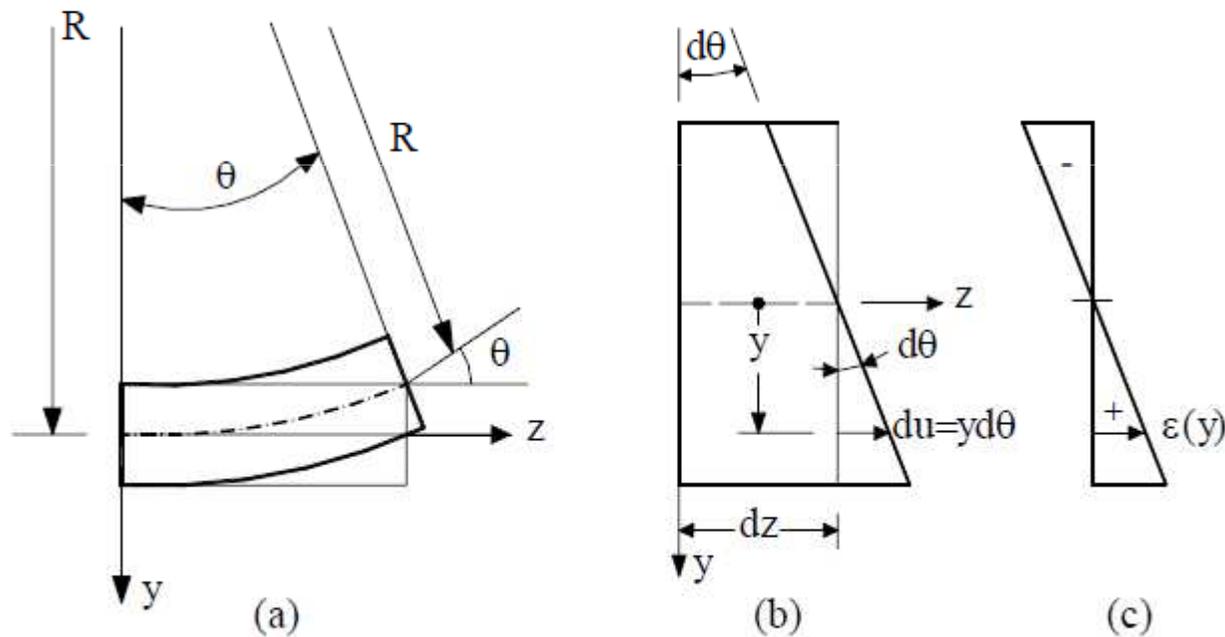


# Analisi incrementale di travi e telai EPP: Il diagramma Momento-Curvatura

**Ipotesi di Eulero-Bernoulli: sezione trasversale rimane piana, normale all'asse inflesso della trave  $\rightarrow \gamma=0$ , scorrimento nullo**



# Il diagramma Momento-Curvatura

Deformazione  
nella fibra in  
posizione  $y$

$$\varepsilon(y) = \frac{du(y)}{dz} = y \frac{d\theta}{dz} = y\chi \quad \chi = \frac{1}{R} \text{ curvature}$$

$R$  radius of curvature

Momento flettente

$$M = \int_A \sigma(y) y dA$$

modello elastico  
perfettamente plastico EPP

$\varepsilon_{el}$  = deformazione  
limite elastica

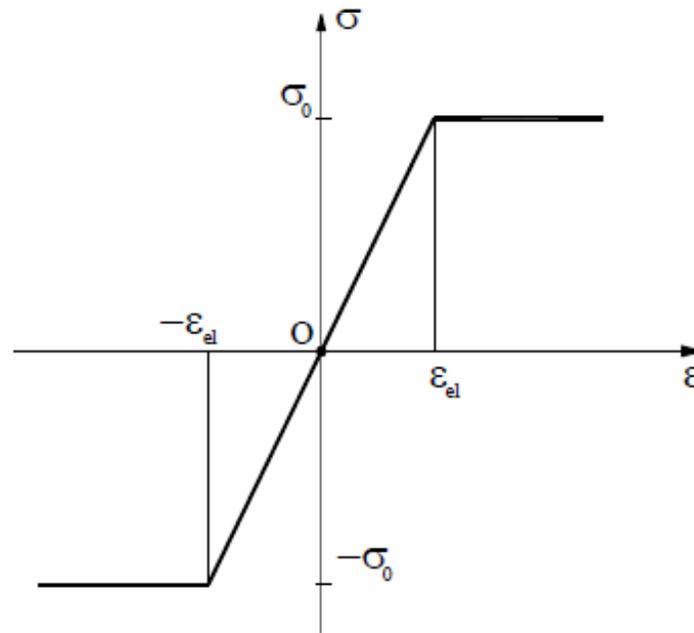
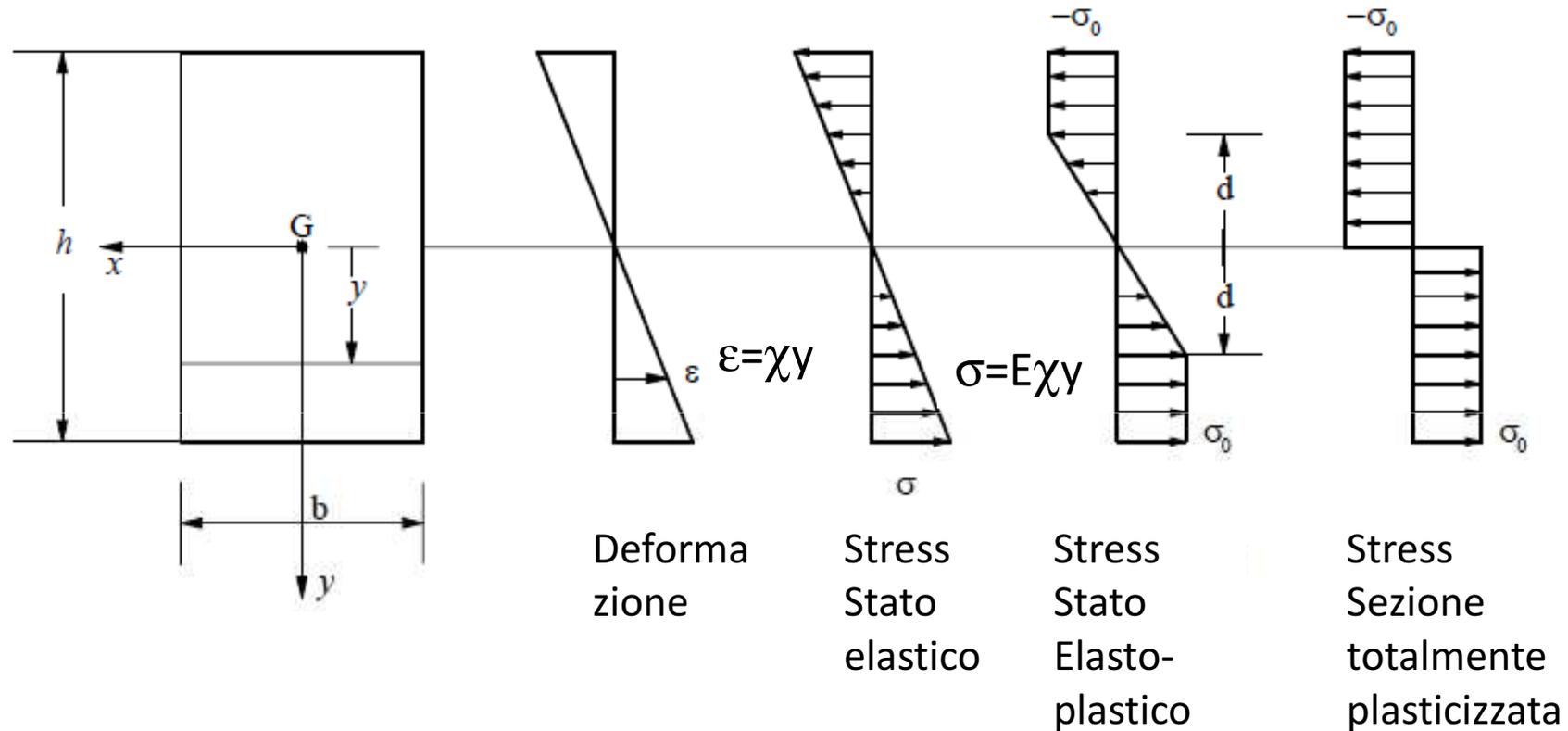


Fig.1.36

# Cerniera plastica in sezione rettangolare



# Cerniera plastica in sezione rettangolare

## Fase elastica

$$\max \varepsilon = \chi \frac{h}{2} < \varepsilon_{el} \Rightarrow \chi < \chi_{el} = \frac{2\varepsilon_{el}}{h} = \frac{2\sigma_0}{Eh}$$

$$\sigma = E\chi y \Rightarrow M = b \int_{-h/2}^{h/2} E\chi y y dy = EJ\chi$$

$$J = \int_A y^2 dA$$

**Momento di inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse orizzontale baricentrico x**

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

**Sezione rettangolare**

# Limite Elastico

$\chi = \chi_{el} \Rightarrow$  **Snervamento all'intradosso ed estradosso**

$$M_{el}(\chi_{el}) = EJ\chi_{el} = \frac{2J\sigma_0}{h} = \frac{\sigma_0 bh^2}{6} \Rightarrow \text{momento limite Elastico}$$

$$W_{el} = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow M_{el} = \sigma_0 W_{el} \quad \text{Modulo Elastico } W_{el}$$

$$\frac{M}{M_{el}} = \frac{\chi}{\chi_{el}} \quad \text{Legge costitutiva adimensionalizzata}$$

# Fase elasto-plastica

$$\chi > \chi_{el} = \frac{2\sigma_0}{Eh}$$

Alla fibra  $y=d$

$$\varepsilon(d) = \varepsilon_{el} \Rightarrow \chi d = \varepsilon_{el} = \frac{\sigma_0}{E} \Rightarrow d = \frac{\sigma_0}{E\chi} = \frac{h}{2} \frac{\chi_{el}}{\chi} \quad \sigma = E\chi d = \sigma_0$$

$$\frac{d}{h} = \frac{1}{2} \frac{\chi_{el}}{\chi}$$

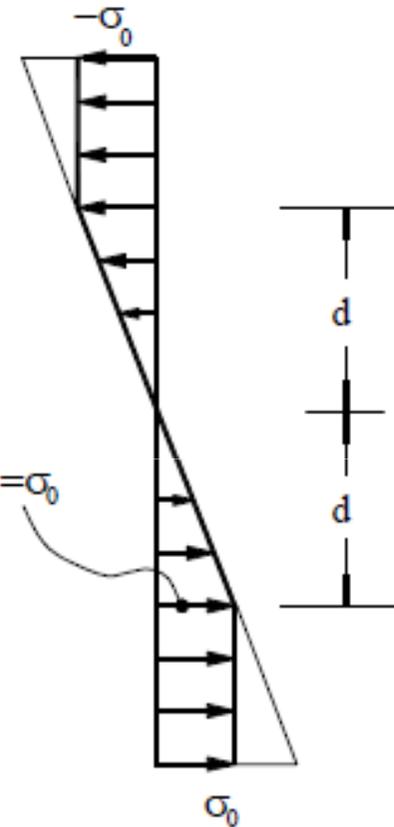


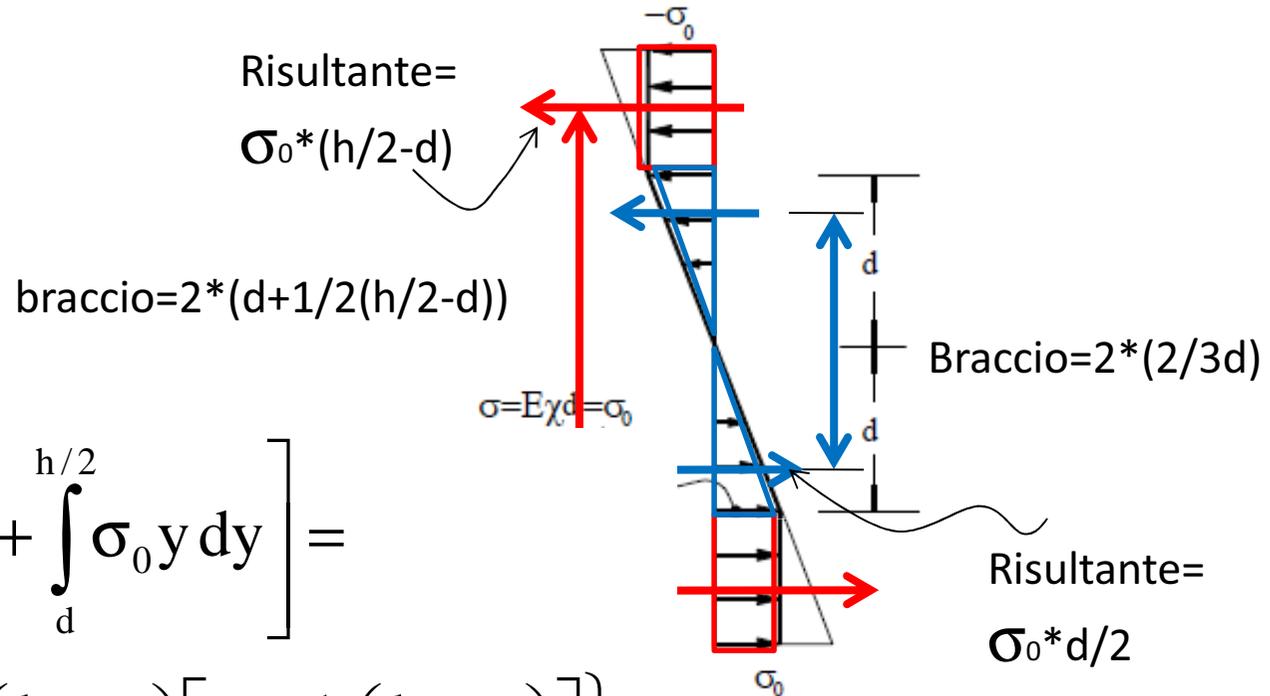
Fig.1.39

# Cerniera plastica in sezione rettangolare

$$M = 2b \left[ \int_0^d E\chi y^2 dy + \int_d^{h/2} \sigma_0 y dy \right] =$$

$$2b \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0 d \frac{2}{3} d + \sigma_0 \left( \frac{h}{2} - d \right) \left[ d + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - d \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{\sigma_0 b h^2}{6} \left[ \frac{3}{2} - 2 \left( \frac{d}{h} \right)^2 \right] = M_{el} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_{el}}{\chi} \right)^2 \right]$$

