

Applicazioni a problemi piani di deformazione

Problemi piani di deformazione (Leone Corradi III pag 59)

In molti casi non è facile determinare una soluzione sia staticamente che cinematicamente ammissibile

Ci si accontenta di delimitazioni bilaterali

Si consideri il caso di solidi idealmente plastici in stato di deformazione piana rispetto all'asse z

Si considerano i criteri di Huber –Hencky-von Mises e Tresca

Le velocità di deformazione plastiche si sviluppano a volume costante

Applicazioni a problemi piani di deformazione

Essendo stato piano di deformazione, il meccanismo plastico imporrà che la dissipazione avviene nel piano xy

$$\dot{\epsilon}_{pz} = \dot{\gamma}_{pxz} = \dot{\gamma}_{pyz} = 0$$

La condizione di incompressibilità implica che

$$\dot{\epsilon}_{px} + \dot{\epsilon}_{py} = 0$$

Siano $\dot{p}_I, \dot{p}_{II}, \dot{p}_{III} = 0$ le deformazioni plastiche

principali e $s_I, s_{II}, s_{III} = \sigma_z$ le tensioni principali

Applicazioni a problemi piani di deformazione

Il criterio di HHvM implica che

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(s_I - s_{II})^2 + (s_{II} - s_{III})^2 + (s_I - s_{III})^2 \right] - \sqrt{3}\tau_0 \leq 0$$

Poiché $\frac{\partial \phi}{\partial s_{III}} = 0$

Si ha che $s_{III} = \frac{1}{2}(s_I + s_{II})$

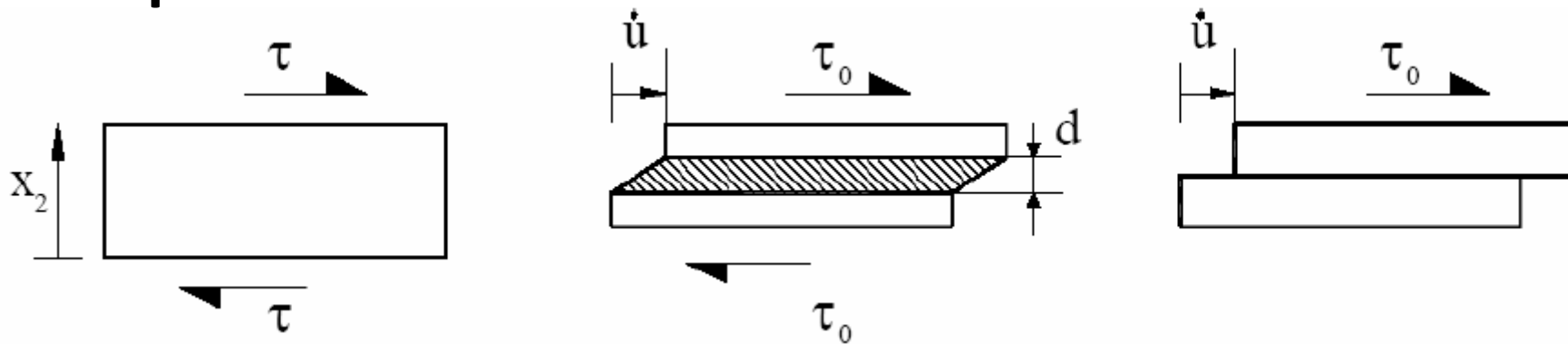
E dunque

$$\phi = |s_I - s_{II}| - 2\tau_0 \leq 0$$

problemi piano di deformazione

Esempio n. 1: Scorrimento di un blocco rigido

Si consideri lo scorrimento di due blocchi rigidi collegati da uno strato (sottile) di materiale rigido plastico, per cui è immediato ottenere una stima per eccesso μ_k del moltiplicatore di collasso.



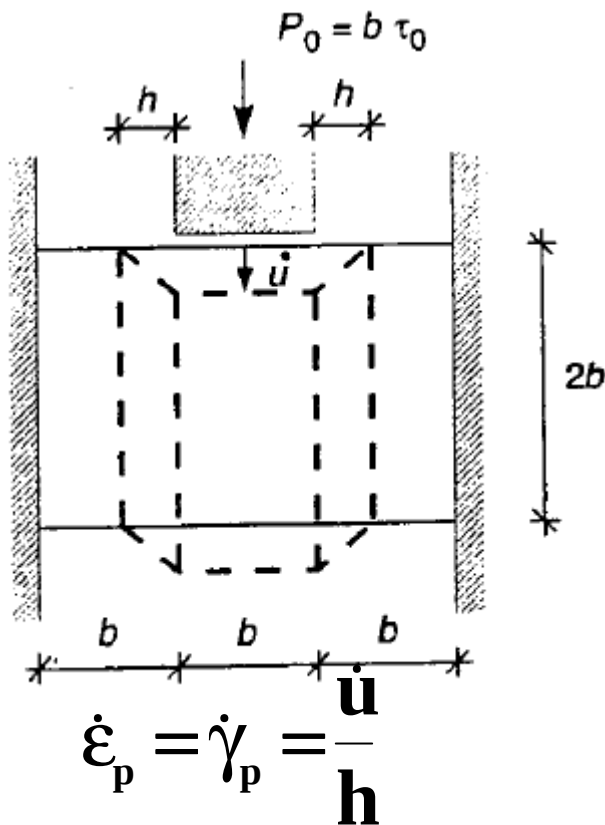
$$D_{\text{int}} = \int_0^d \tau_0 \dot{\gamma} dx_2 = \tau_0 \int_0^d \dot{\gamma} dx_2 = \tau_0 \dot{u}$$

Dissipazione

Problema piano di deformazione: punzone

Sono ammesse soluzioni con discontinuità nel campo degli spostamenti: esempio punzone in figura

Un cinematismo possibile vede blocco centrale scorrere con velocità $\dot{u}$ mentre la deformazione plastica si concentra nelle strisce adiacenti di larghezza h



Sia τ_0 il valore limite tensionale

Problema piano di deformazione: punzone

Dissipazione plastica

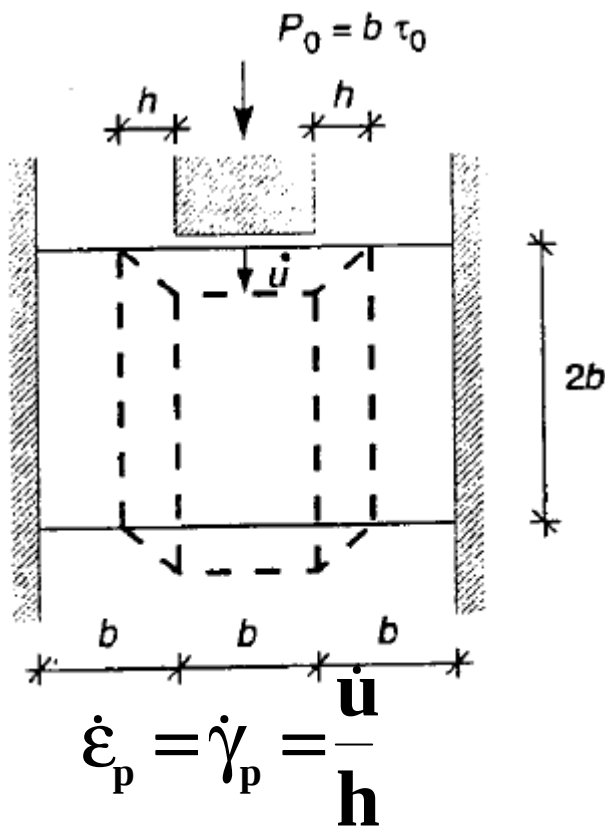
Oss: D non dipende da h

Potenza esterna

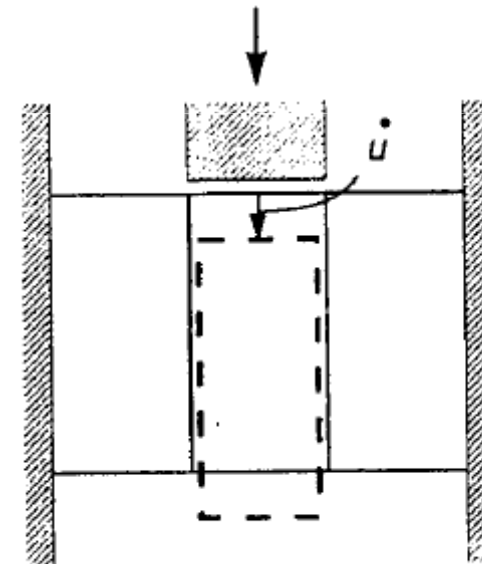
$$D = 2 \times 2bh \tau_0 \frac{\dot{u}}{h}$$

$$W_{\text{ext}} = P_0 \dot{u} = b \tau_0 \dot{u}$$

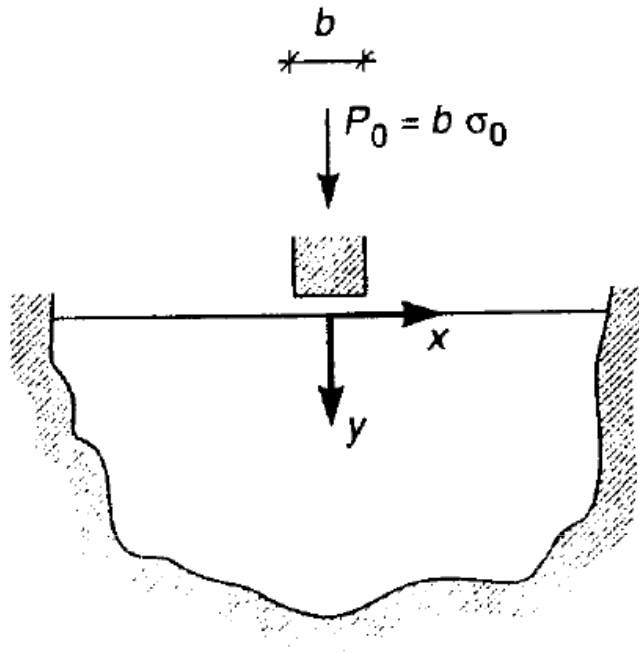
$$\mu_k = 4 \geq \mu_c$$



**Situazione
limite
 $h \rightarrow 0$**



Stato piano di deformazione: Indentazione di un semispazio



Solido ovunque rigidamente vincolato tranne sul bordo rettilineo . Su una porzione piccola di esso di ampiezza b agisce un punzone, che trasmette una forza per unità di spessore pari a $P=b\sigma_0$. Il punzone è liscio, trasmette solo forze normali

