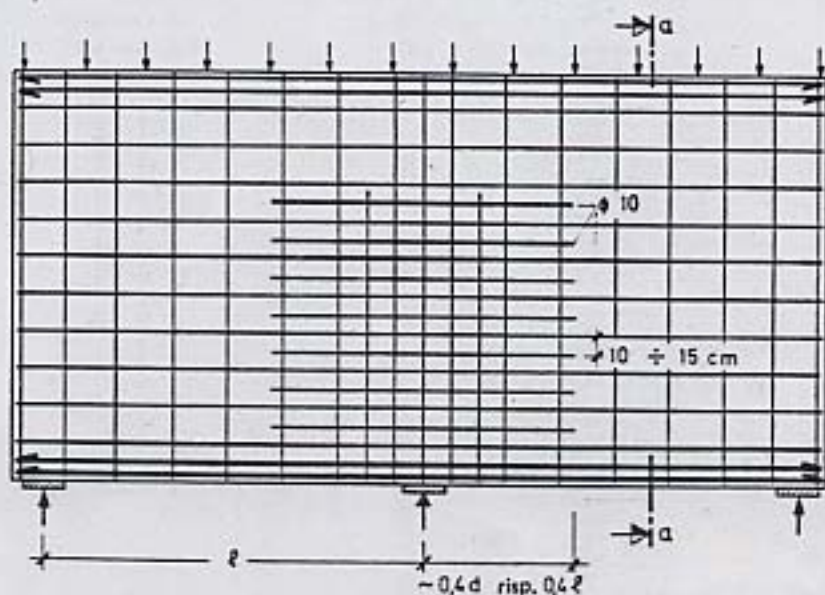
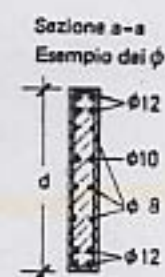
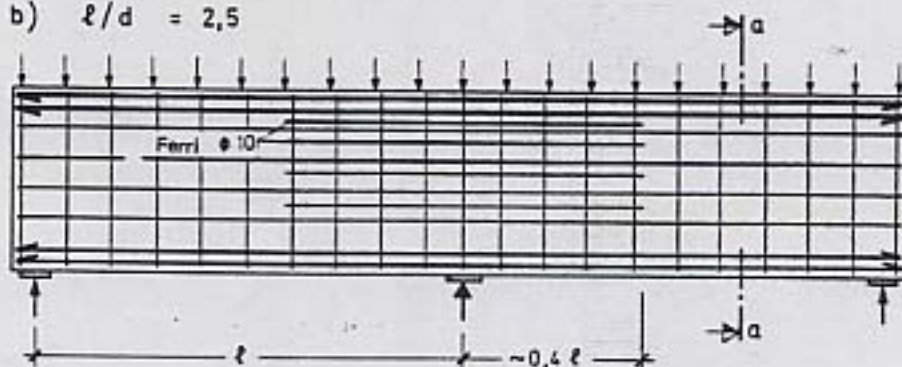
 $\ell/d = 1,7$ 