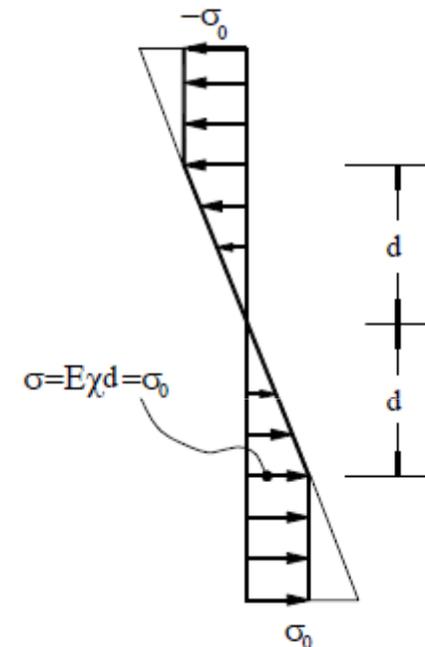


# Cerniera plastica in sezione rettangolare

$$\frac{M}{M_{el}} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_{el}}{\chi} \right)^2 \right]$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} M = M_0 = \frac{3}{2} M_{el}$$

Quando la curvatura diventa infinita, il momento flettente tende ad un valore limite che rappresenta il momento limite plastico o di snervamento  $M_0$

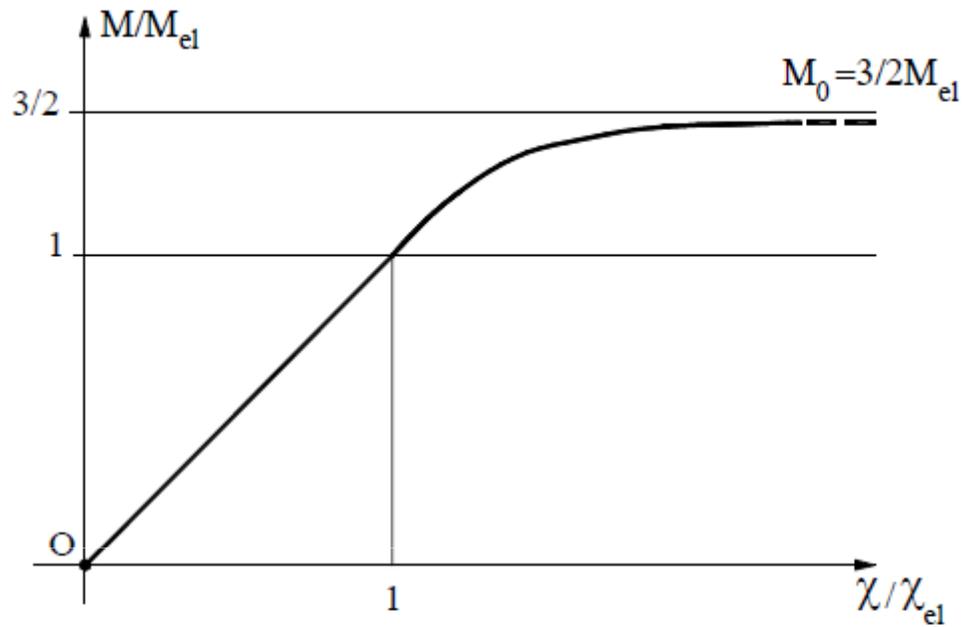


# Cerniera plastica in sezione rettangolare

**Tabella 13.1**

$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0}$	1.	2.	3.	5.	10.
$\frac{M}{M_0}$	.667	.917	.963	.987	.997
$\frac{\chi}{M/EI}$	1.000	1.455	2.077	3.378	6.689

# Cerniera plastica in sezione rettangolare



$$\frac{M}{M_{el}} = \begin{cases} \frac{\chi}{\chi_{el}} & |\chi| \leq \chi_{el} \\ \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_{el}}{\chi} \right)^2 \right] & |\chi| > \chi_{el} \end{cases}$$

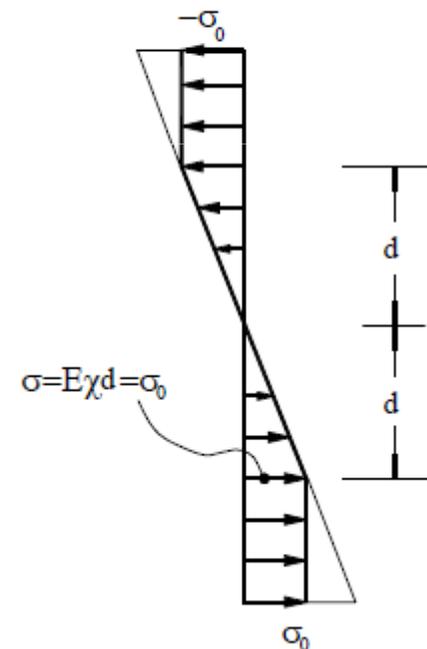


Fig.1.39

# Cerniera plastica in sezione rettangolare

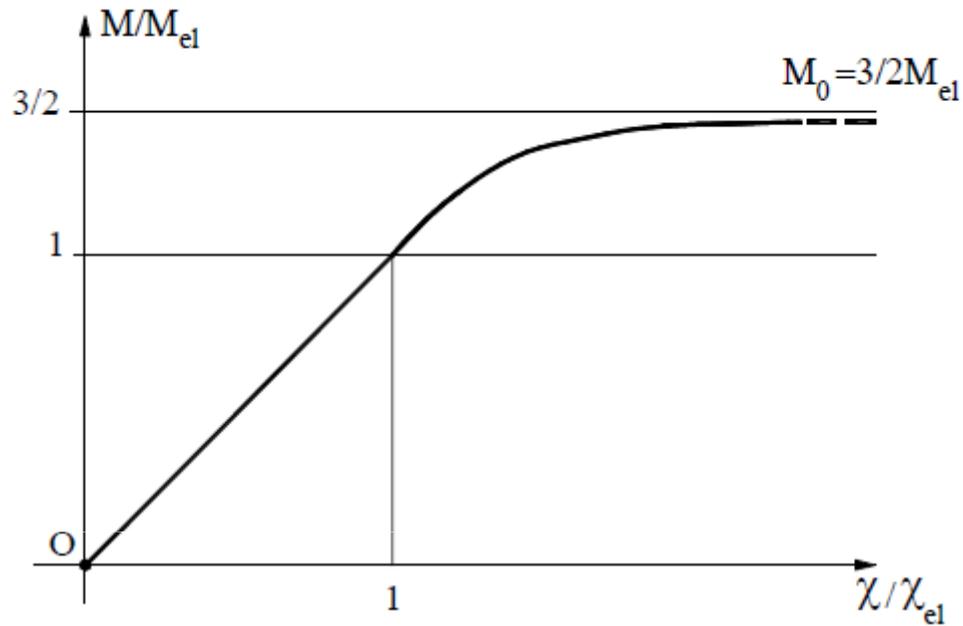


Fig.1.40

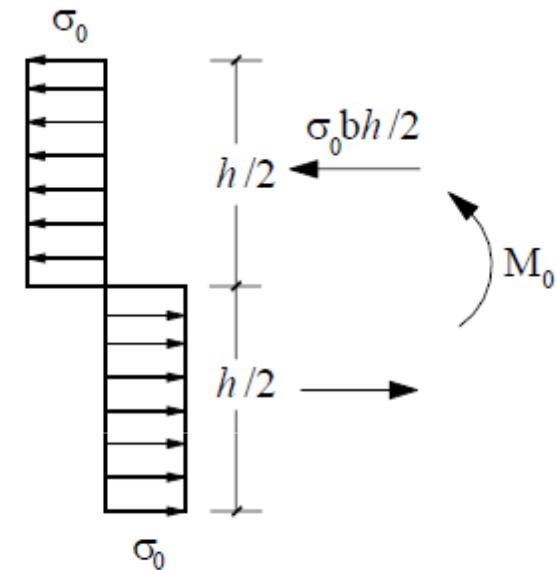


Fig.1.41

$$M_0 = \frac{\sigma_0 b h}{2} \frac{h}{2} = \frac{\sigma_0 b h^2}{4} = W_0 \sigma_0$$

Sezione rettangolare

$$W_0 = \int_{A^+} y dA - \int_{A^-} y dA = \frac{b h^2}{4}$$

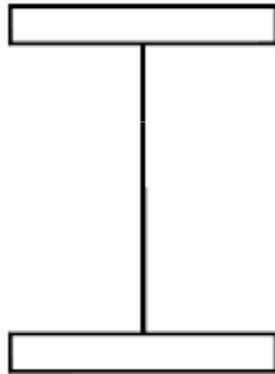
Modulo plastico

# Cerniera plastica in sezione rettangolare

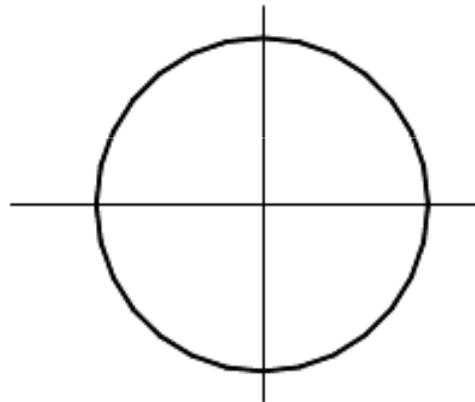
$M_0$  ed  $M_{el}$  dipendono linearmente dallo stress di snervamento  $\sigma_0$  cosicchè il loro rapporto  $M_0/M_{el}$  dipende solo dalla forma della sezione, ovvero da un fattore di forma  $\alpha$