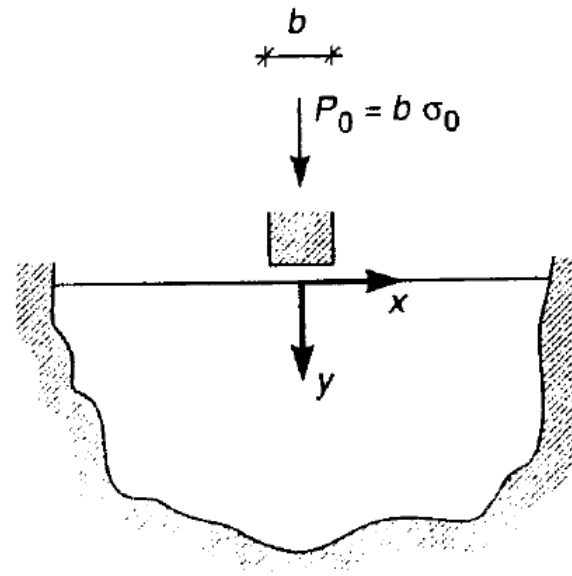
Si utilizza il criterio di Tresca per cui $\sigma_0 = 2 \tau_0$

Stato piano di deformazione: Indentazione di un semispazio

Esempio n. 2: Indentazione di un semispazio(Prandtl 1920) o fondazione superficiale

Vengono prima cercate soluzioni cinematicamente ammissibili.

Qualunque meccanismo comporta fuoriuscita di materiale dalla superficie libera del punzone

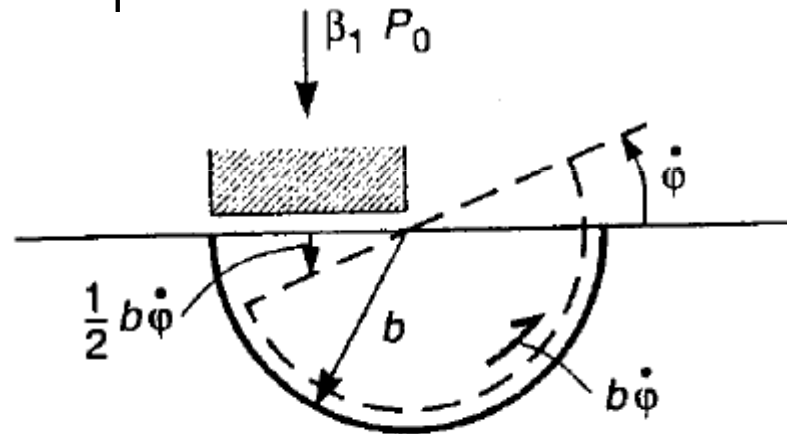


Stato piano di deformazione: fondazione superficiale

Esempio n. 2: Indentazione di un semispazio(Prandtl 1920) o fondazione superficiale

I Meccanismo: cerchi di Bishop in Geotecnica

Blocco delimitato da una sup. circolare di raggio b ruota rigidamente con velocità $\dot{\phi}$



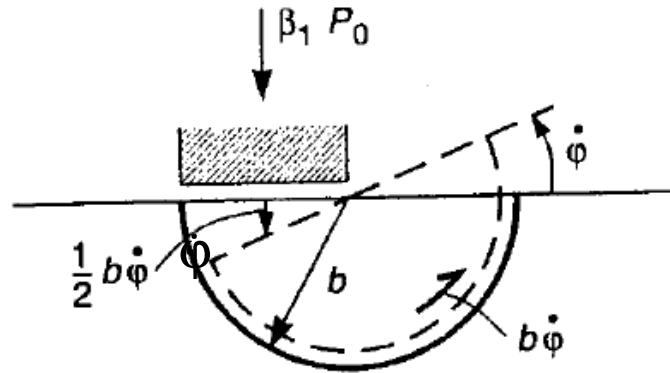
$$D_1 = \tau_0 \pi b (b \dot{\phi}) = \frac{1}{2} \sigma_0 \pi b^2 \dot{\phi}$$

**Potenza dissipata sulla
superficie di scivolamento**

$$\dot{W}_{01} = P_0 \frac{b}{2} \dot{\phi} = \frac{1}{2} \sigma_0 b^2 \dot{\phi}$$

Potenza dissipata dal carico

Stato piano di deformazione: fondazione superficiale



$$D_1 = \tau_0 \pi b (b \dot{\phi}) = \frac{1}{2} \sigma_0 \pi b^2 \dot{\phi}$$

Potenza dissipata sulla
superficie di scivolamento

$$\dot{W}_{01} = P_0 \frac{b}{2} \dot{\phi} = \frac{1}{2} \sigma_0 b^2 \dot{\phi}$$