Fig. 12.5: Esempi per l'armatura di travi-parete a più campi

a) $\ell/d = 1$ b) $\ell/d = 2,5$ 

c) Parete di cantina con montanti singoli su fondazione a banchina

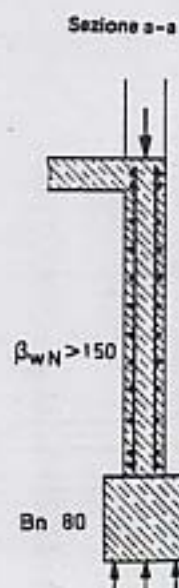
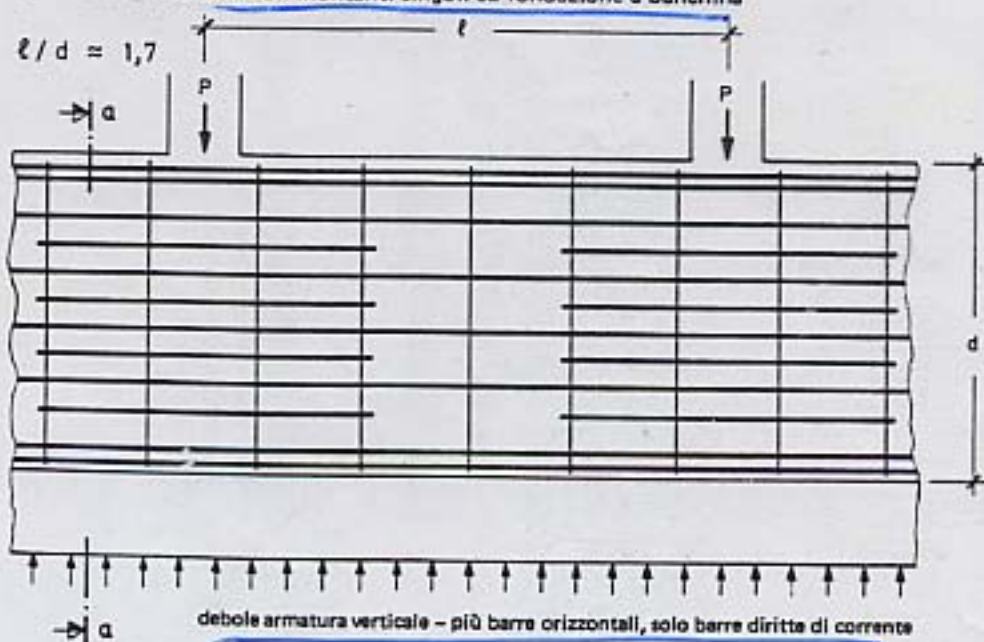
 $\ell/d = 1,7$ 

Fig. 12.5: Esempi per l'armatura di travi-parete a più campi

TRAVI-PARETE a PIU' CAMPI

-15-

andamento anche in questo caso piatto delle isostatiche di trazione (ARMATURA ORIZZONTALE)

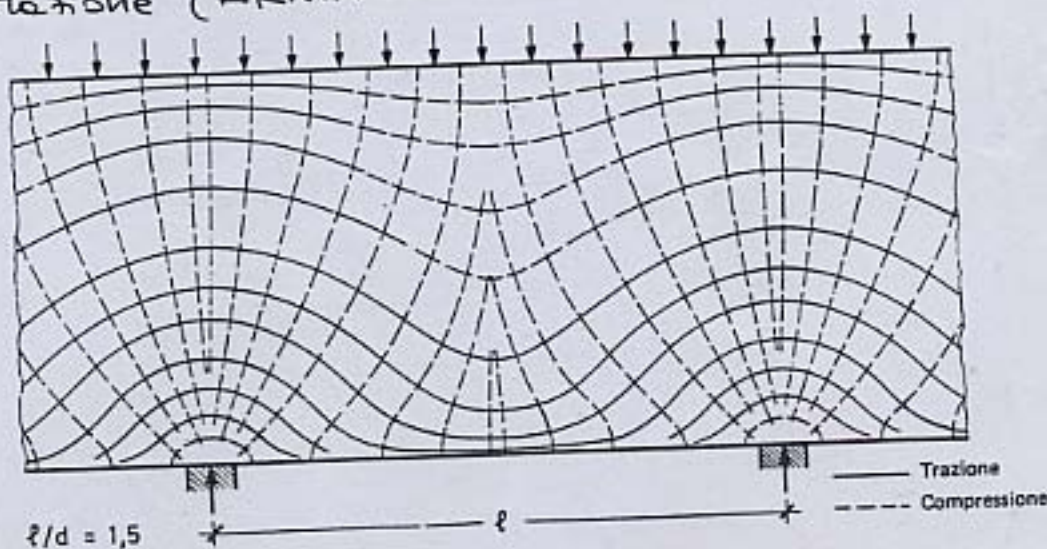


Fig. 12.3: Andamento delle traiettorie delle tensioni principali nella trave-parete a più campi nello stato I con carico applicato dall'alto

Armatura per assorbimento del M di appoggio ripartita in funzione di l/d nell'interazione tesa + armatura a rete per $d/2$