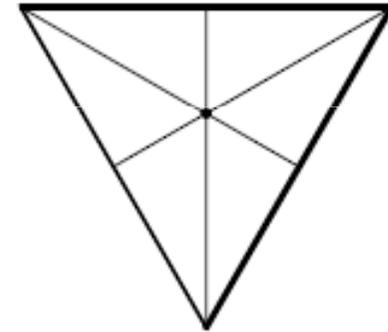
$\alpha = 1.5$



$\alpha \approx 1.1$



$\alpha = 1.7$



$\alpha = 2.37$

# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata

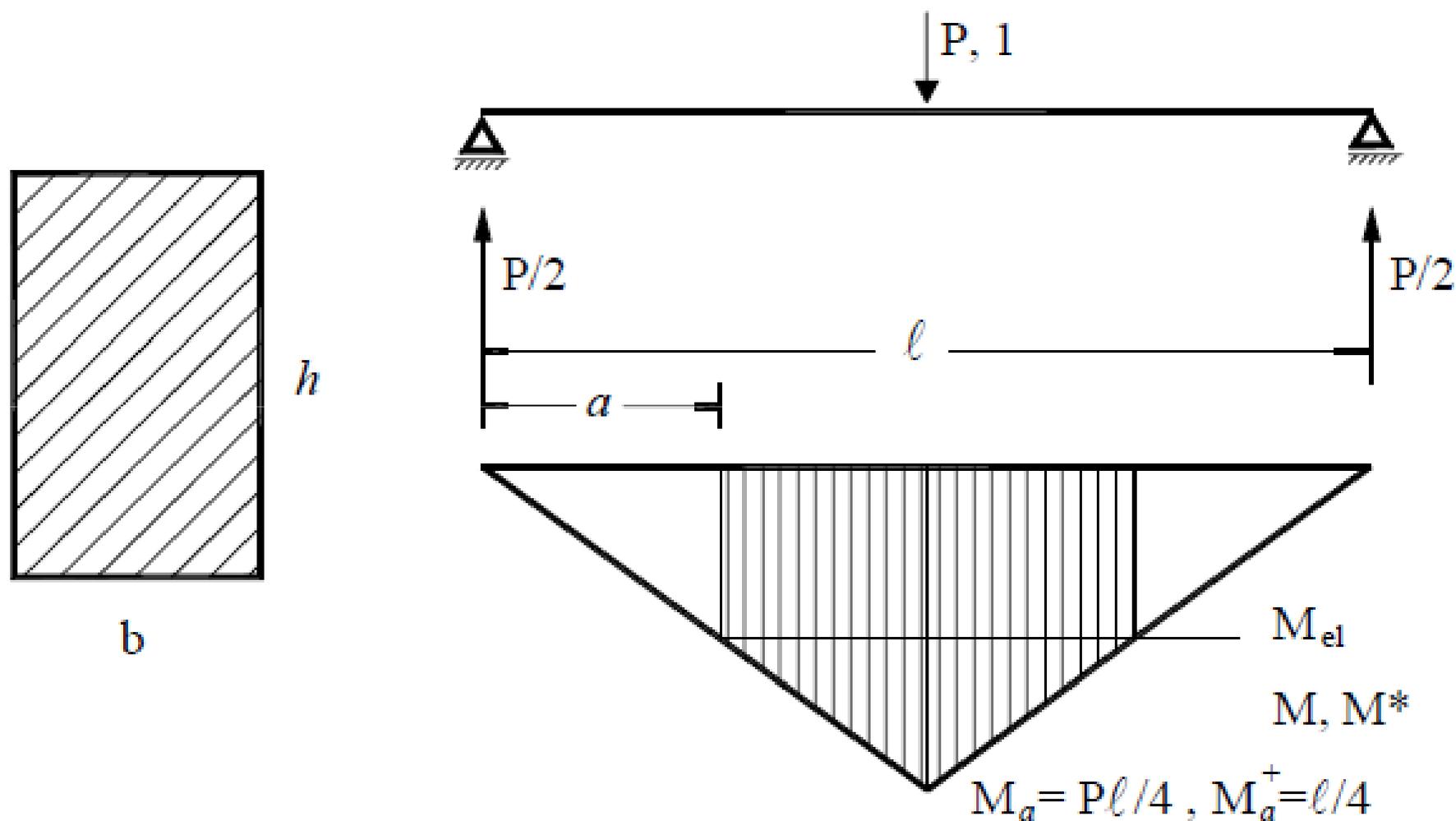
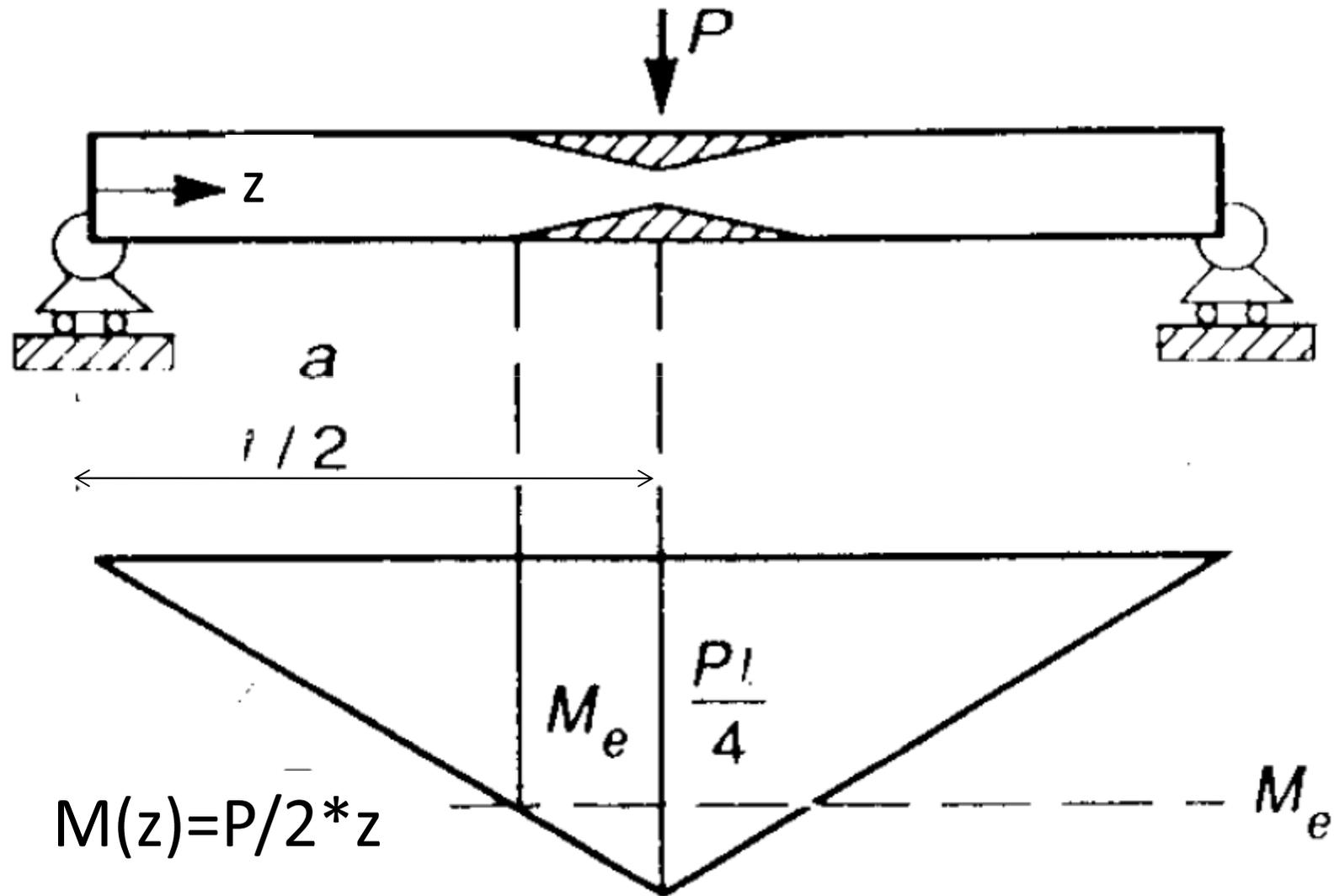
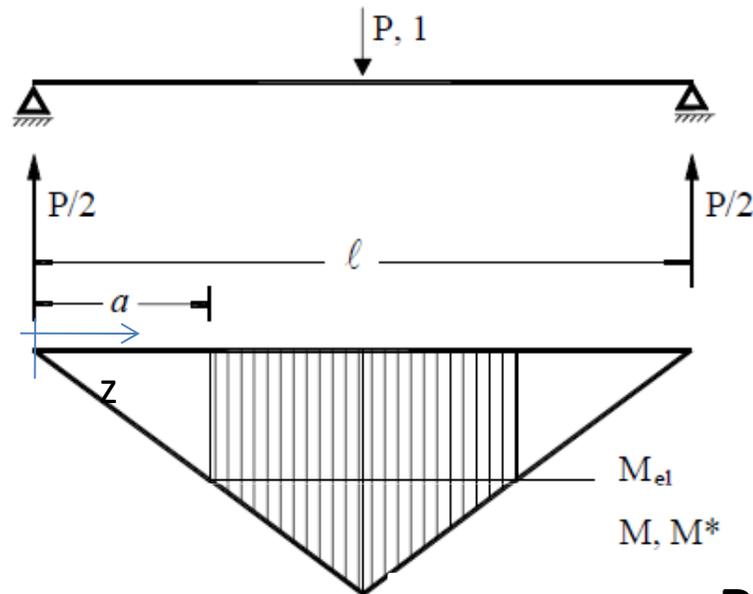


Fig.1.43

# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata



# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata



Il momento massimo per un qualunque  $P$  è  $M = P/2 * \ell/2$

Aumentando  $P$  fino a  $P_{el}$  si raggiungerà in  $\ell/2$  il momento limite elastico

$M_{el} = P_{el} / 2 * \ell/2$  cui corrisponde

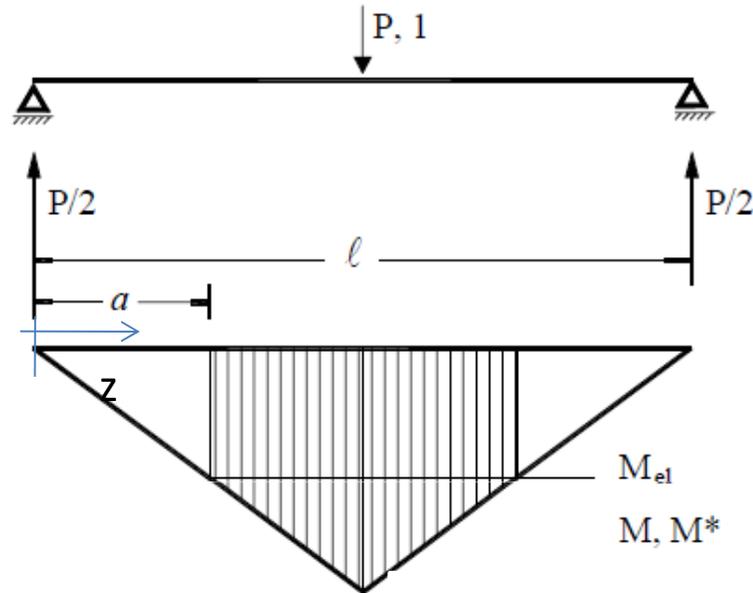
$P_{el} = 4M_{el}/\ell$

Risposta elastica finchè  $M = P\ell/4 \leq M_{el}$

$$v = \frac{P\ell^3}{48EJ}, \quad v_{el} = \frac{P_{el}\ell^3}{48EJ} = \frac{M_{el}\ell^2}{12EJ}$$

$$\frac{v}{v_{el}} = \frac{P}{P_{el}}$$

# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata



Il momento massimo per un qualunque

$P$  è  $M = P/2 * \ell/2$

Aumentando  $P$  fino a  $P_{el}$  si raggiungerà

il momento limite elastico

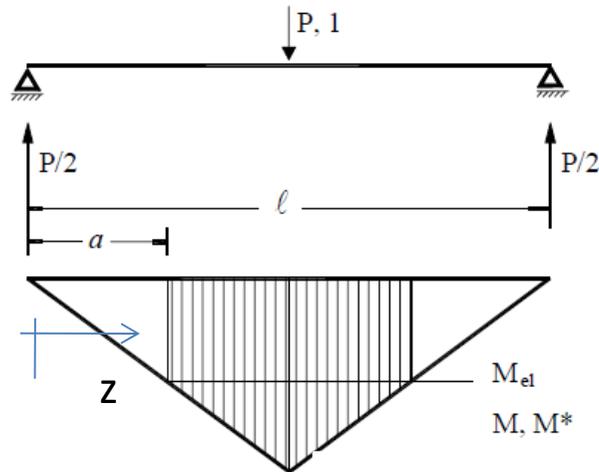
$M_{el} = P_{el} / 2 * \ell/2$

$$M(z) = P/2 * z$$

$$M_{el} = P_{el} / 2 * \ell/2$$

$$M/M_{el} = (P/P_{el}) z * 2/\ell$$

# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata



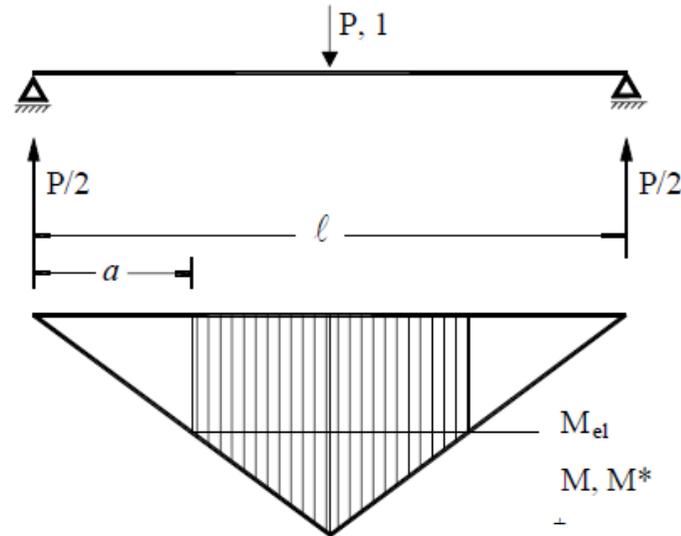
**Poichè**

$$\frac{M}{M_{el}} = \begin{cases} \frac{\chi}{\chi_{el}} & |\chi| \leq \chi_{el} \\ \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_{el}}{\chi} \right)^2 \right] & |\chi| > \chi_{el} \end{cases}$$

**Invertendo**

$$\frac{\chi}{\chi_{el}} = \begin{cases} \frac{M}{M_{el}} = \frac{2z}{l} \frac{P}{P_{el}} & M \leq M_{el} \\ \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_{el}}}} = \frac{1}{\sqrt{3 - 4 \frac{Pz}{P_{el}l}}} & M_{el} \leq M < M_0 \end{cases}$$

# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata

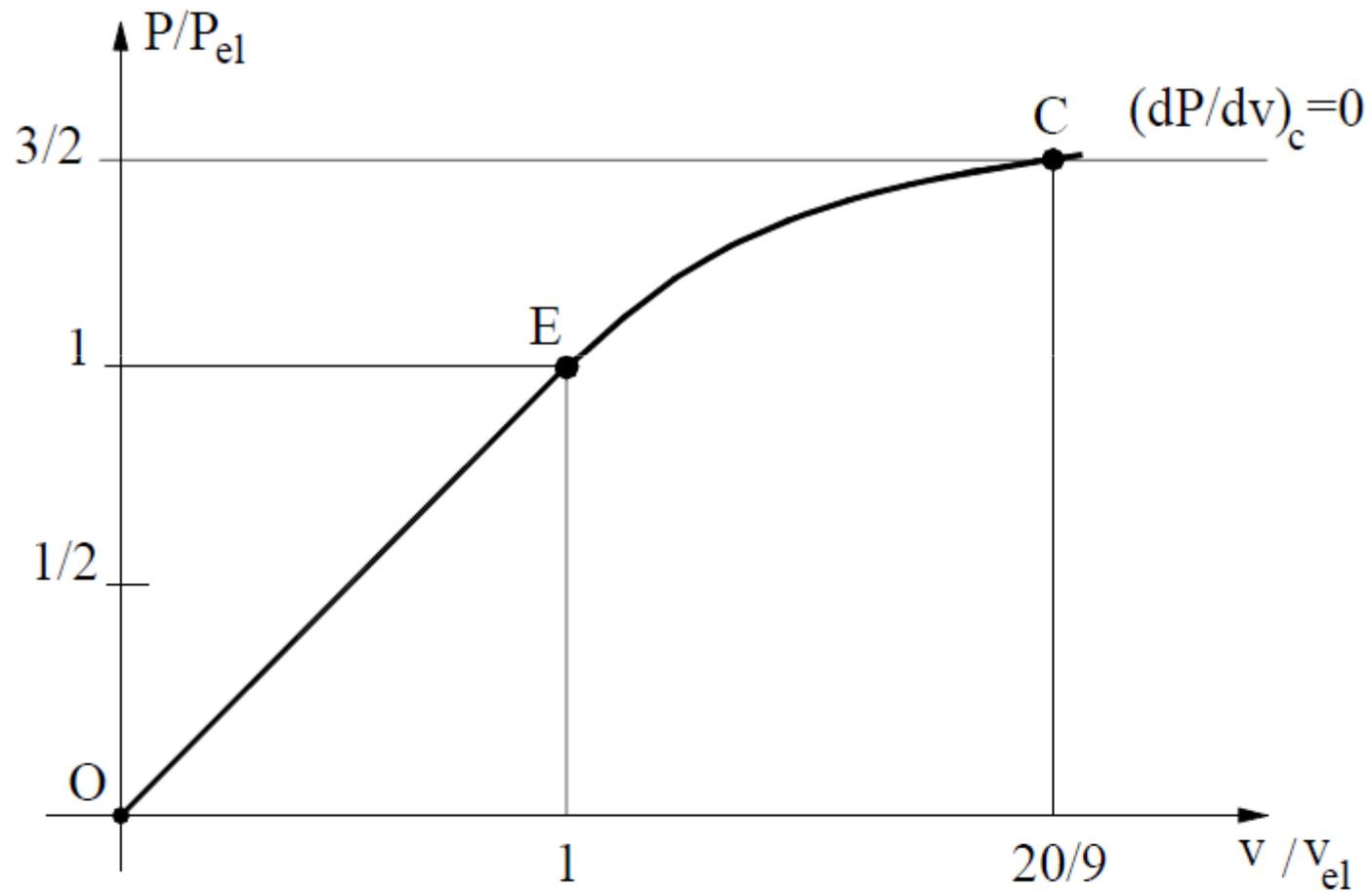


$$\frac{\chi}{\chi_{el}} = \begin{cases} \frac{M}{M_{el}} = \frac{2z}{l} \frac{P}{P_{el}} & M \leq M_{el} \\ 1 & M_{el} \leq M < M_0 \\ \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_{el}}}} = \frac{1}{\sqrt{3 - 4 \frac{Pz}{P_{el}l}}} & M_{el} \leq M < M_0 \end{cases}$$