Potenza dissipata dal carico

Moltiplicatore cinematico

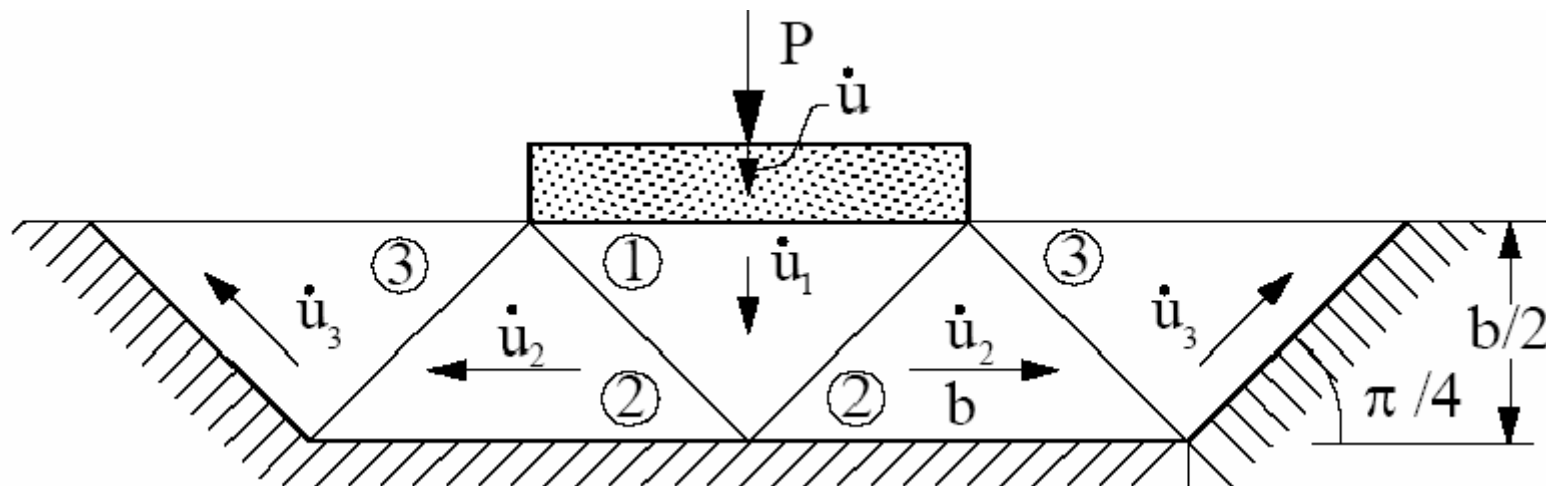
$$\beta_1 = \pi = 3.142$$

Stato piano di deformazione : fondazione superficiale

Il Meccanismo

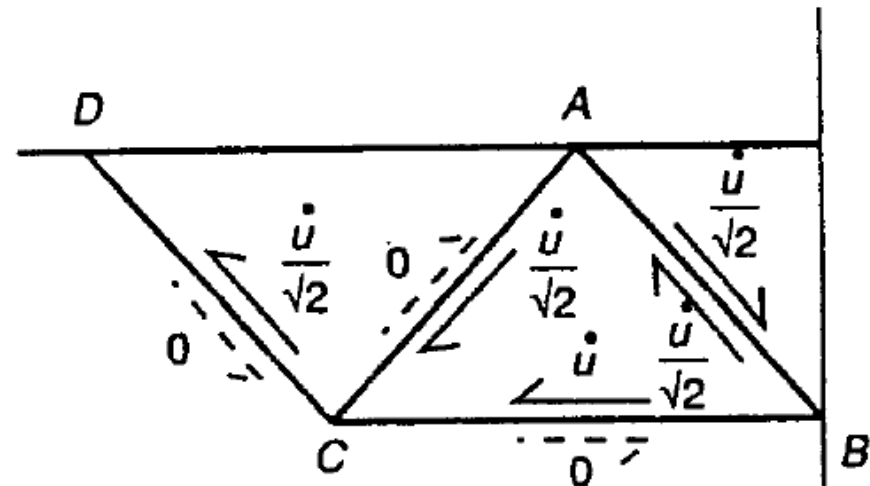
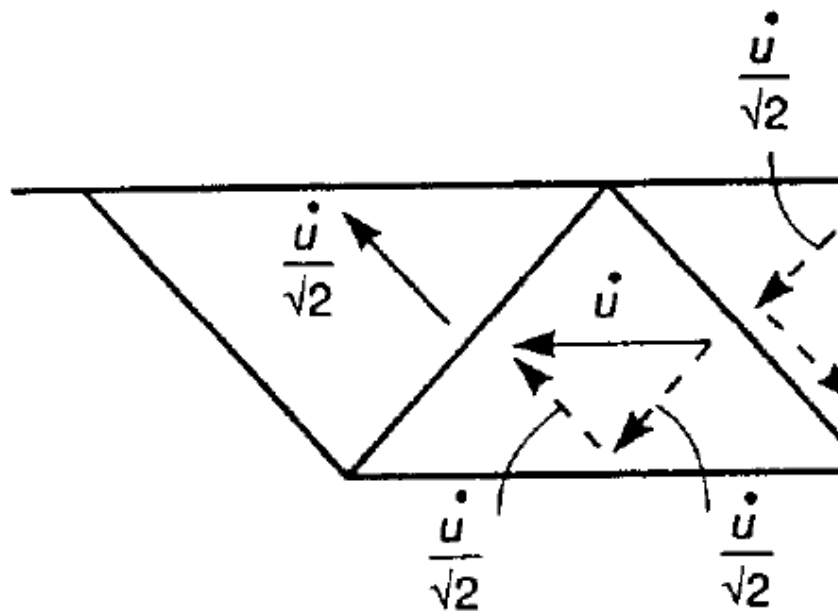
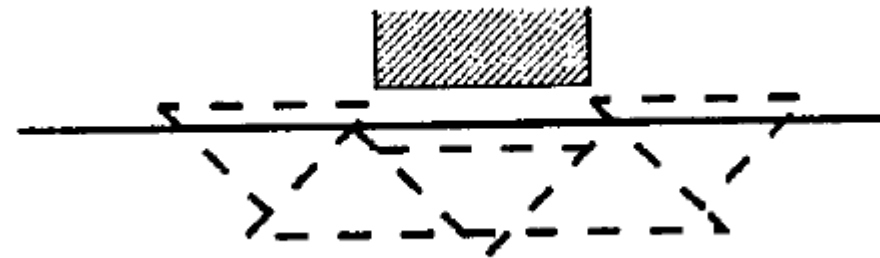
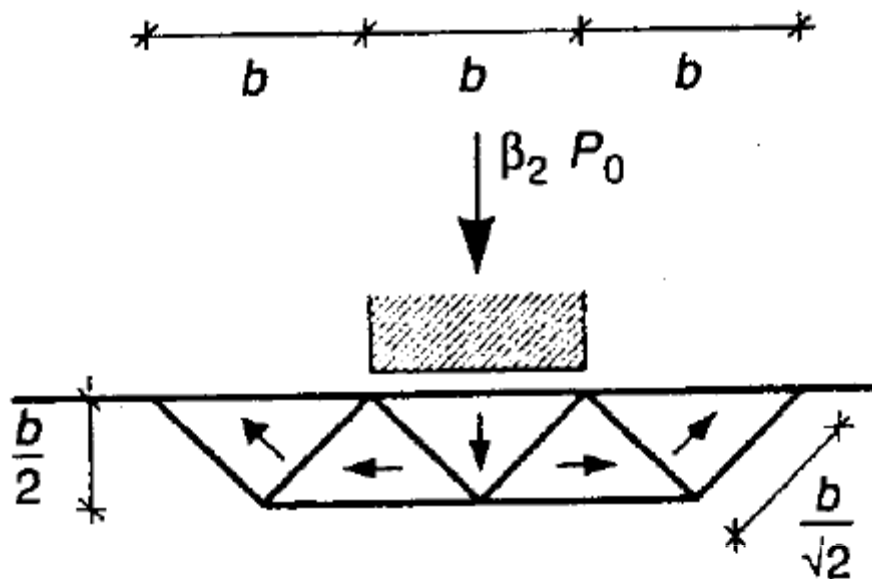
In figura è riportato un secondo meccanismo che presenta discontinuità delle velocità:
cinque blocchi rigidi a forma di triangolo isoscele che scorrono mutuamente

La velocità in direzione normale alle linee di scivolamento è continua mentre è discontinua la velocità in direzione tangenziale alla superficie di scivolamento