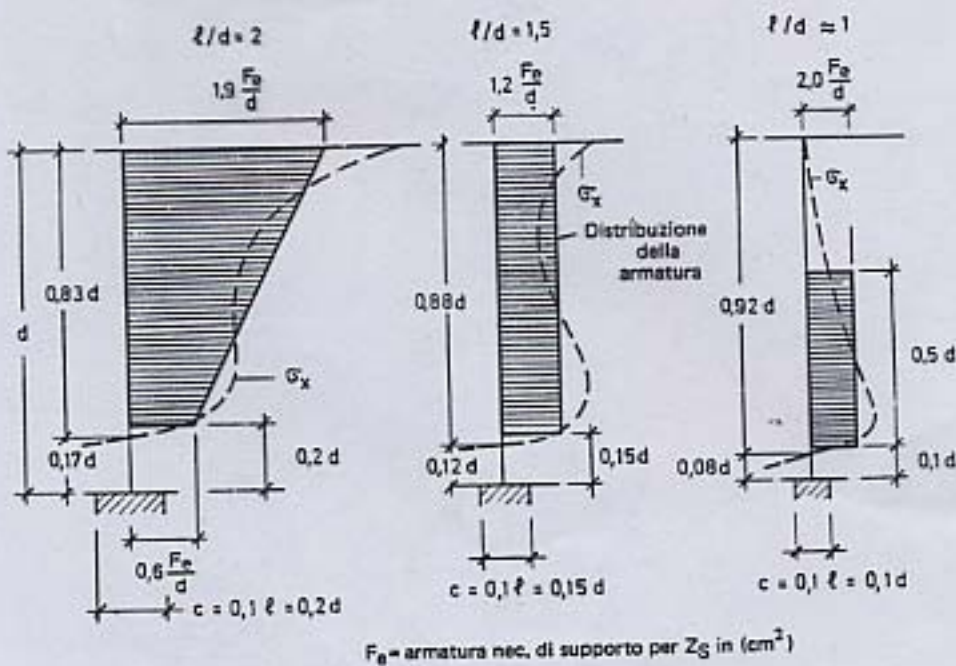
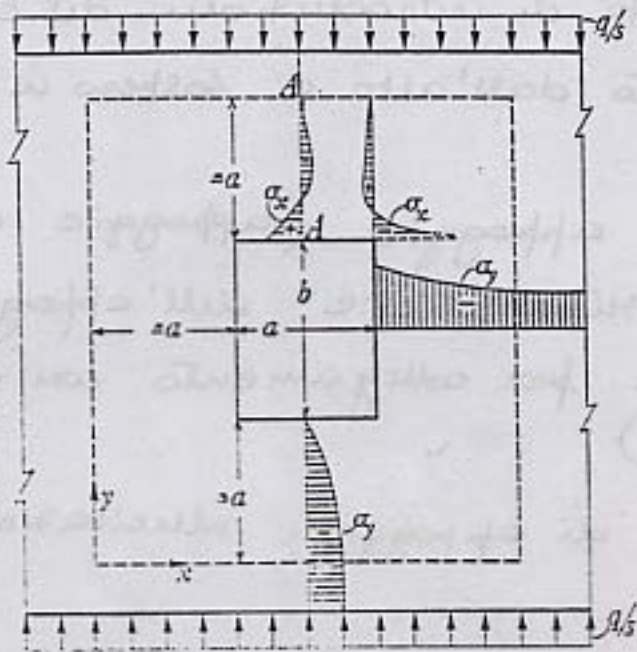


Fig. 12.4: Diagrammi di riferimento per la ripartizione dell'armatura del corrente teso su supporti di travi a più campi