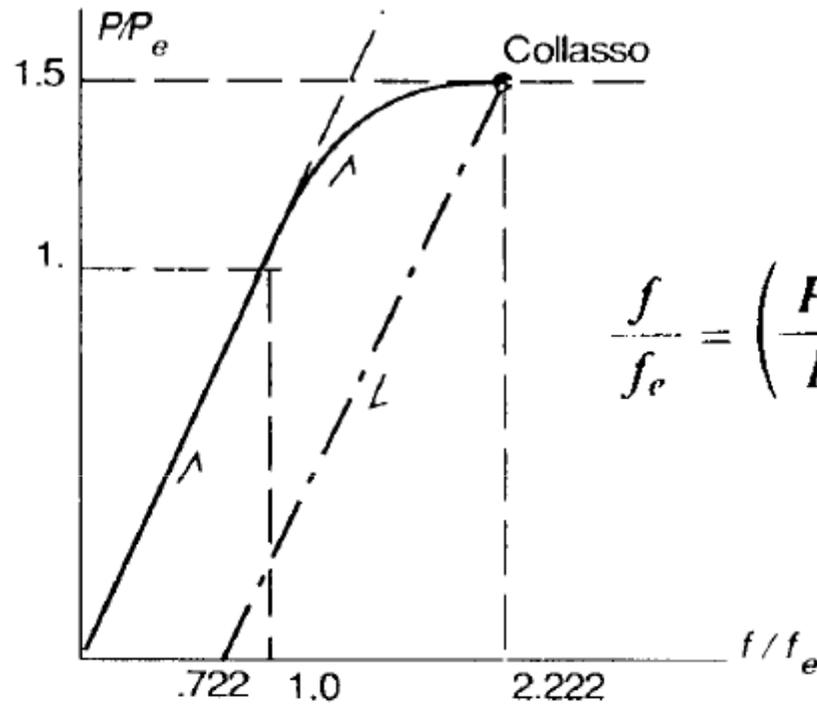
$$v = 2 \int_0^{\ell/2} M^*(z) \chi(z) dz = 2 \int_0^a \left(\frac{z}{2}\right) * \frac{2}{l} \left(\frac{P}{P_{el}}\right) \chi_{el} z dz + 2 \int_a^{\ell/2} \left(\frac{z}{2}\right) \left[3 - \frac{4}{l} \left(\frac{P}{P_{el}}\right) z\right]^{-\ell/2} \chi_{el} dz$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_e}{(P/P_{el})^2} \left[ 5 - (3 + P/P_{el}) \sqrt{3 - 2(P/P_{el})} \right]$$

# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata



# Analisi incrementale di una trave EP appoggiata



$$\frac{f}{f_e} = \left( \frac{P_e}{P} \right)^2 \left\{ 5 - \left( 3 + \frac{P}{P_e} \right) \left[ 3 - 2 \frac{P}{P_e} \right]^{1/2} \right\}$$

Leone Corradi, Vol II pag 62

$P/P_e$	$f/f_e$
1.	1.
1.1	1.102
1.2	1.213
1.3	1.349
1.4	1.547
1.5	2.222

# Sezioni monosimmetriche

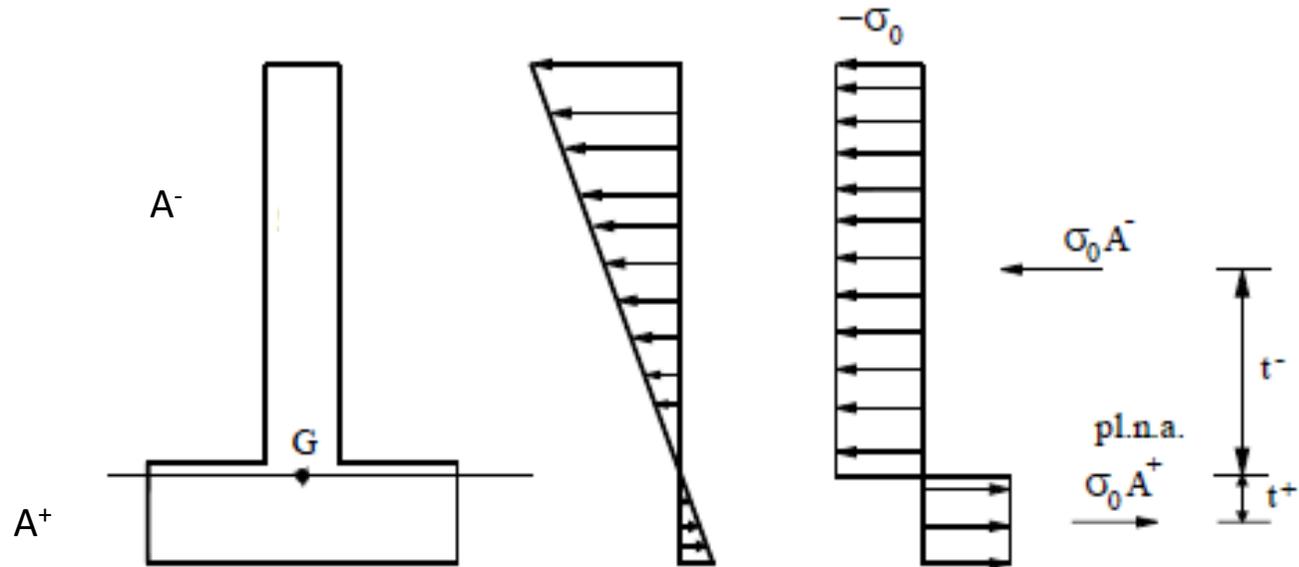


Fig.1.46

**Risposta sezione totalmente plasticizzata**

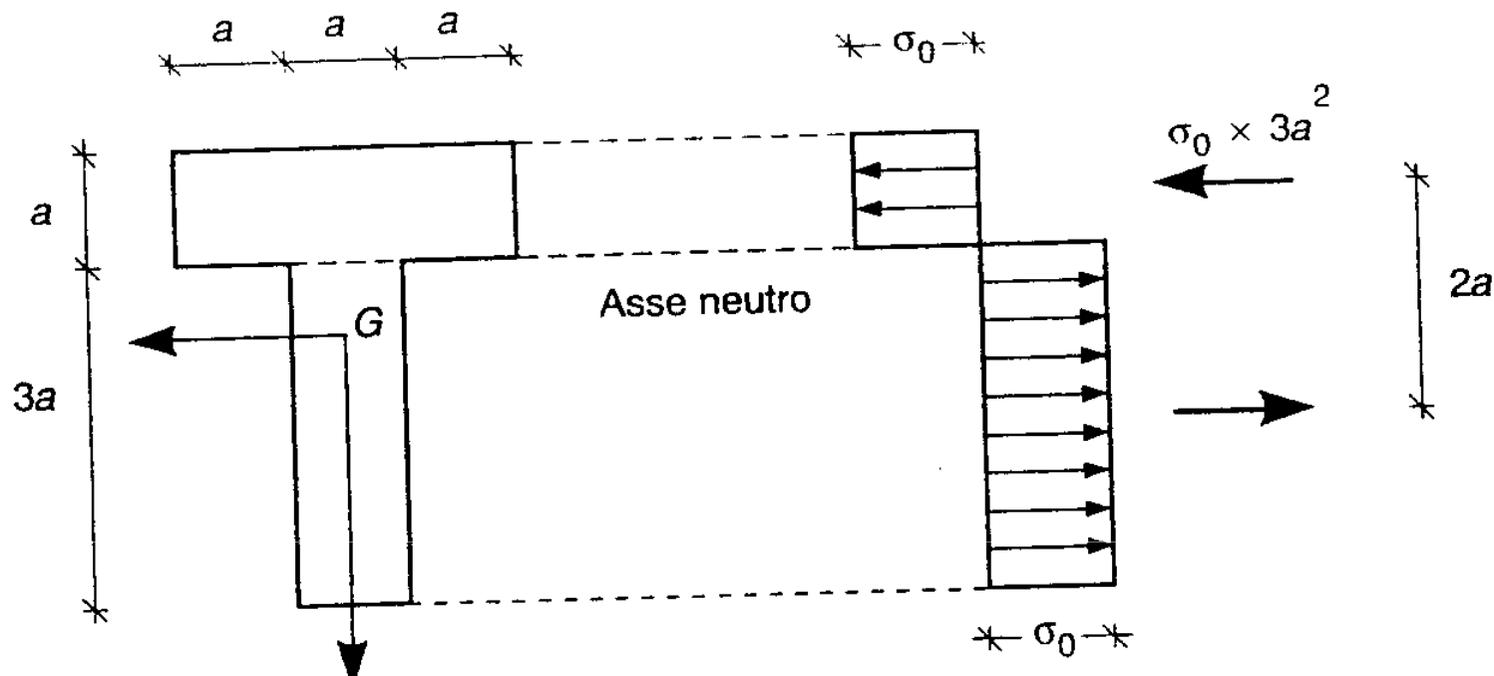
$$N = \int_{A^+} \sigma_0 dA - \int_{A^-} \sigma_0 dA = 0 \Rightarrow A^+ = A^- = A/2$$

**Momento plastico**

$$M_p = \sigma_0 (A^+ t^+ + A^- t^-)$$

la posizione dell'asse neutro dipende dalla geometria della sezione

# Mono-symmetric sections

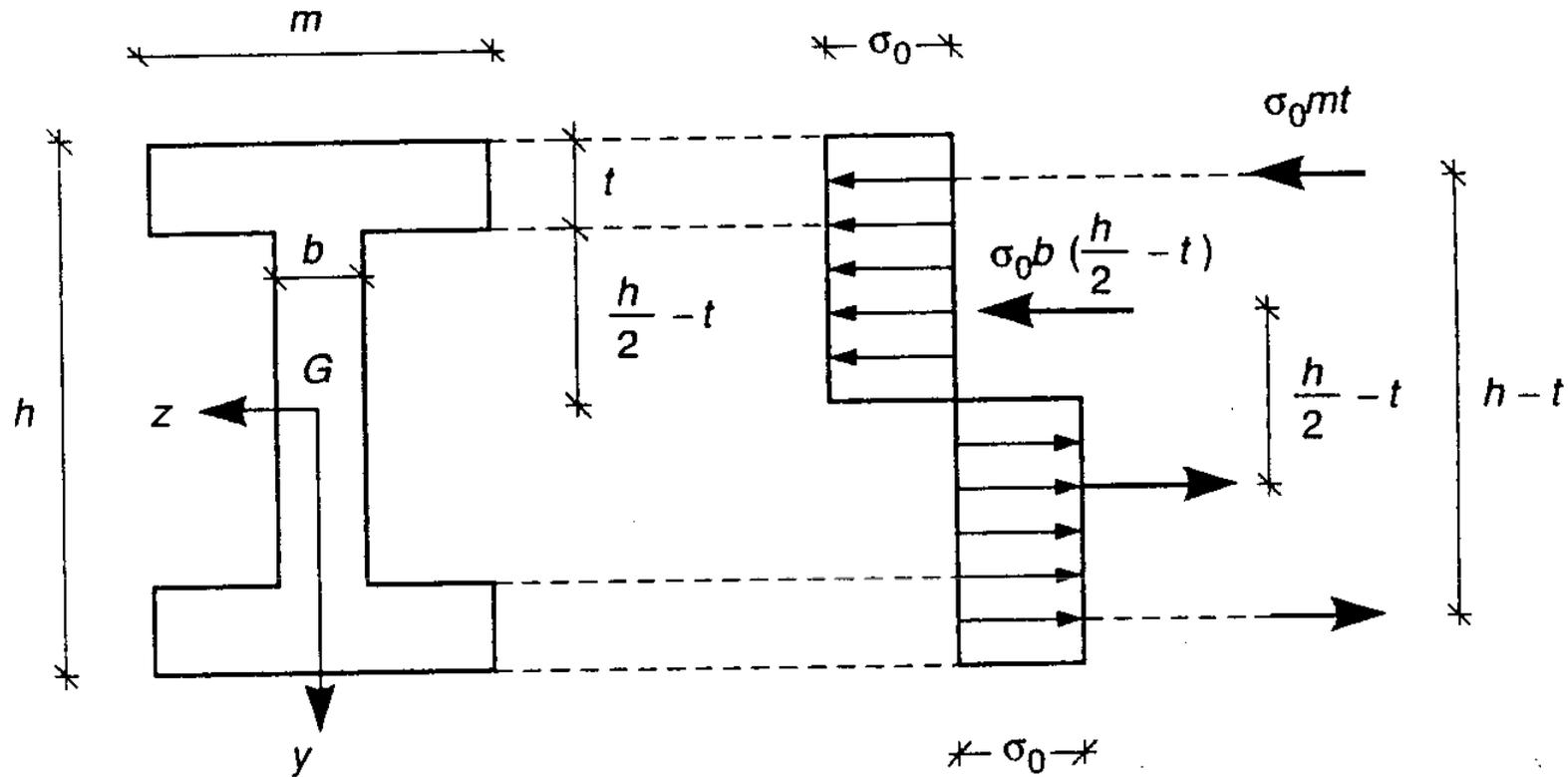


**ESEMPIO 13.3** La sezione a T in Figura 13.13a è inflessa nel suo piano di simmetria. Se, come sin qui sempre ipotizzato, il materiale è simmetrico, nella situazione limite l'asse neutro si colloca nella posizione indicata in figura, tale per cui gli sforzi a trazione e compressione insistono su aree uguali, dando luogo a risultante nulla. L'equilibrio consente il calcolo del momento limite (Figura 13.13b). Risulta

$$M_0 = \sigma_0 3a^2 \times 2a = 6a^2 \sigma_0 \quad (13.19)$$

Il momento  $M_e$  al limite elastico corrisponde alla situazione in cui la tensione di snervamento  $\sigma_0$  viene raggiunta nella fibra più sollecitata. Si è visto che esso è convenientemente espresso nella forma