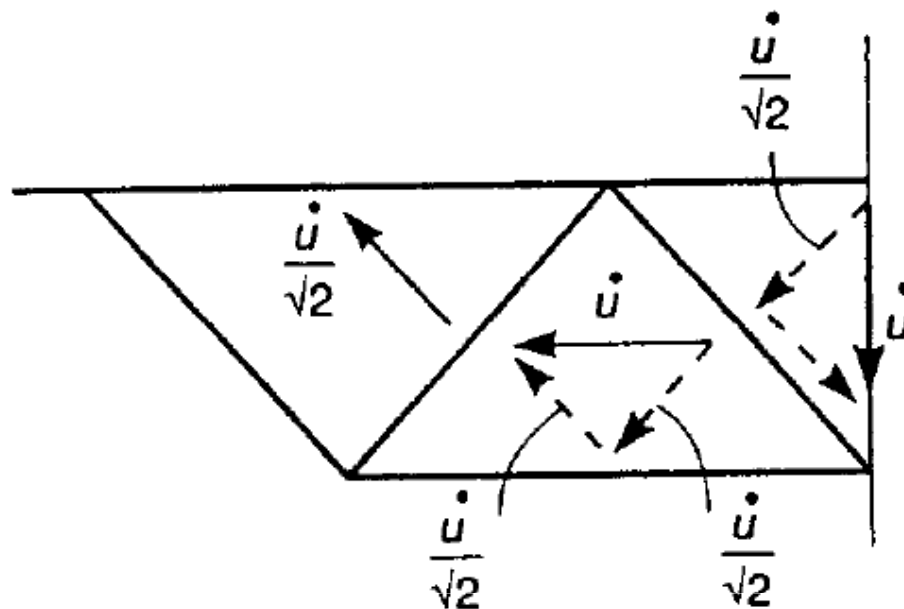


fondazione superficiale

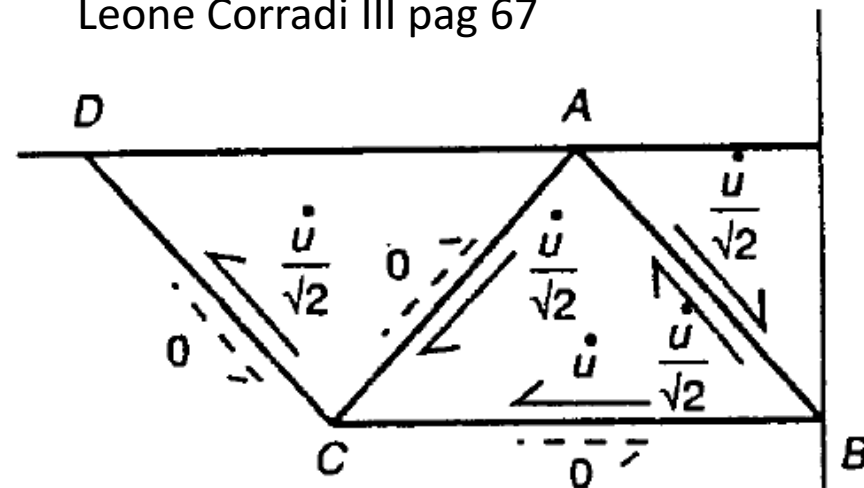
Leone Corradi III pag 67



Fondazione superficiale



Leone Corradi III pag 67



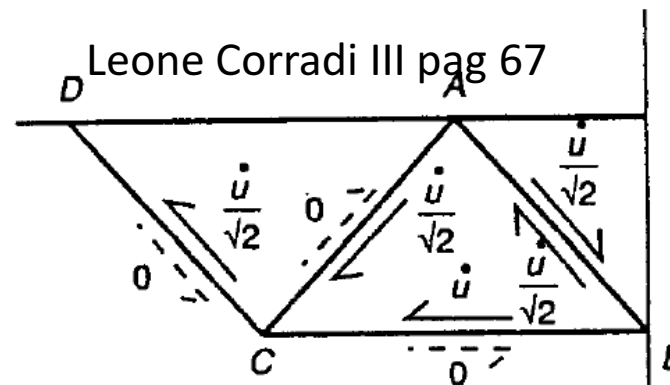
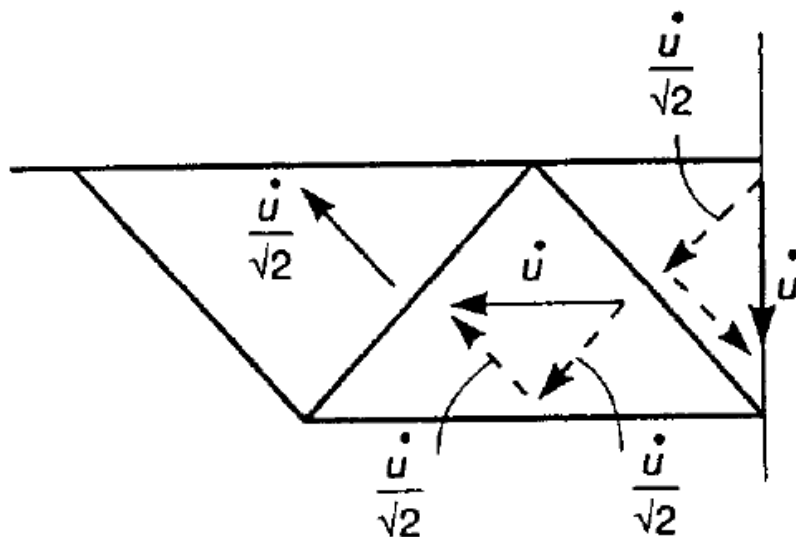
È possibile ricondurre gli atti di moto tra i blocchi alla velocità $\dot{U}$ del blocco centrale, inoltre il problema è simmetrico

$$\text{Lato } AB \left(\text{lunghezza } \frac{b}{\sqrt{2}} \right): \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} + \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\dot{u}$$

$$\text{Lato } BC \text{ (lunghezza } b): \dot{u} + 0 = \dot{u}$$

$$\text{Lati } AC \text{ e } CD \left(\text{lunghezza } \frac{b}{\sqrt{2}} \right): \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}}$$

Fondazione superficiale



La potenza dissipata per unità di spessore sulle superfici di scorrimento è

$$D_2 = 2\tau_0 \left(\sqrt{2}\dot{u} \frac{b}{\sqrt{2}} + \dot{u}b + 2 \frac{\dot{u}}{\sqrt{2}} \frac{b}{\sqrt{2}} \right) = 3\sigma_0 b \dot{u}$$

La potenza dissipata dal carico esterno è $\dot{W}_{02} = P_0 \dot{u} = \sigma_0 b \dot{u}$

Il moltiplicatore di questo cinematismo è

$$\beta_2 = 3.0$$

Fondazione superficiale

La soluzione può essere migliorata cambiando la forma dei blocchi, per esempio prendendo triangoli equilateri si ottiene un nuovo cinematismo che comporta un moltiplicatore cinematico

$$\beta_3 = 2.890$$

Fondazione superficiale

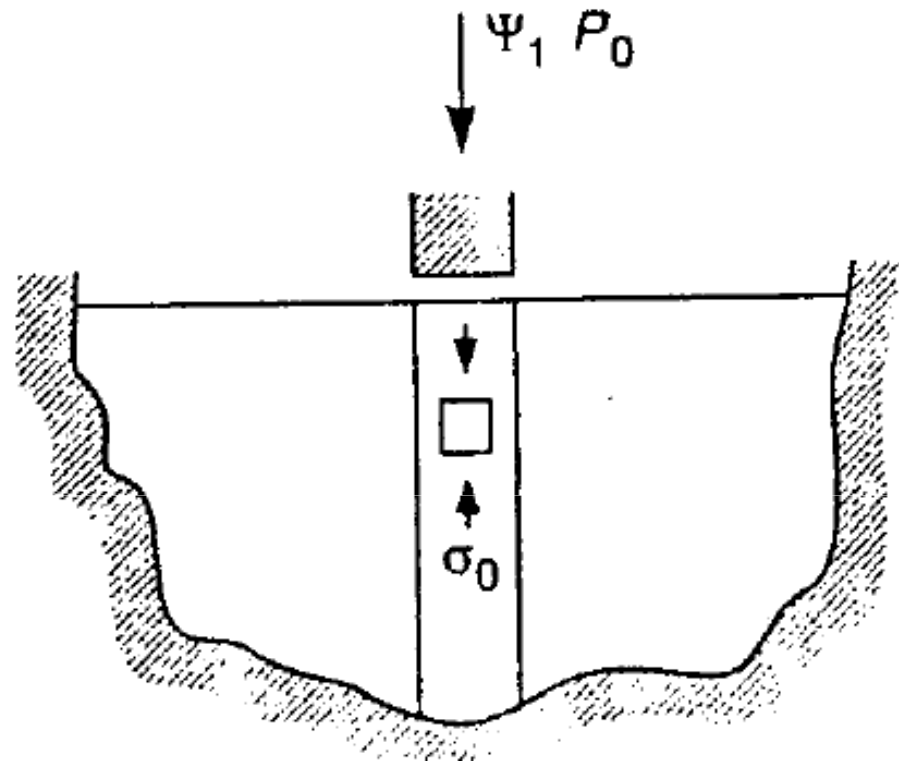
Si vuole ora determinare una soluzione staticamente ammissibile

Si assume che il carico sia sostenuto unicamente da una colonna compressa sottostante il blocco come in figura

È una soluzione discontinua ma equilibrata

La condizione limite viene raggiunta con $|\sigma| = \sigma_0$

Il moltiplicatore è $\psi_1 = 1$



Fondazione superficiale

La soluzione può essere migliorata se si considera che i vincoli consentono compressione σ_x in direzione x con $|\sigma_x| \leq \sigma_0$

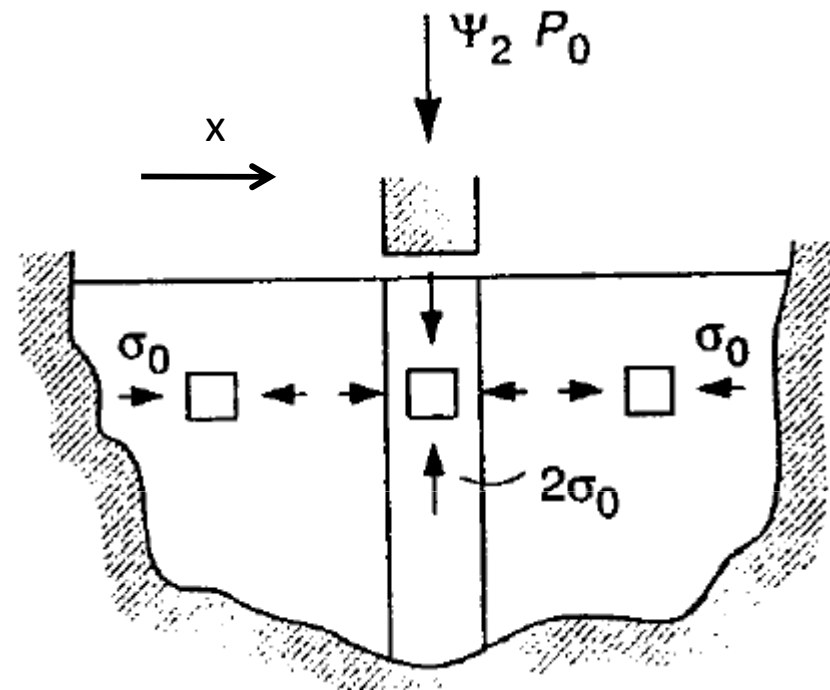
La condizione di snervamento
$$\phi = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_0 \leq 0$$

Implica che la condizione limite si raggiunge per $|\sigma_y| = 2\sigma_0$

Il moltiplicatore è

$$\psi_2 = 2$$

Che rispetto a prima è cresciuto



Fondazione superficiale

Si dimostra che il cinemmatismo in figura consente di massimizzare il moltiplicatore statico

$$\Psi_3 = 2.5$$

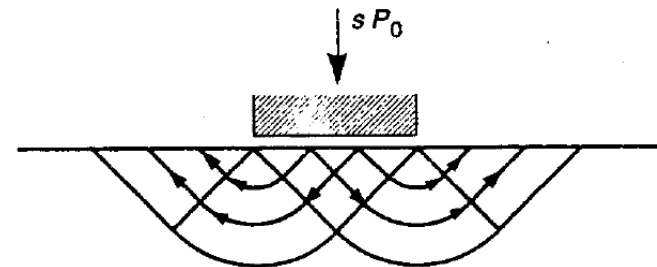
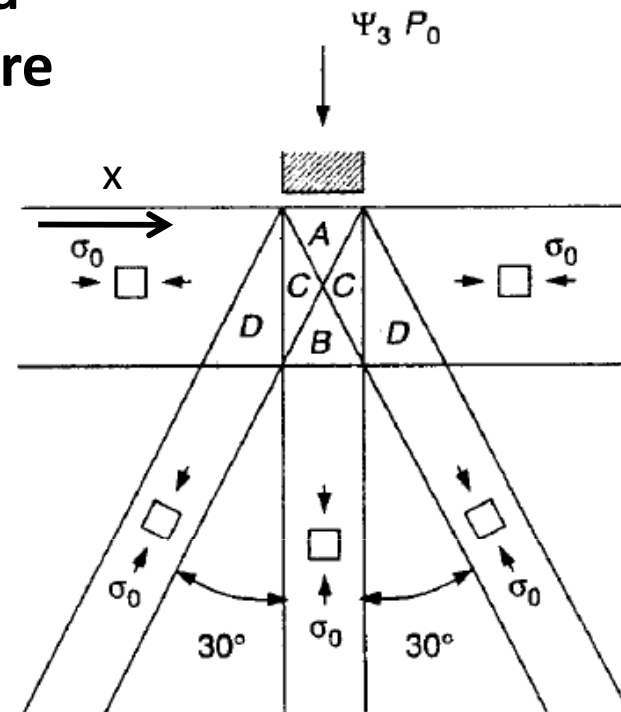
Si è quindi determinato il seguente intervallo di delimitazione per il moltiplicatore di collasso