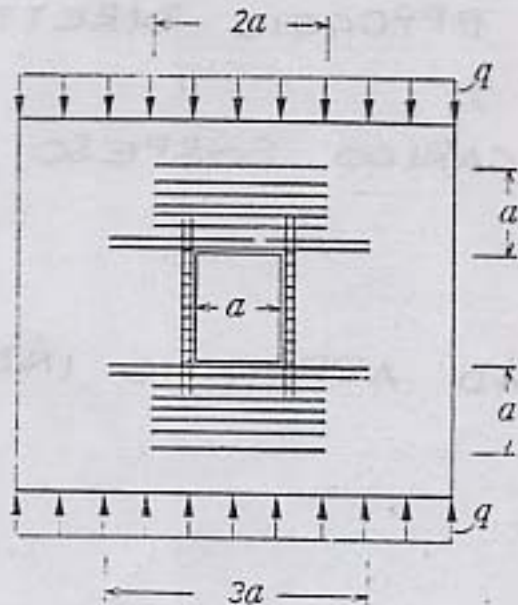
$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } h/l \leq 1/4 \Rightarrow \text{teoria trave} \\ \text{se } h/l > 1/4 \Rightarrow 2D - \text{TRAVE PARETE} \end{array} \right.$

~~1/65~~



Alterazione stato
tensionale per
presenza del foro

DISPOSIZIONE ARMATURE



LASTRE di PARETE a SBALZO CARICATE dall'ALTO

17-

Armatura di corrente orizzontale funzione di l/d

Andamento σ_x

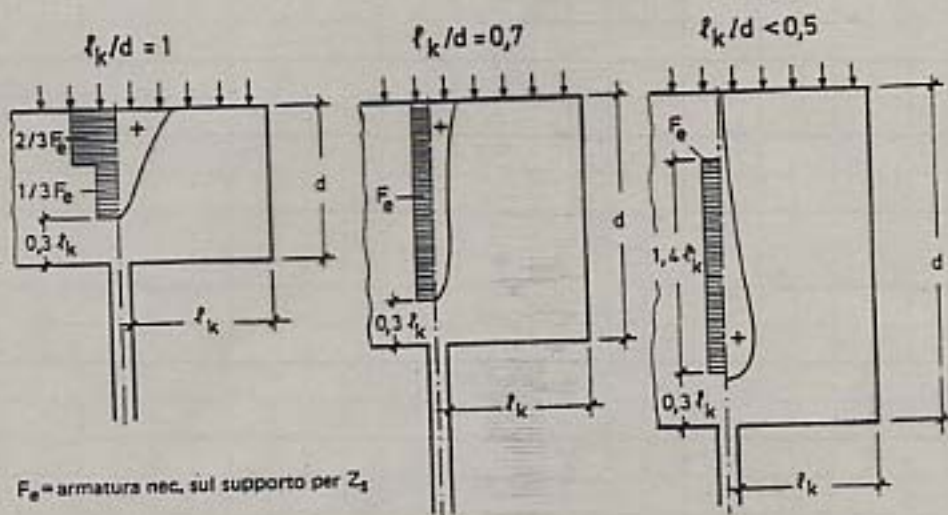


Fig. 12.6: Ripartizione delle tensioni σ_x e distribuzione in altezza dell'armatura di corrente con lastre a sbalzo

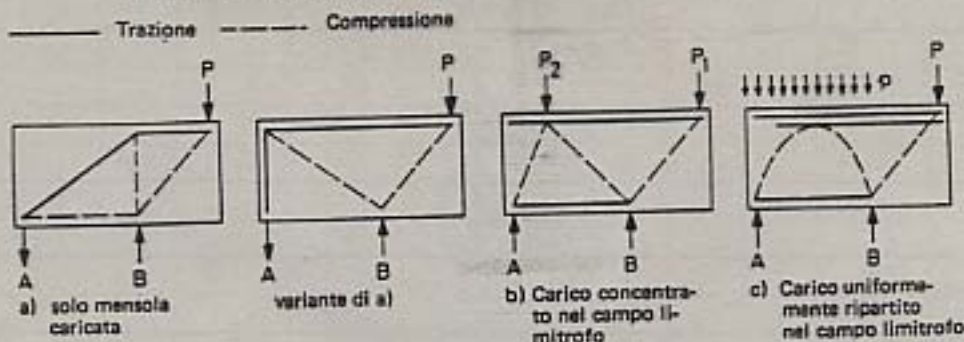


Fig. 12.7: Andamento schematico delle forze in lastre a sbalzo come riferimento per il tracciato dell'armatura (—— Trazione - - - - - Compressione)

MENSOLE TOZZE