# I-Section



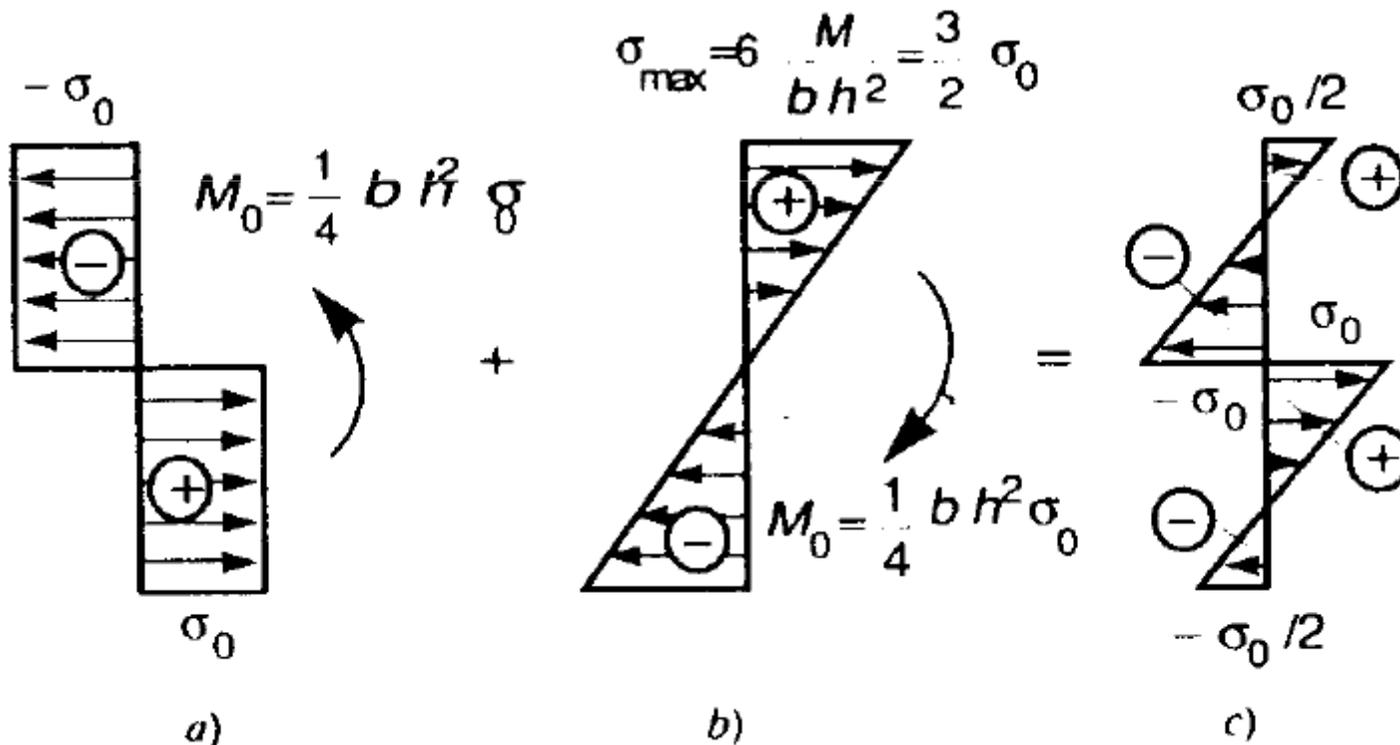
**ESEMPIO 13.2** La sezione a I in Figura 13.12a è doppiamente simmetrica e l'asse neutro è pertanto ancora baricentrico nella situazione limite. Il relativo stato tensionale, illustrato in Figura 13.12b, equivale alla coppia

$$M_0 = \sigma_0 m t (h - t) + \sigma_0 b \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 = \sigma_0 \left[ m t (h - t) + b \left( \frac{h^2}{4} - h t + t^2 \right) \right] \quad (13.18)$$

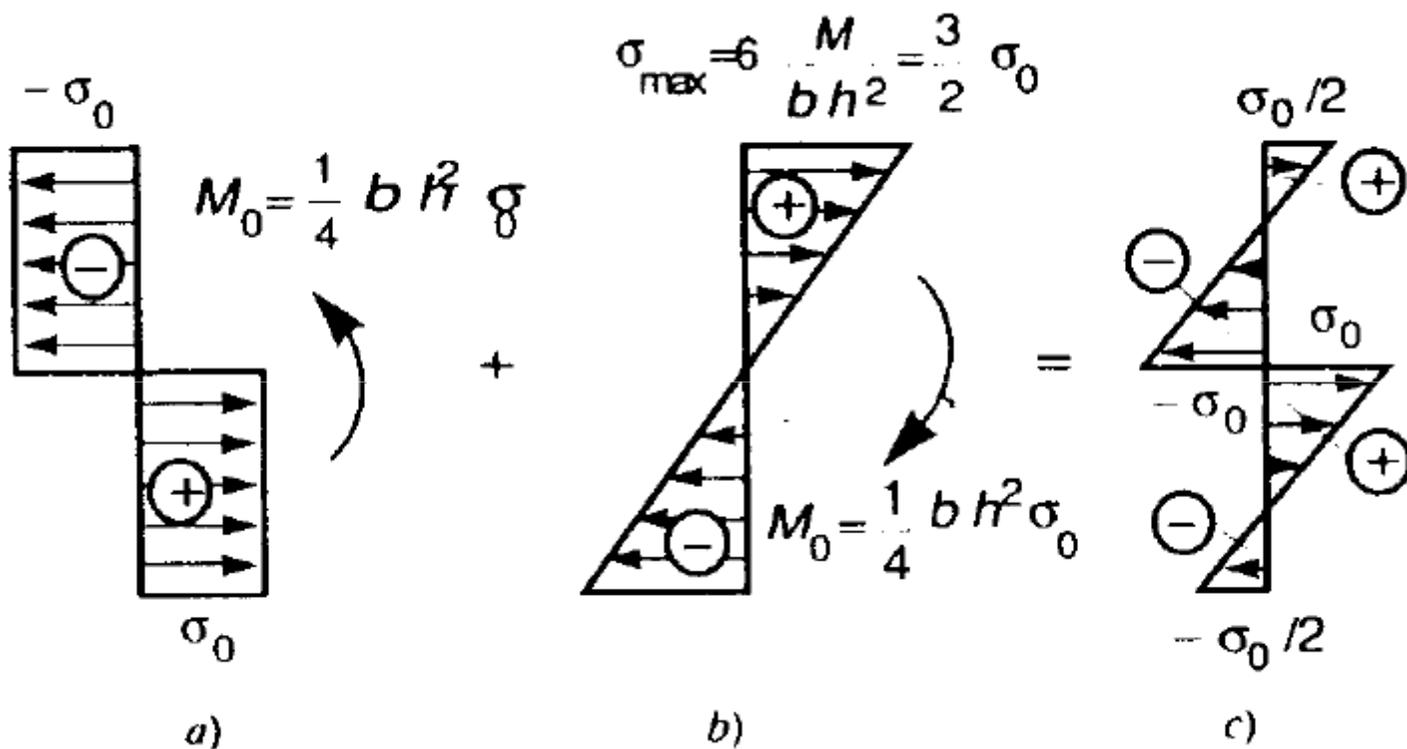
che rappresenta il momento limite della sezione.

# Tensioni residue allo scarico

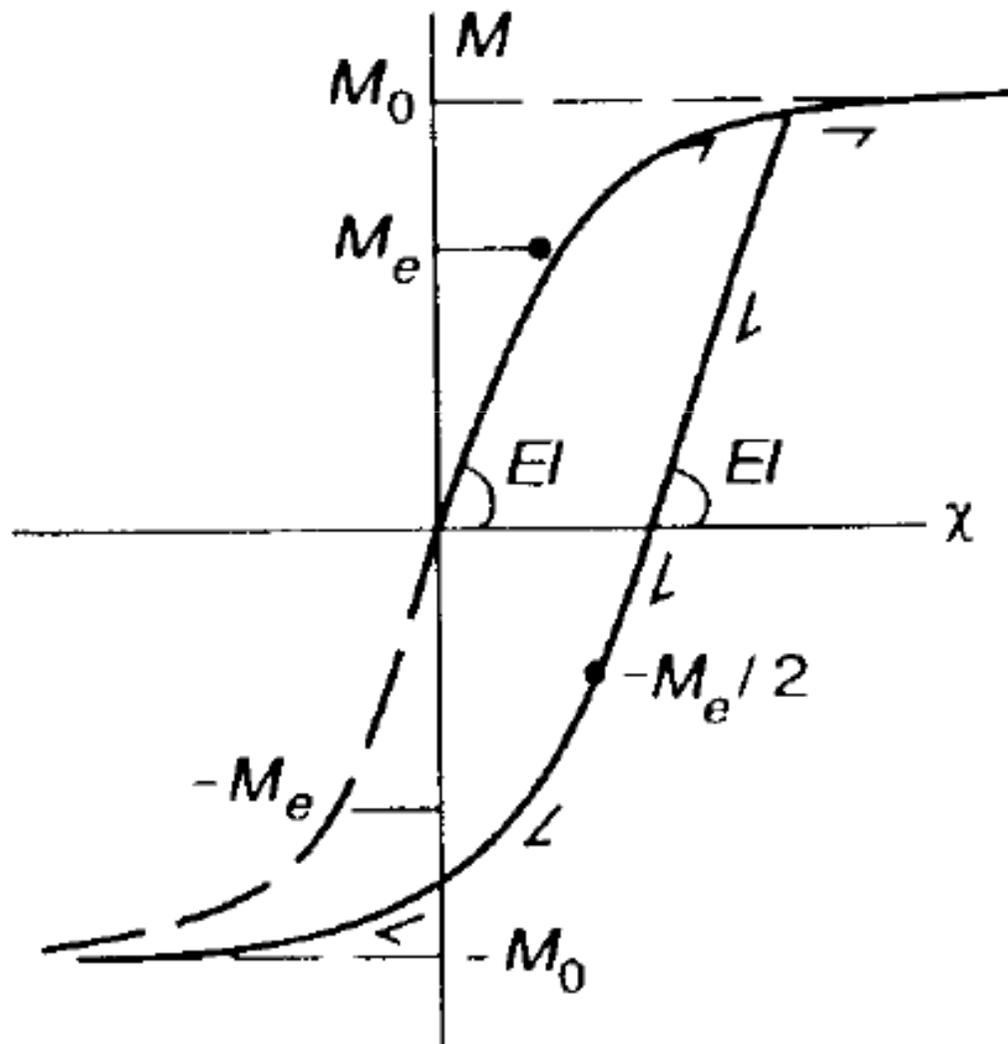
Se una volta superato il limite elastico il momento flettente viene rimosso, la natura irreversibile del comportamento elasto-plastico impedisce che la sezione ritorni nella sua configurazione iniziale, indeformata e priva di sforzo. Il fenomeno viene ora esemplificato per il caso idealmente elasto-plastico,



# Tensioni residue allo scarico



# Tensioni residue allo scarico



# Cerniera plastica

La semplicità del problema ha consentito di determinare in forma chiusa la curva carico-spostamento (7.121). È però evidente come le difficoltà connesse con una soluzione analitica crescano con la complessità del problema. Anche solo in presenza di un comportamento linearmente incrudente del materiale (Figura 7.35) l'approccio analitico risulta pressoché impraticabile. Pur nell'ambito semplificato della teoria della trave, la soluzione del problema elasto-plastico richiede in generale il ricorso a metodi numerici e a strumenti di calcolo automatico.

È possibile introdurre un'ulteriore schematizzazione, accettabile per materiali idealmente elasto-plastici, che rende il problema trattabile anche senza l'ausilio di tali strumenti. A questa schematizzazione (nota come modello a *cerniera plastica*) verrà rivolta particolare attenzione nel capitolo dedicato al calcolo a rottura. Va però quanto meno anticipato come anche il problema evolutivo di travi idealmente elasto-plastiche possa essere affrontato sulla base di tale schematizzazione.