$$2.5 \leq s \leq 2.890$$

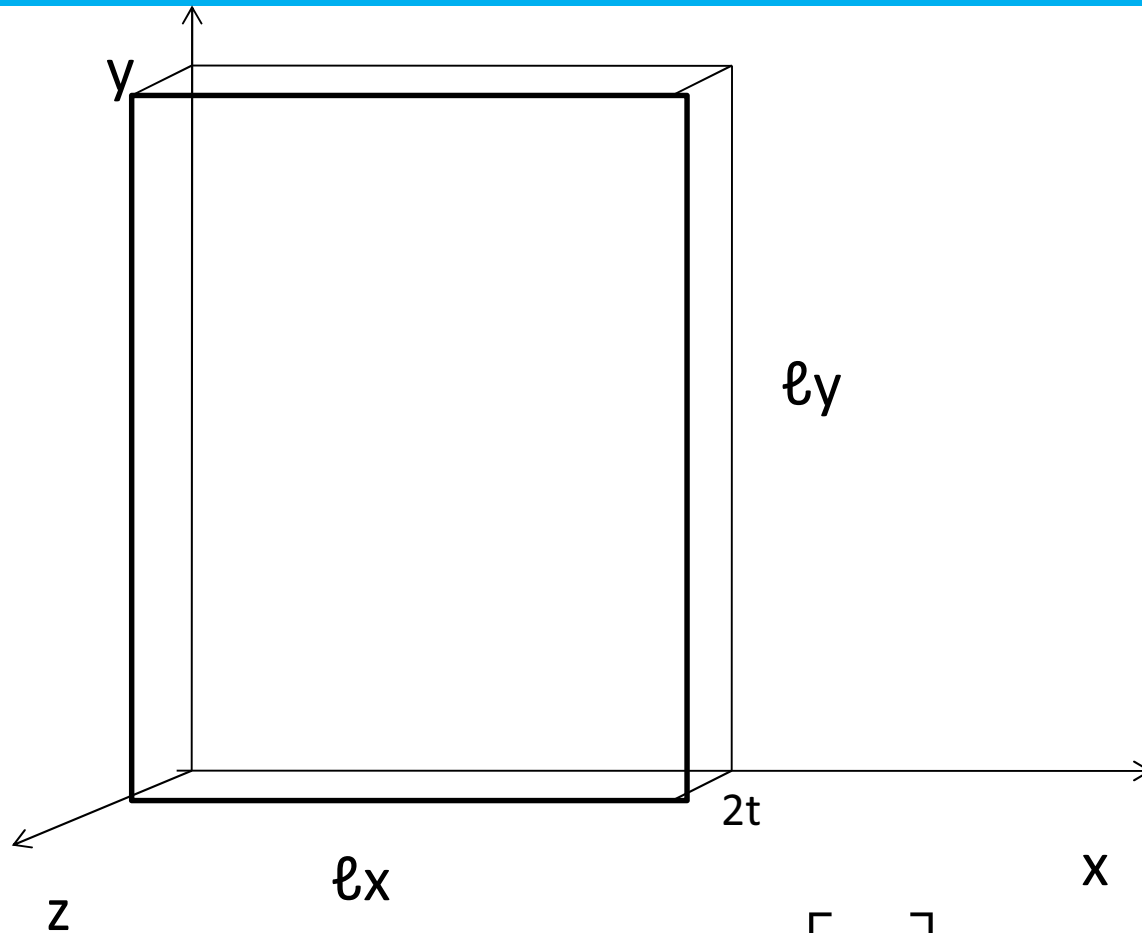
Oss: L'effettivo moltiplicatore di collasso

è

$$s = \frac{2 + \pi}{2} = 2.571$$



Problema piano di tensione



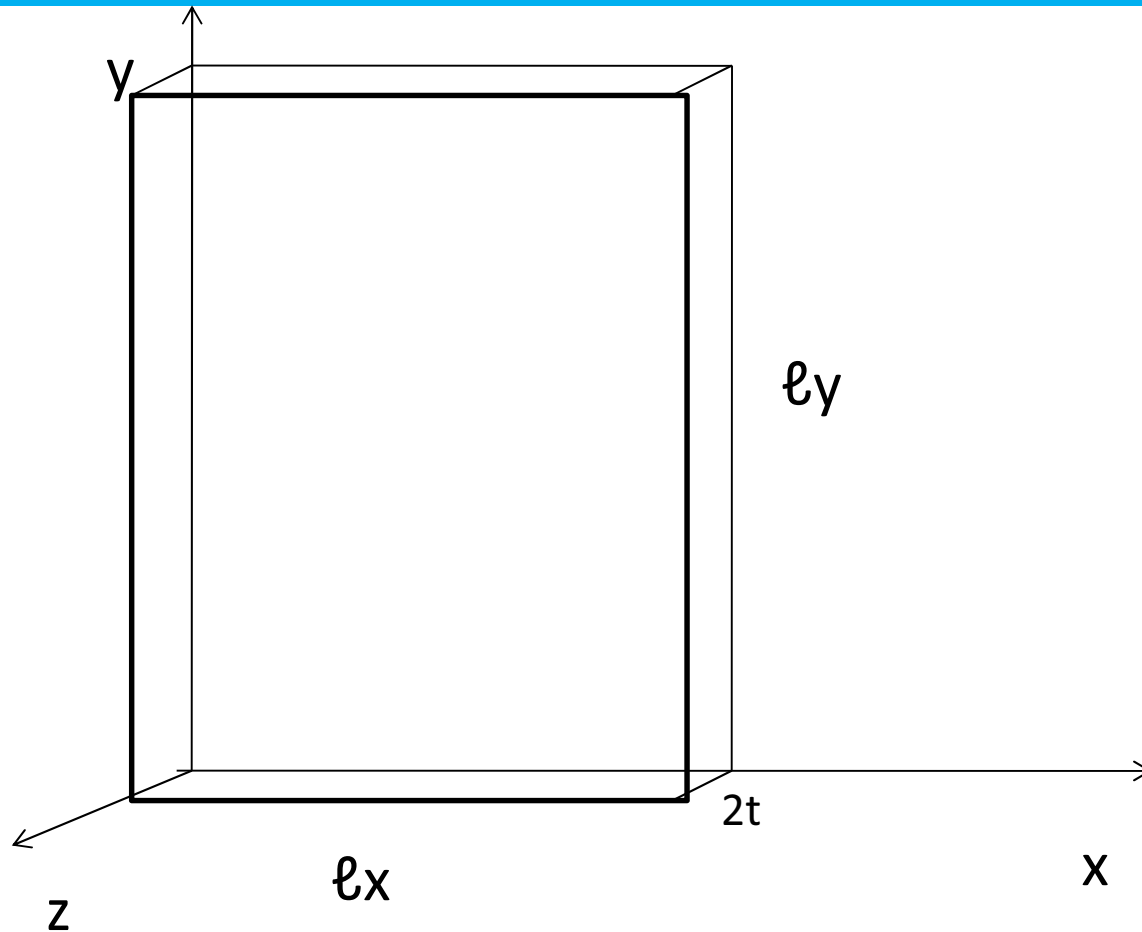
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Si consideri la lastra generata per traslazione lungo z del rettangolo di lati ℓ_x , ℓ_y e di spessore $2t$

Si assume che sia un pb. piano di tensione
 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

E che il vettore di tensione t_n appartenga al piano medio $z=0$
Inoltre le tensioni sono uniformi nello spessore $2t$

problema piano di tensione



Si introducono gli sforzi
membranali [F/L]

$$N_x = \sigma_x 2t$$

$$N_y = \sigma_y 2t$$

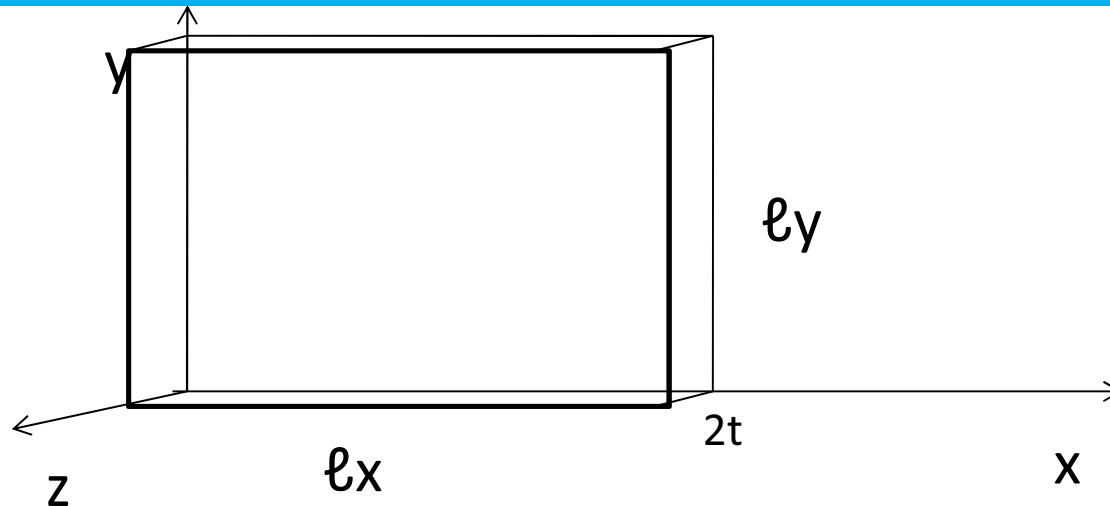
$$N_{xy} = \tau_{xy} 2t$$

Sia $N_0 = \sigma_0 2t$ lo sforzo
di piena
plasticizzazione

Allora introduciamo le
seguenti componenti
di sforzo adimensionali

$$\mathbf{n}_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{\sigma_x}{\sigma_0} \quad \mathbf{n}_y = \frac{N_y}{N_0} = \frac{\sigma_y}{\sigma_0} \quad \mathbf{n}_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_0} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}$$

problema piano di tensione



Definiamo la potenza esterna (consideriamo solo carichi accidentali, no permanenti; integrale sulla superficie media B

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \mu \left[\int_B (\mathbf{b}_x \dot{u} + \mathbf{b}_y \dot{v}) dA + \int_{\partial B} (\mathbf{q}_x \dot{u} + \mathbf{q}_y \dot{v}) d\ell \right]$$

Dove μ moltiplicatore carichi accidentali

Potenza dissipata interna è (se def. plastiche uniformi spessore):

$$\mathbf{D}_{\text{int}} = \int_{-t}^t (\sigma_x \dot{\epsilon}_{px} + \sigma_y \dot{\epsilon}_{py} + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{px}) dz = \mathbf{N}_x \dot{\epsilon}_{px} + \mathbf{N}_y \dot{\epsilon}_{py} + \mathbf{N}_{xy} \dot{\gamma}_{pxy}$$

problema piano di tensione

Le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \mathbf{b}_x &= 0 \\ \sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \mathbf{b}_y &= 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\mathbf{n}_{x,x} + \mathbf{n}_{xy,y} + \frac{\mathbf{b}_x}{\sigma_0} &= 0 \\ \mathbf{n}_{y,y} + \mathbf{n}_{xy,x} + \frac{\mathbf{b}_y}{\sigma_0} &= 0\end{aligned}$$

Le equazioni di equilibrio al bordo si scrivono

$$\begin{aligned}\sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y &= \mathbf{q}_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y &= \mathbf{q}_y\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\mathbf{n}_x \alpha_x + \mathbf{n}_{xy} \alpha_y &= \frac{\mathbf{q}_x}{\sigma_0} \\ \mathbf{n}_{xy} \alpha_x + \mathbf{n}_y \alpha_y &= \frac{\mathbf{q}_y}{\sigma_0}\end{aligned}$$

Problema piano di tensione

Condizioni di ammissibilità $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$

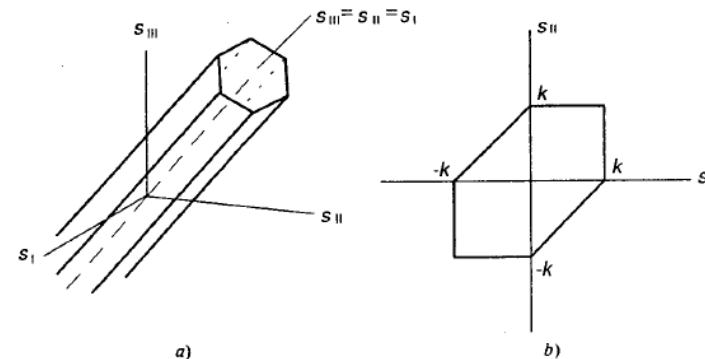
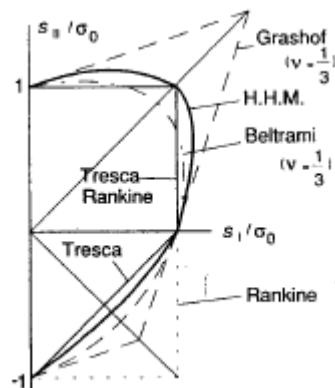
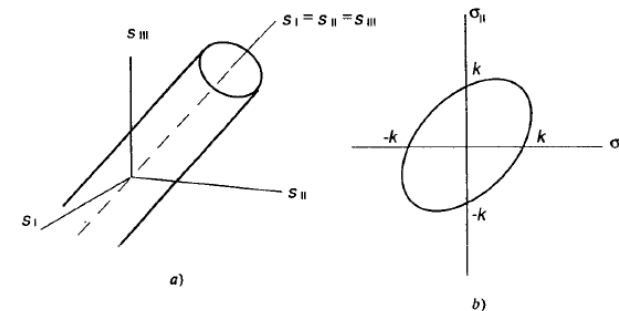
Per materiali metallici si assume criterio di Huber-Hencky Von

Mises $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \leq \sigma_0^2$

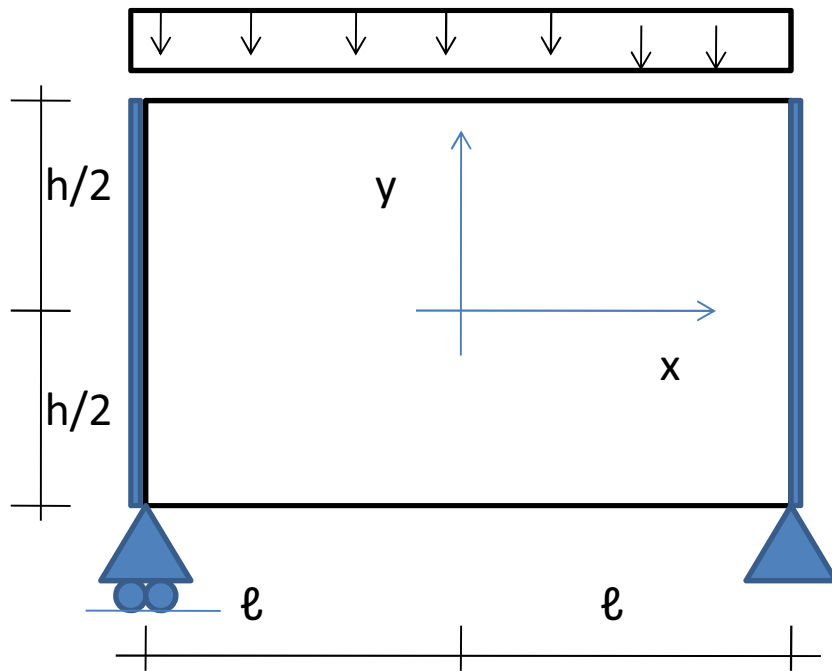
$$n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2 \leq 1$$

Tresca (se n_1, n_2 sforzi principali)