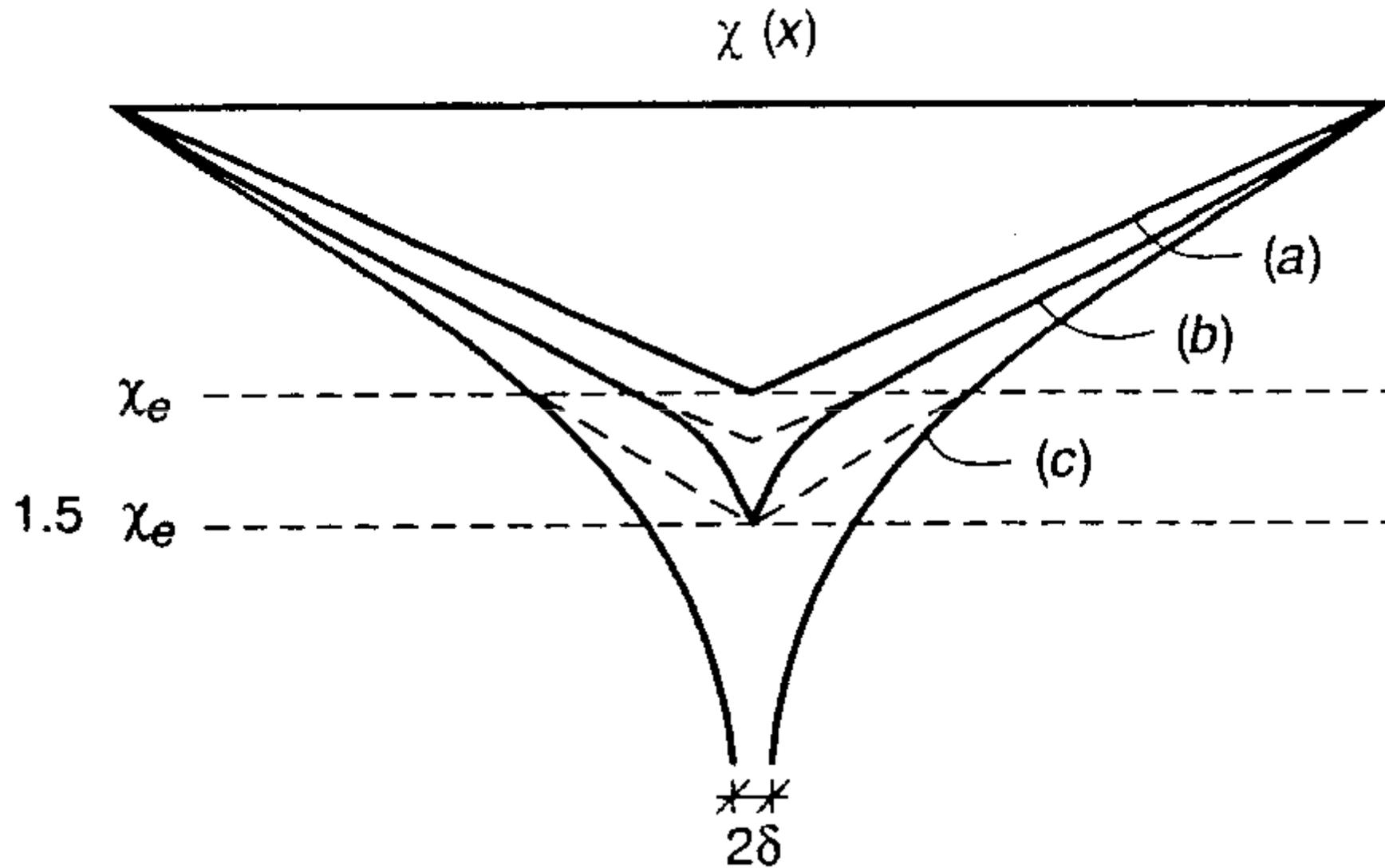
Leone Corradi, Vol II pag 62

# Cerniera plastica

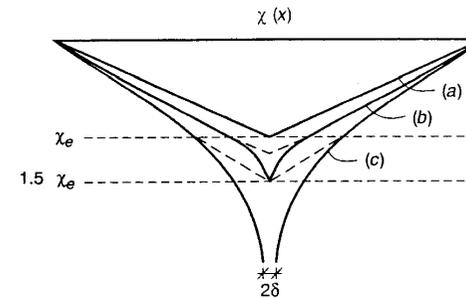
Nel caso di contemporanea presenza di momento flettente e azione assiale, il comportamento della sezione può in linea di principio essere studiato in modo analogo, anche se l'analisi è più complicata. Peraltro, membrature inflesse risultano in genere soggette ad azioni assiali molto modeste, tali da non influire in modo determinante sul diagramma momento-curvatura, specie nel caso di sezioni doppiamente simmetriche.

La valutazione degli effetti di concomitanti azioni taglianti non può invece essere affrontata sulla base del modello cinematico puramente flessionale sin qui considerato, ma richiederebbe l'introduzione esplicita delle corrispondenti deformazioni generalizzate  $\epsilon$ .

# Cerniera plastica



# Cerniera plastica

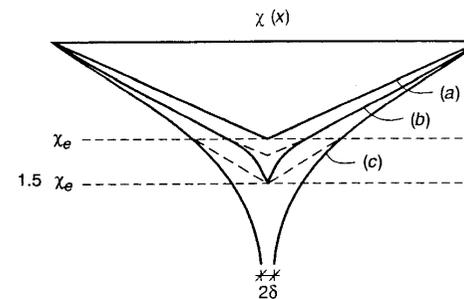


L'ampiezza dell'intervallo in cui le curvature si discostano dall'andamento triangolare elastico è anche notevole (pari a  $\ell/3$  per  $P = P_L$ ). Tuttavia il tratto in cui si riscontrano scostamenti significativi è drasticamente più limitato: curvature più che doppie rispetto a  $M/EI$  richiedono  $M > .96M_0$  (Tabella 13.1), valore che si riscontra solo in prossimità del collasso e comunque solo in una piccola porzione di trave attorno alla mezzaria. Ai fini della rappresentazione del suo comportamento globale, appare quindi lecito supporre la trave ovunque elastica tranne che, nella situazione limite  $M_{\max} = M_0$ , in un piccolo tratto di ampiezza  $2\delta$  attorno alla mezzaria (Figura 13.9). La quantità

$$\varphi = \int_{\ell/2 - \delta}^{\ell/2 + \delta} \chi dx \quad (13.17)$$

può essere interpretata come una rotazione relativa tra due tratti di trave che si mantengono elastici: per  $M = M_0$ , il mutuo incastro tra i due tratti viene sostituito da una cerniera. Questa osservazione è alla base dell'idealizzazione del comportamento flessionale nota come *cerniera plastica*. In luogo del diagramma di Figura 13.7, si ricorre a quello illustrato in Figura 13.10: esso prevede  $M = EI\chi$  per  $|M| < M_0$ , mentre per  $|M| = M_0$  il legame momento-curvatura viene sostituito da un legame momento-rotazione.

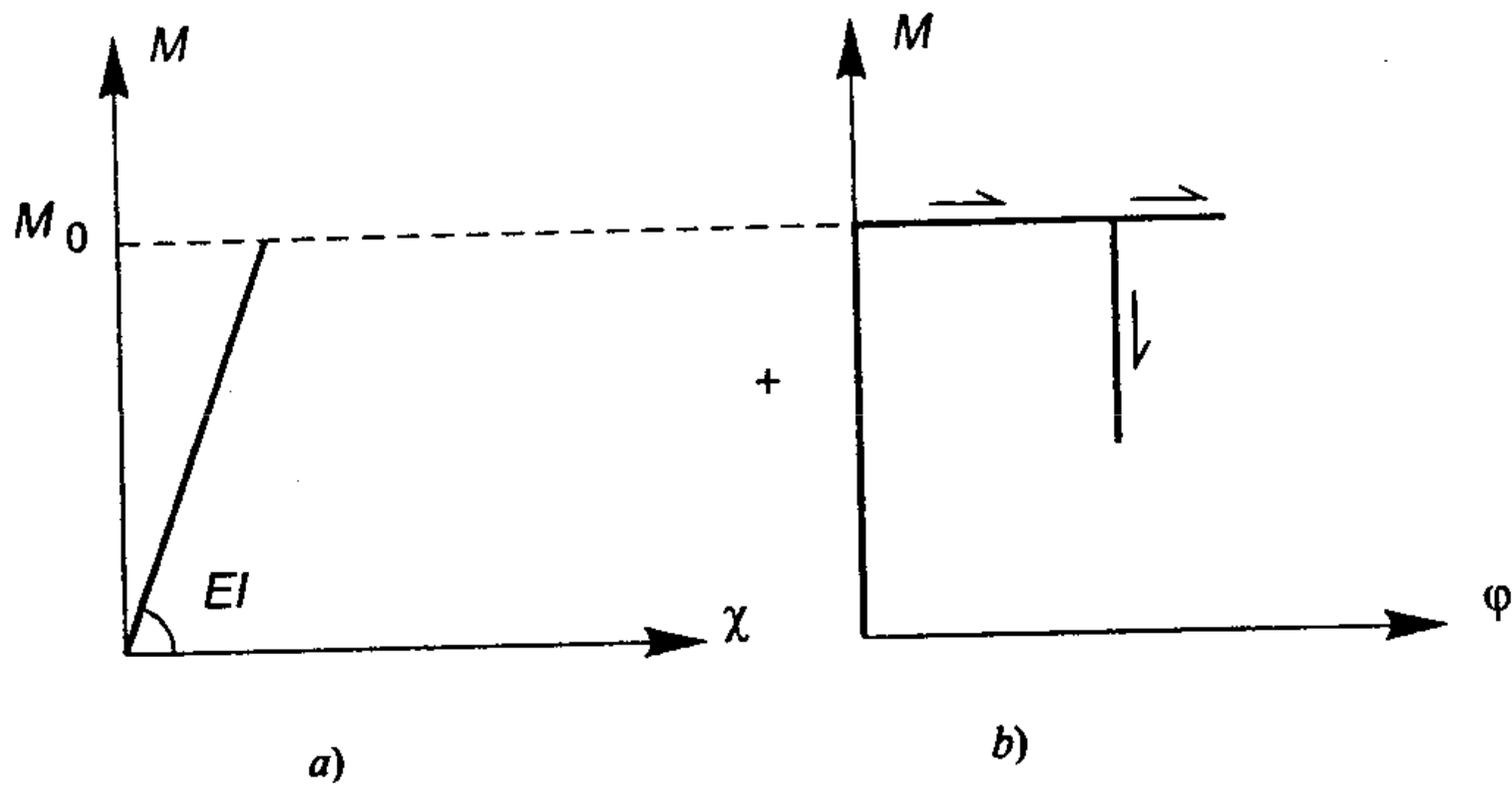
# Cerniera plastica



Rispetto a una cerniera strutturale, la cerniera plastica presenta due differenze. Innanzi tutto, pur consentendo rotazioni relative tra i due tratti che congiunge, essa trasmette un momento flettente costante, pari a  $\pm M_0$ ; essa è inoltre una cerniera *unidirezionale*, che può ruotare solo nel verso di plasticizzazione, vale a dire compatibilmente con il segno del momento flettente. Il confronto con la Figura 13.3b mostra che il diagramma di Figura 13.10b rappresenta un comportamento rigido-idealmente plastico, di cui incorpora l'irreversibilità.

Il modello a cerniera plastica descrive il comportamento flessionale della sezione in termini della sola rigidità elastica  $EI$  (Figura 13.10a) e del suo momento limite  $M_0$  (Figura 13.10b), senza che sia necessario definire la curva momento-curvatura. Questa non è solamente una semplificazione, ma permette anche di caratterizzare il comportamento per mezzo delle sole quantità veramente attendibili. Proprio con riferimento alla sezione rettangolare, si è visto infatti nel Capitolo 7 che la curva momento-curvatura

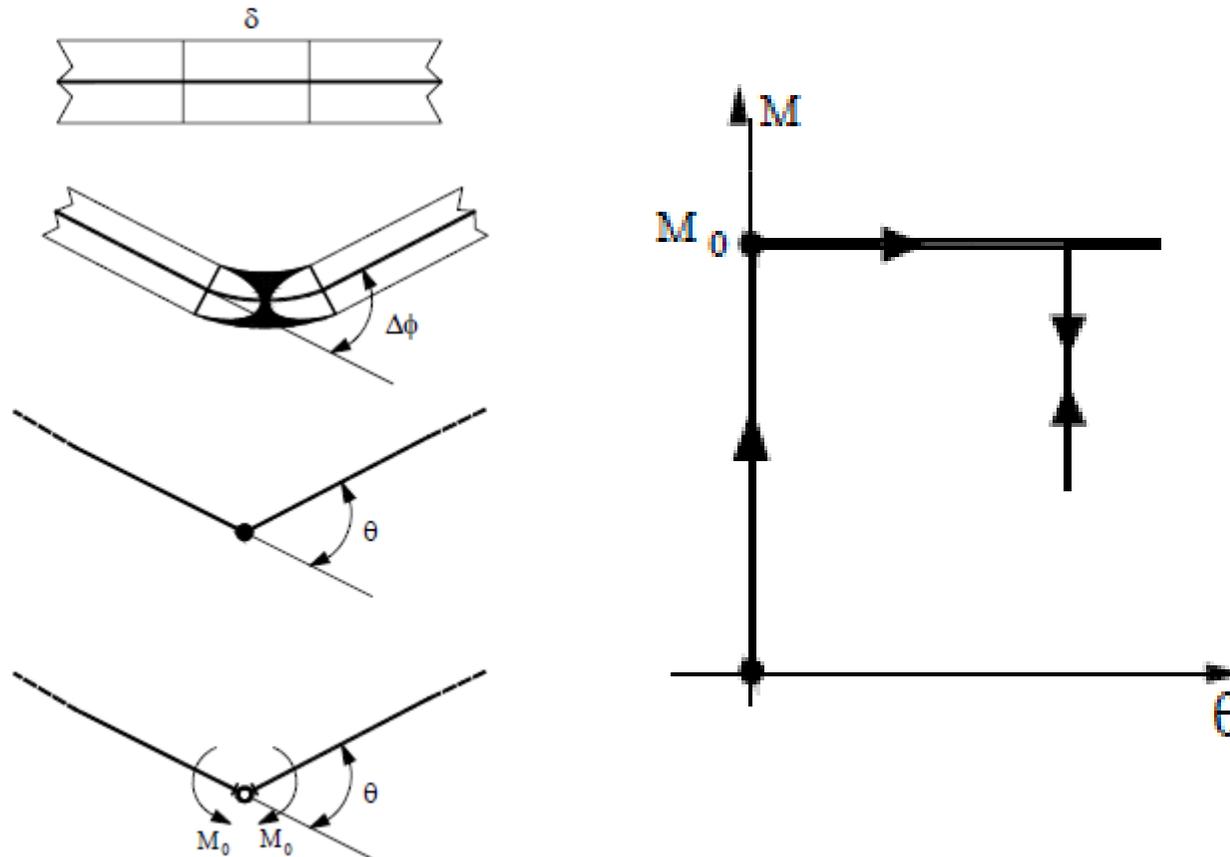
# Cerniera plastica



# Cerniera plastica

L'effetto della curvatura plastica su una porzione limitata  $\delta$  della trave viene messo in conto attraverso un dispositivo chiamato cerniera plastica

In corrispondenza della cerniera plastica si ammette una rotazione relativa regolata dalla legge  $M-\theta$  di un modello rigido plastico