$$\max\{ |n_1|, |n_2|, |n_1 - n_2| \} \leq 1$$

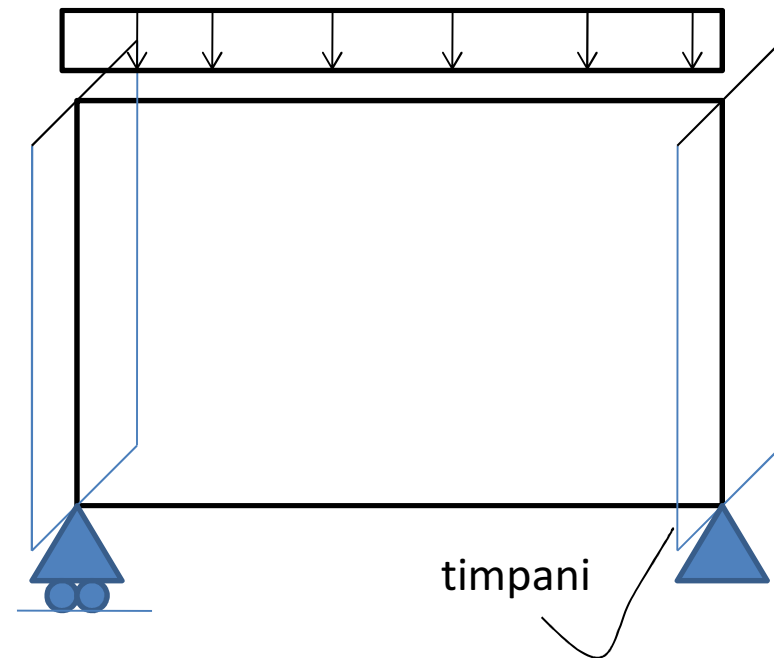


Problema piano di tensione



Equazioni di equilibrio di campo

Equazioni di equilibrio al bordo



$$n_{x,x} + n_{xy,y} = 0$$

$$n_{y,y} + n_{xy,x} = 0$$

$$n_x = 0, \quad x = \pm \ell$$

$$n_{xy} = 0, \quad n_y = -p, \quad y = h/2$$

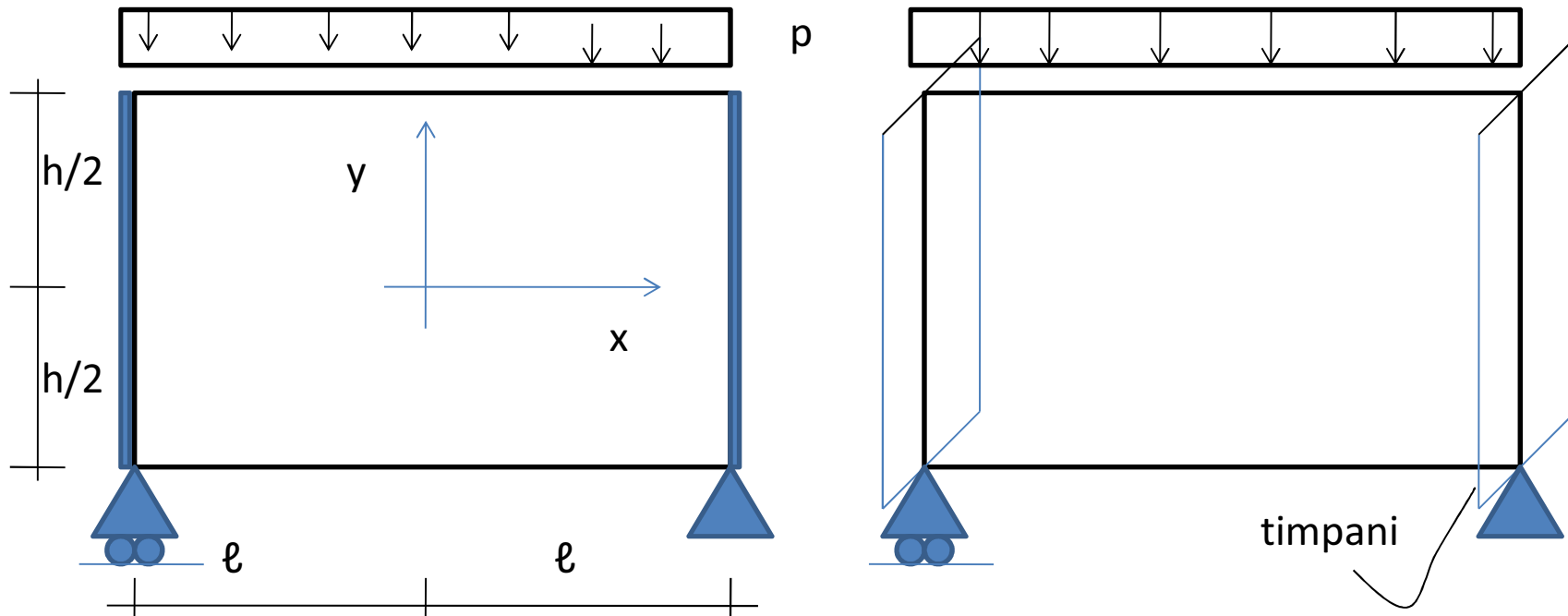
$$n_{xy} = 0, \quad n_y = 0, \quad y = -h/2$$

Problema piano di tensione

Continuità del vettore di tensione su una superficie di normale (α_x, α_y)

$$t_{nx} = n_x \alpha_x + n_{xy} \alpha_y$$

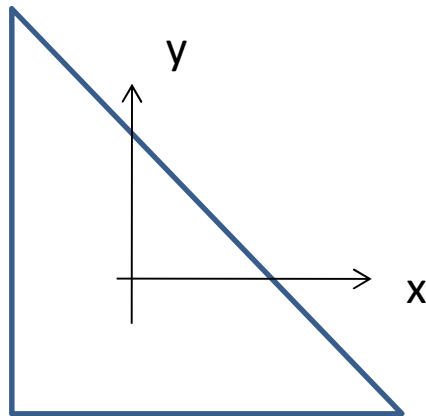
$$t_{ny} = n_{xy} \alpha_x + n_y \alpha_y$$



Soluzione staticamente ammissibile

Cerchiamo una soluzione staticamente ammissibile, ovvero equilibrata e rispettosa della conformità plastica

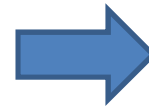
Consideriamo un elemento finito Constant Strain Triangle (CST) (tensione/ deformazione costante)



$$\sigma_x = c_1^e$$

$$\sigma_y = c_2^e$$

$$\tau_{xy} = c_3^e$$

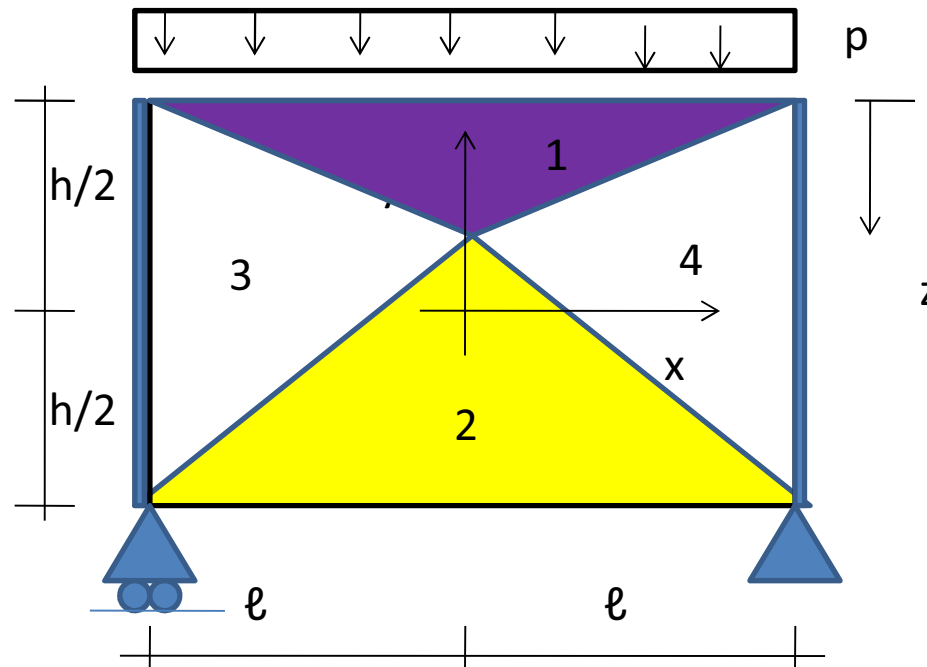


**Equazioni indefinite
equilibrio soddisfatte
 $\text{Div } \sigma + b = 0$**

Basta verificare l'ammissibilità in un punto qualunque dato che la tensione è costante

Problema piano di tensione

Consideriamo la lastra divisa in 4 elementi finiti CST



Criterio di Tresca

Si definisce una
sequenza di
moltiplicatori statici
funzioni di z

Abbiamo 3 incognite (c_1^e, c_2^e, c_3^e) per 4 elementi = 12 incognite

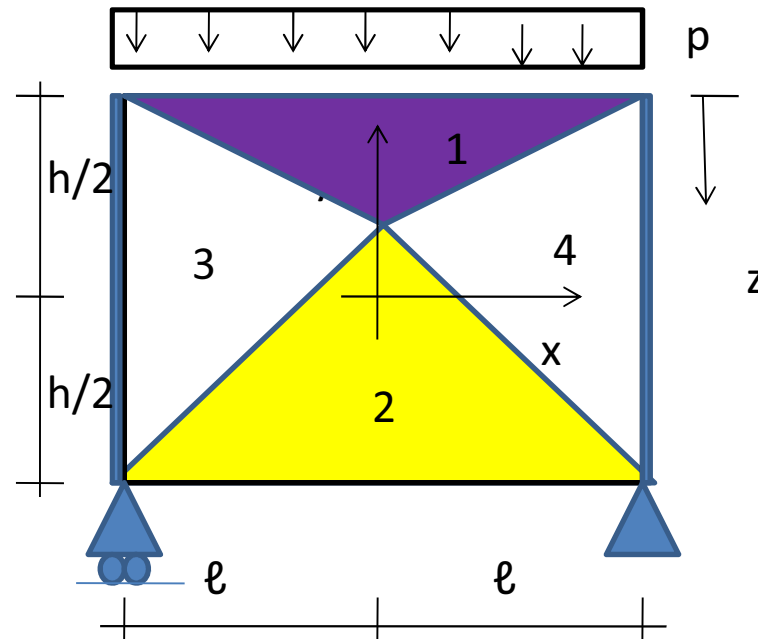
Disponiamo di 6 condizioni linearmente indip dall'eq. Bordo