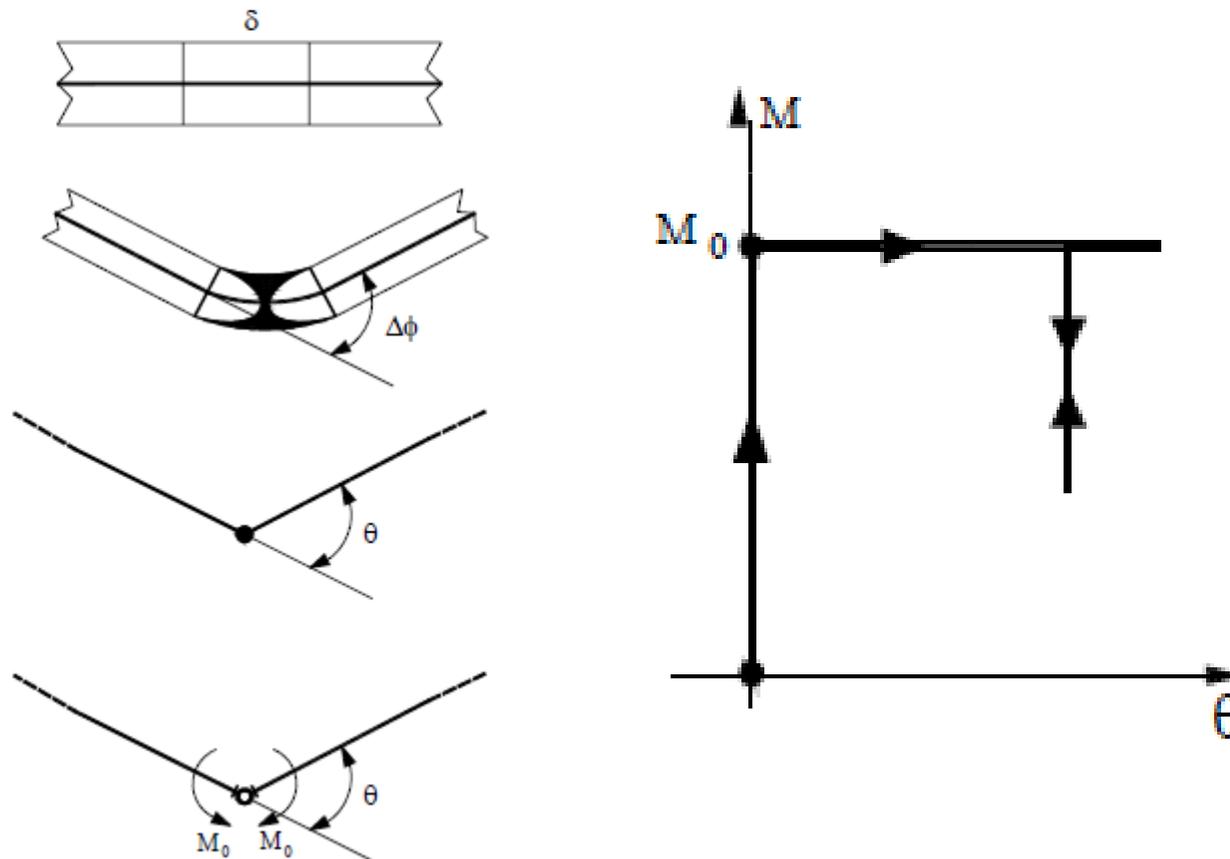


# Cerniera plastica

Le coppie  $M_0$  hanno verso opposto rispetto alla rotazione relativa

La dissipazione in una cerniera plastica si scrive come

$$D = M_0 |\dot{\theta}|$$



# Analisi Incrementale di travi e telai Elasto Plastici Perfetti

- Legame Momento curvatura  $M = E_j \chi$
- Rigidezza infinita nei confronti dello sforzo normale e del taglio
- Attivazione di una cerniera rigido plastica
- Funzione di snervamento  $\phi = |M| - M_0 \leq 0$
- Leggi di flusso

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial M} \dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

# Travi isostatiche

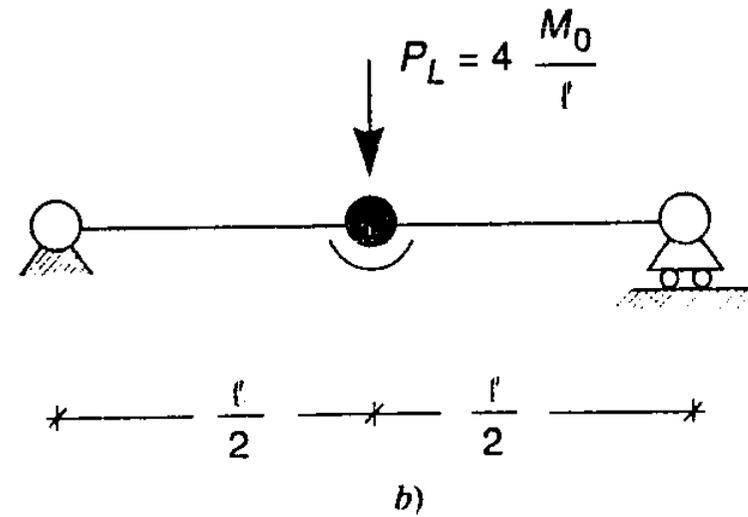
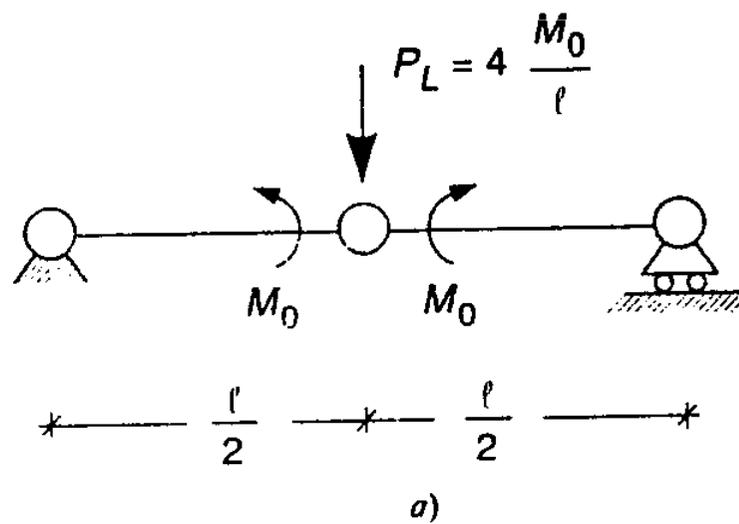
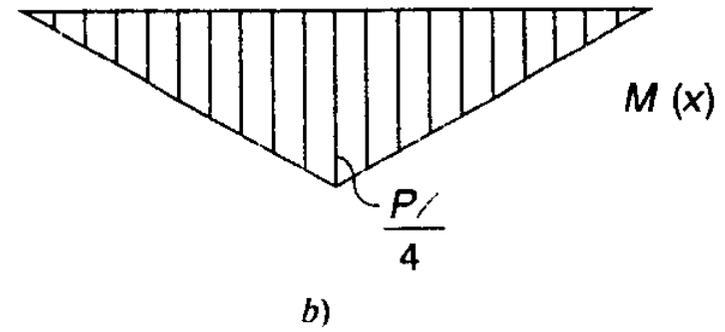
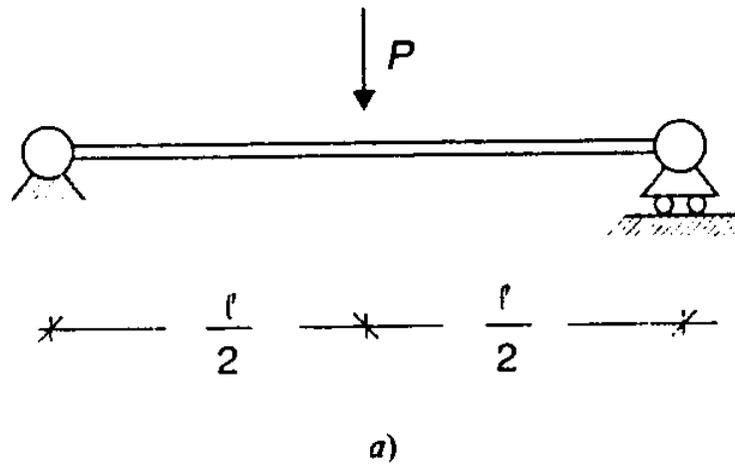


Figura 13.17

# Travi isostatiche

In questo esempio,  $P_L = 4M_0/\ell$  è il *carico di collasso* della struttura in quanto, come già osservato, per valori più elevati l'equilibrio richiederebbe un momento in mezzaria maggiore di  $M_0$ , incompatibile con il comportamento di Figura 13.10b. Il raggiungimento della situazione limite è anche evidenziato dalla labilità della struttura in Figura 13.17a, che consente un atto di moto rigido (*meccanismo di collasso*); i momenti  $M_0$  nella cerniera permettono di equilibrare  $P_L$ , ma non carichi superiori.

Questo comportamento è comune a tutti i sistemi di travi isostatici, i cui momenti flettenti sono univocamente determinati dall'equilibrio. Il collasso corrisponde allora al raggiungimento del momento limite in una sezione, con conseguente formazione di una cerniera plastica che trasforma la struttura in un meccanismo: una struttura isostatica non ha altre risorse plastiche che quelle delle sezioni delle travi di cui è costituita. Una struttura iperstatica invece, quando il momento flettente raggiunge per la prima volta il valore limite in una sezione e si forma una cerniera plastica, può ancora sostenere incrementi di carico ridistribuendo i momenti. Si attivano successivamente ulteriori cerniere plastiche e il collasso si verifica solo quando queste vengono a formare un meccanismo.

# Travi isostatiche

Le fasi dell'evoluzione vengono ora illustrate da alcuni esempi. Le travi sono soggette a *carichi base*, amplificati da un *moltiplicatore*  $\mu$  di cui si vuole determinare il valore che porta la struttura a collasso. Negli esempi, ai carichi base verranno attribuiti valori di comodo; se però essi corrispondono a una condizione realistica, il moltiplicatore di collasso assume il significato di *coefficiente di sicurezza* della struttura nei confronti della crisi. Esso verrà indicato con  $s$ .

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

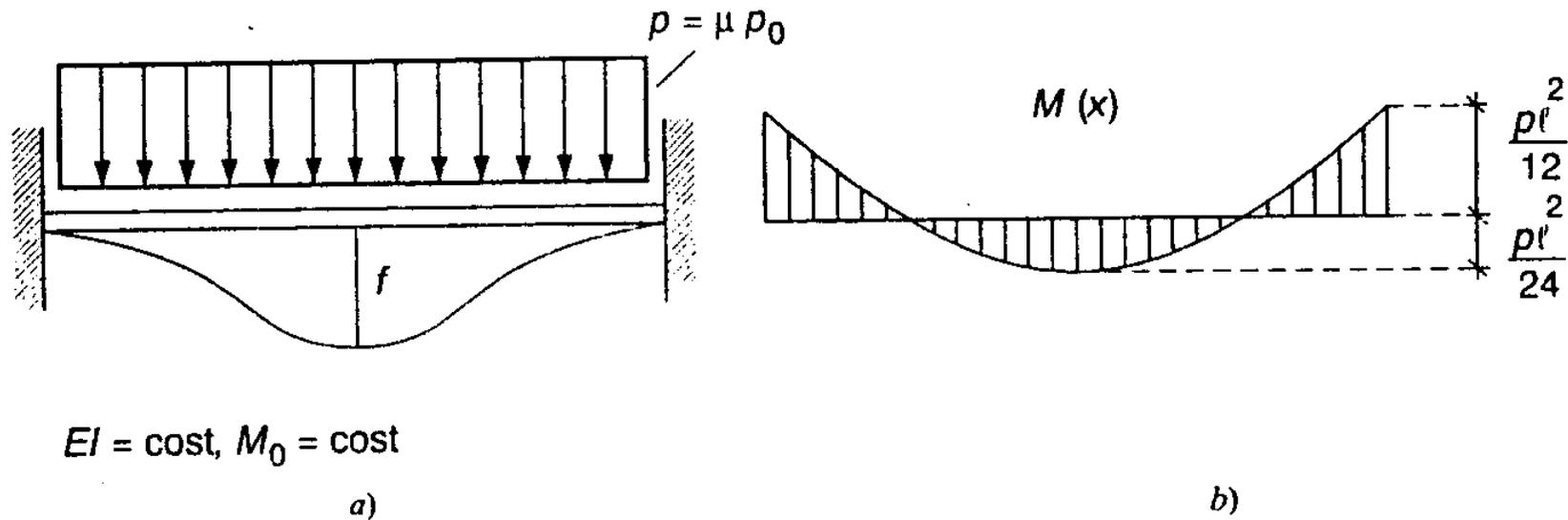


Figura 13.18

**ESEMPIO 13.4** Si analizza la risposta della trave a sezione costante in Figura 13.18a al crescere dell'intensità del carico trasversale, il cui valore base è assunto pari a  $\rho_0 = M_0/l^2$ . In campo elastico, il diagramma dei momenti è quello illustrato in Figura 13.18b; i valori di picco si riscontrano negli incastri, dove risulta

$$M_{\text{inc}} = -\frac{\rho l^2}{12} = -\mu \frac{\rho_0 l^2}{12} = -\mu \frac{M_0}{12} \quad (d1)$$

Sempre in campo elastico, lo spostamento in mezzaria vale

$$f = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384} \frac{\rho l^4}{EI} = \frac{\mu}{384} \frac{M_0 l^2}{EI} \quad (d2)$$