4 condizioni dalla continuità del vettore t_n attraverso i confini elementari

Simmetria dà una condizione

Rimane un'unica incognita in z

Problema piano di tensione



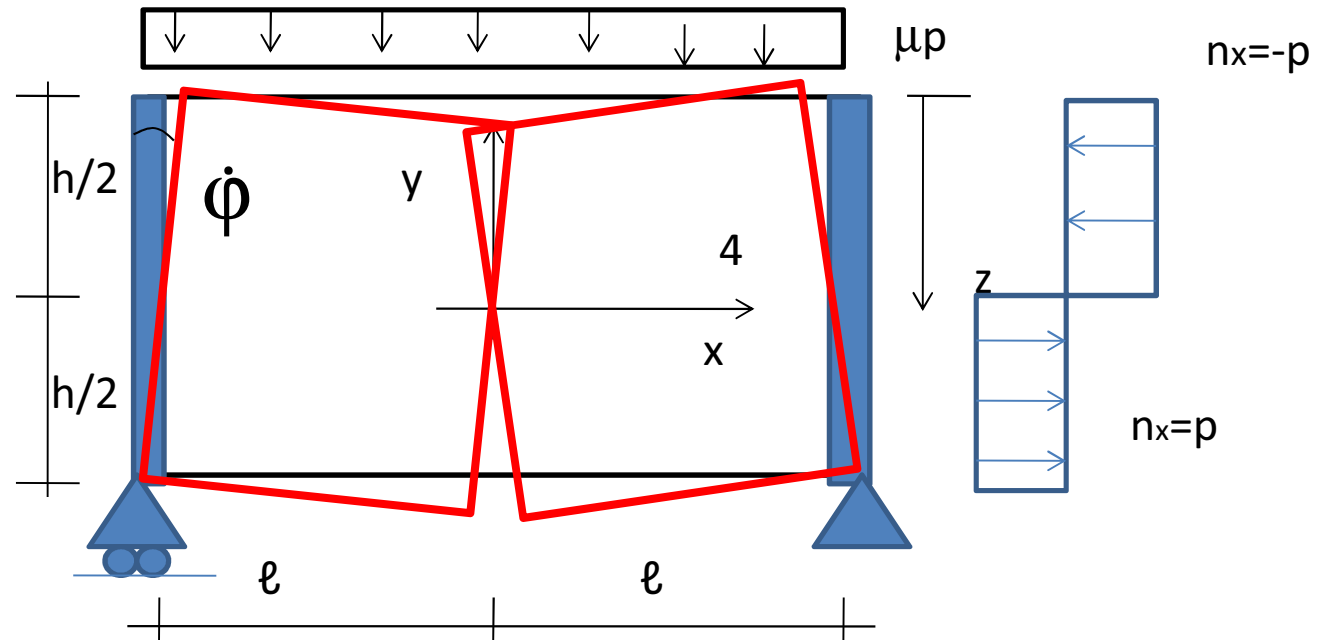
La soluzione varia al variare di h/ℓ

Per $0 < h/\ell \leq 0.972 \rightarrow \mu_s = (h/\ell)^2/2$

Per $0.972 \leq h/\ell \leq 2.058 \rightarrow \mu_s = 0.486h/\ell$

Per $2.058 \leq h/\ell < \infty \rightarrow \mu_s = 1$ (schiacciamento)

Teorema cinematico



Potenza dissipata

$$D = \int_0^{h/2} p \times 2\dot{\phi} y dy - \int_{-h/2}^0 p \times 2\dot{\phi} y dy = p\dot{\phi} \frac{h^2}{2}$$

Lavoro esterno

PLV

$$\mu_c = \frac{D}{L_e} = \frac{h^2}{2\ell^2} \Rightarrow \mu_c = \frac{h^2}{2\ell^2}$$

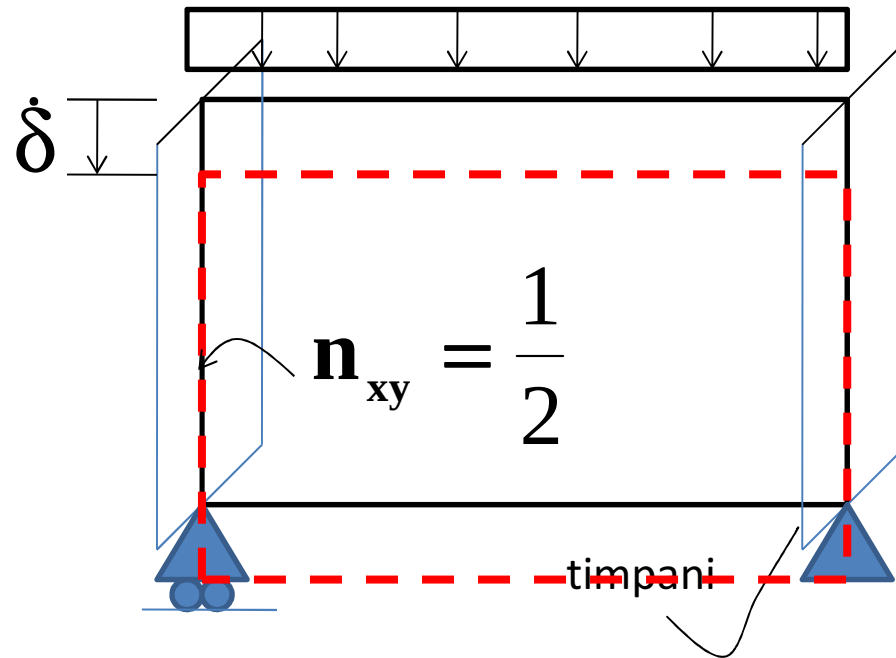
$$L_e = 2 \int_0^\ell p\dot{\phi}(\ell - x) dx = 2p\dot{\phi} \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{2} \right) = p\dot{\phi} \ell^2$$

Teorema cinematico

**Meccanismo per
tranciamento della
connessione ai timpani per
sopraggiunta crisi in n_{xy}**

**In particolare per il criterio
di Tresca**

Si ha che $n_{xy} = 1/2$



Potenza dissipata

$$D = 2p \frac{1}{2} \dot{\delta} h = p \dot{\delta} h$$

Lavoro esterno

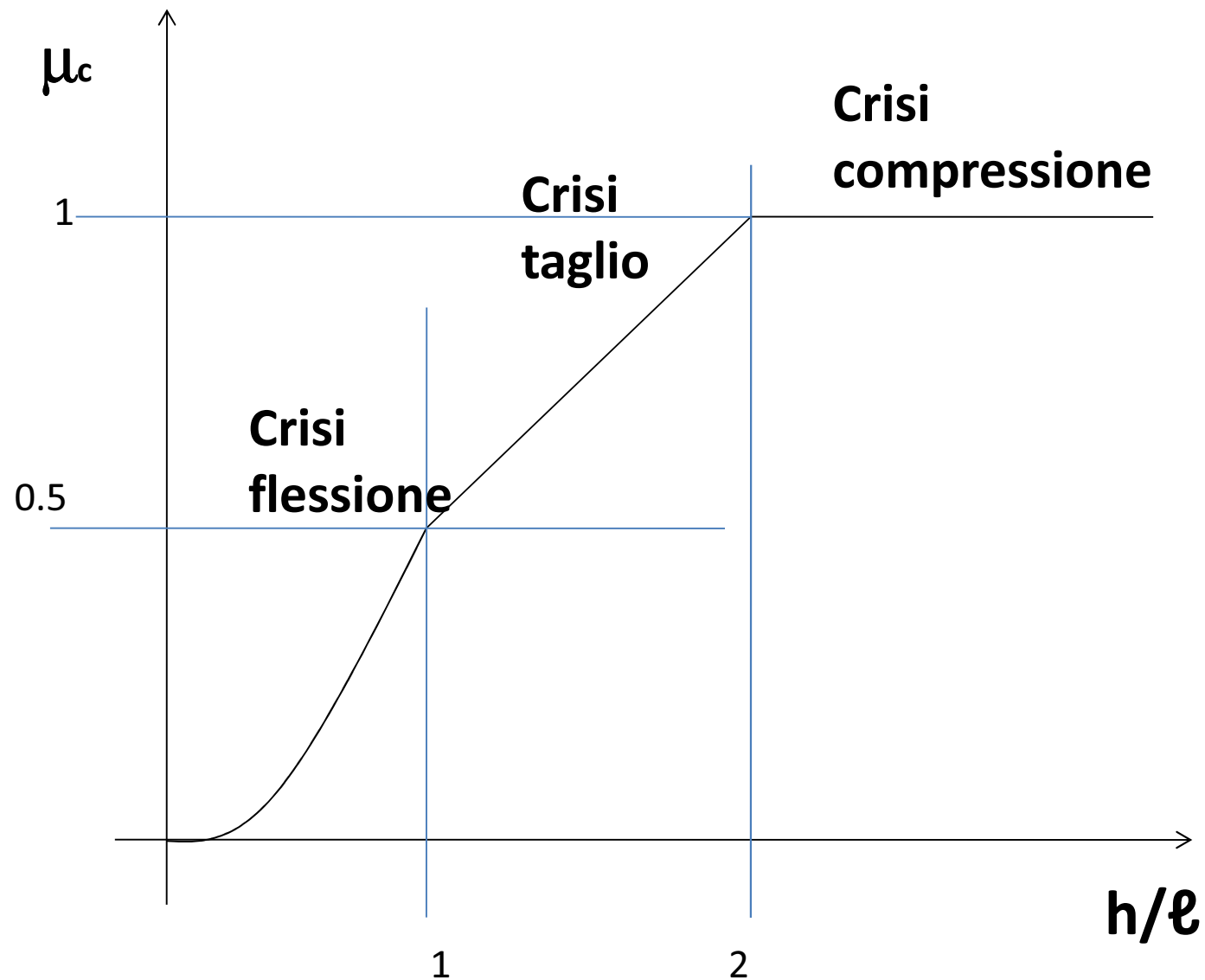
$$L_e = 2p \dot{\delta} \ell$$

PLV



$$\mu_c = \frac{h}{2\ell} \Rightarrow \mu_c = \frac{h}{2\ell}$$

Teorema cinematico



Altre Soluzioni note

Lastre forate

Lastre con fori rinforzati

Tubi spessi

Lamiere chiodate