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

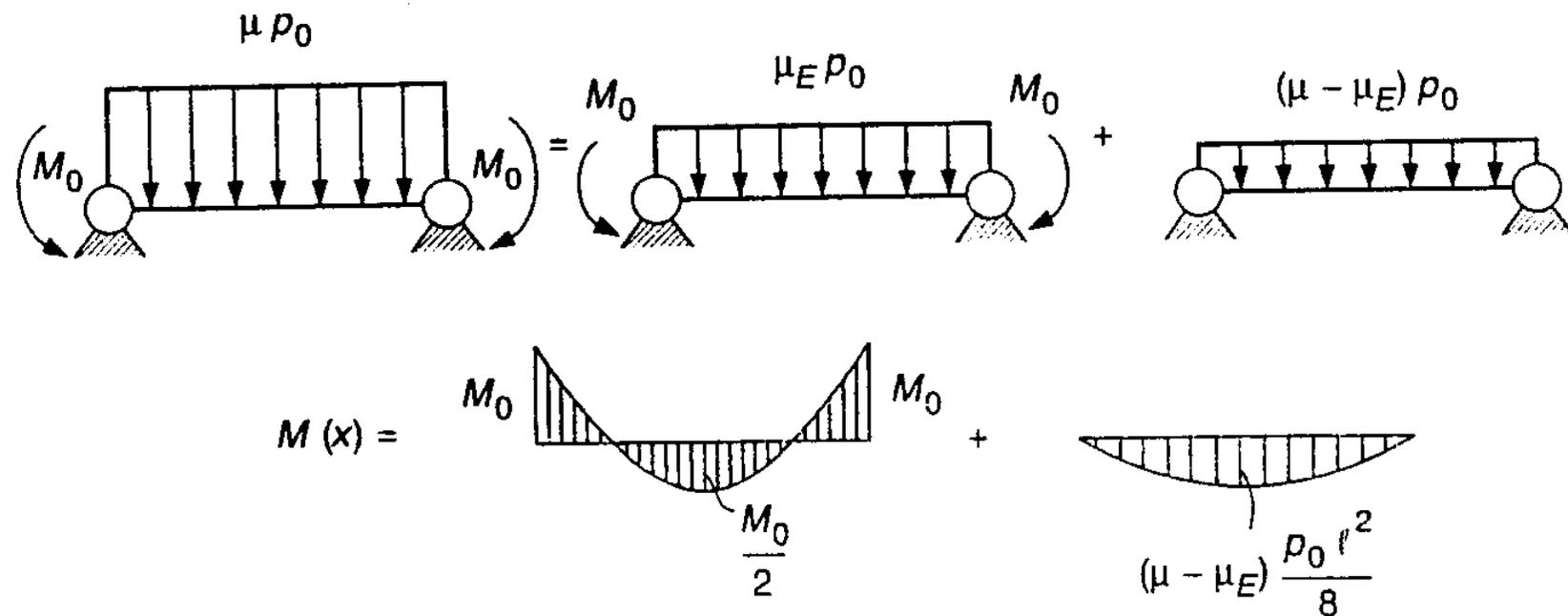


Figura 13.19

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

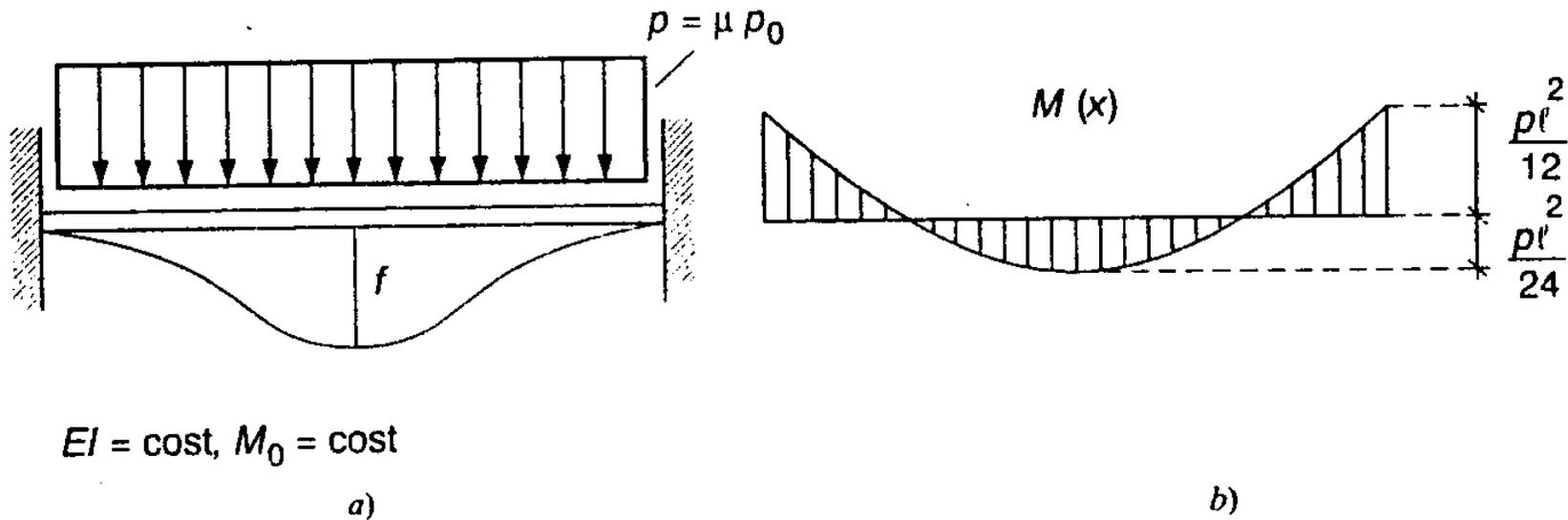


Figura 13.18

Per l'ipotesi di cerniera plastica, la trave si mantiene elastica fino al raggiungimento del momento limite nella sezione più sollecitata, nel caso in esame contemporanea nei due incastri. Imponendo  $M_{\text{inc}} = -M_0$ , dalla (d1) si ottiene per il *moltiplicatore al limite elastico*  $\mu_E$  il valore

$$\mu_E = 12 \quad \left( \rho_E = 12 \frac{M_0}{l^2} \right) \quad (\text{e1})$$

cui corrisponde la freccia

$$f_E = \frac{M_0 l^2}{32EI} \quad (\text{e2})$$

## Analisi incrementale di travi e telai EPP

$$M(x) = \begin{array}{c} M_0 \\ \text{[Diagram: Moment diagram for a beam with fixed ends and a central point load. The moment is zero at the center and reaches } M_0 \text{ at the ends. The area under the curve is shaded with vertical lines.]} \\ M_0 \\ \frac{M_0}{2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{[Diagram: Moment diagram for a beam with fixed ends and a uniformly distributed load. The moment is zero at the center and reaches a maximum at the ends. The area under the curve is shaded with vertical lines.]} \\ (\mu - \mu_E) \frac{p_0 \ell^2}{8} \end{array}$$

A questo punto le sezioni di incastro rifiutano incrementi di momento. Esse però consentono rotazioni a momento costante e quindi una redistribuzione delle azioni interne. La situazione relativa a  $\mu > \mu_E$  è visualizzata in Figura 13.19. Il carico può essere incrementato fino a che non viene raggiunto il momento limite in un'altra sezione, nella fattispecie in mezzaria. Ciò avviene per il valore  $s$  del moltiplicatore definito dalla condizione

$$M_0 = M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{M_0}{2} + (s - \mu_E) \frac{p_0 \ell^2}{8} = \frac{M_0}{2} + (s - 12) \frac{M_0}{8}$$

da cui si ottiene

$$s = 16 \quad \left( p_L = 16 \frac{M_0}{\ell^2} \right) \quad (f1)$$

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

$$M(x) = \begin{array}{c} M_0 \\ \text{[Diagram of a beam with triangular moment distribution: } M_0 \text{ at ends, } \frac{M_0}{2} \text{ at center]} \\ \frac{M_0}{2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{[Diagram of a beam with parabolic moment distribution]} \\ (\mu - \mu_E) \frac{\rho_0 l^2}{8} \end{array}$$

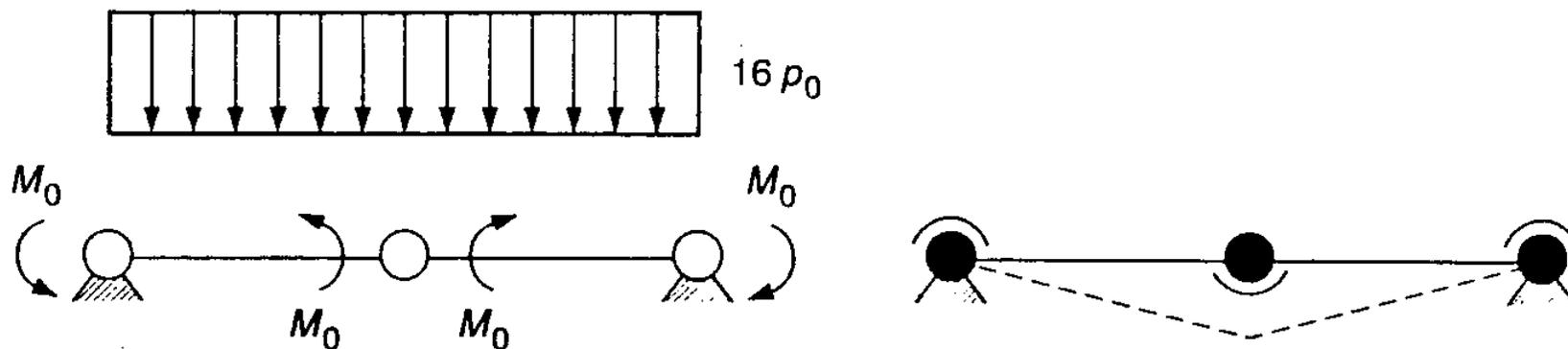


Figura 13.20

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

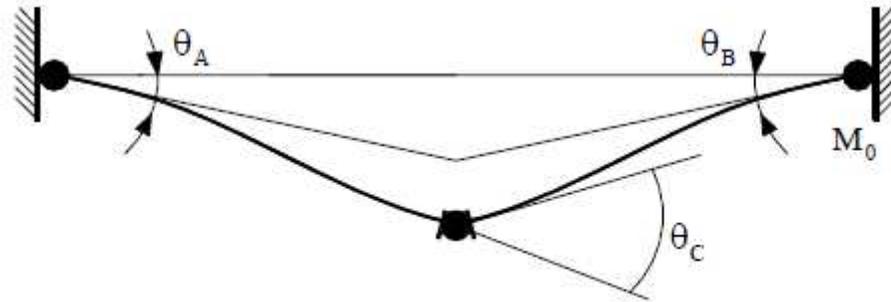


Fig.1.56

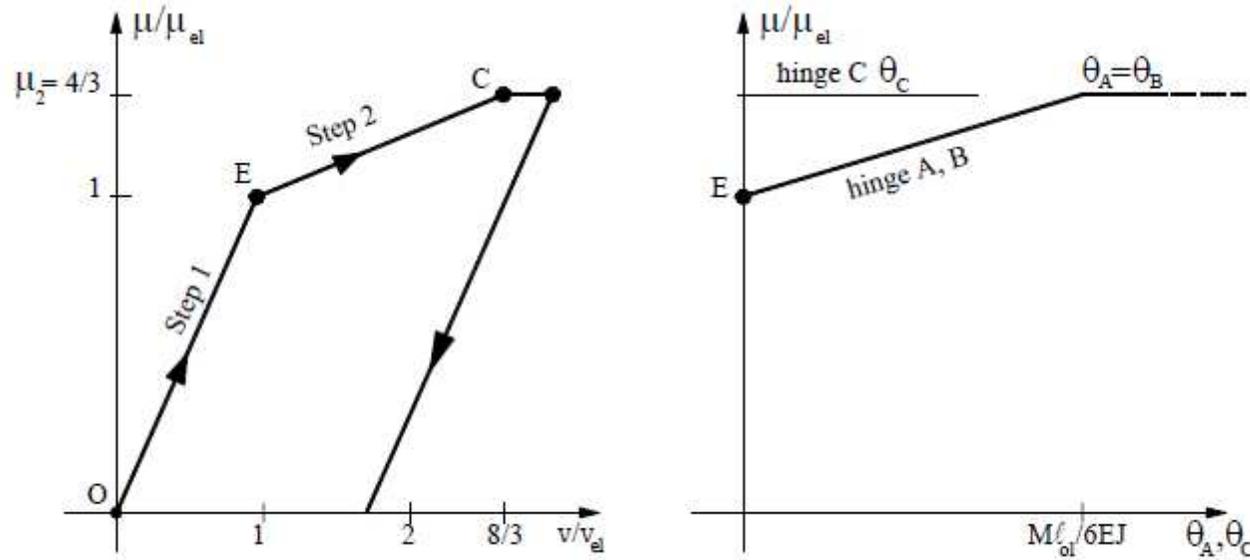


Fig.1.55

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

- Step.4: Elastic unloading.

Imposed distortions

$\theta_A, \theta_B, \theta_C$

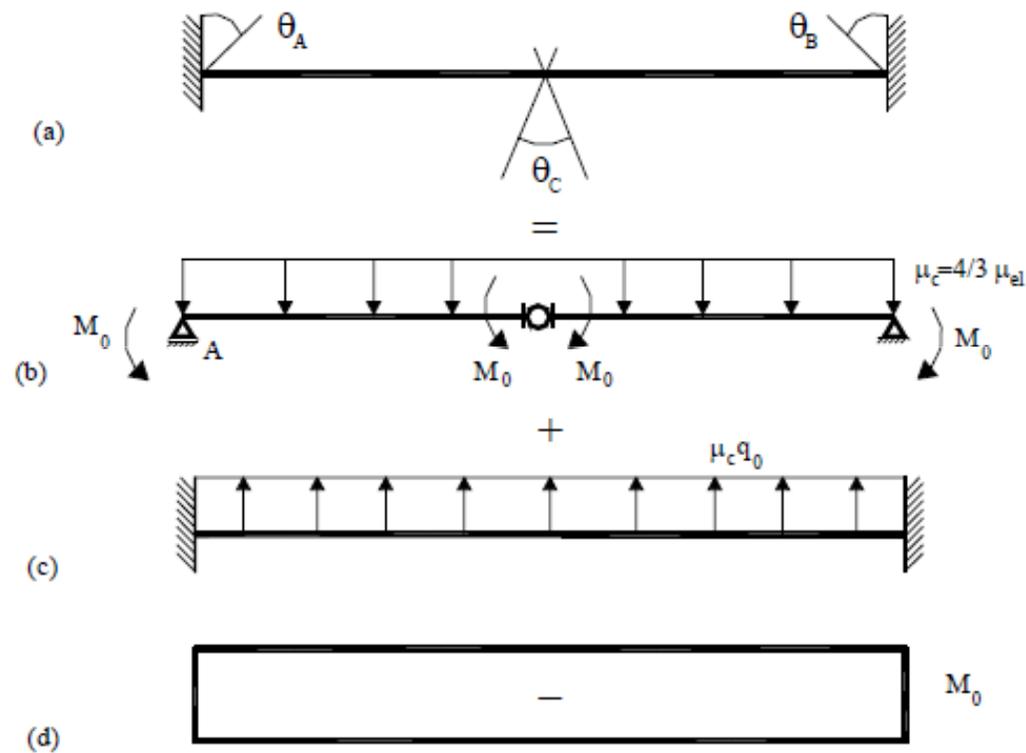


Fig.1.57

Diagram of bending moment after unloading.

## Analisi incrementale di travi e telai EPP

L'incremento di freccia può essere calcolato elasticamente, considerando la risposta della trave doppiamente incernierata sotto il carico  $(s - \mu_E)p_0$ . Risulta

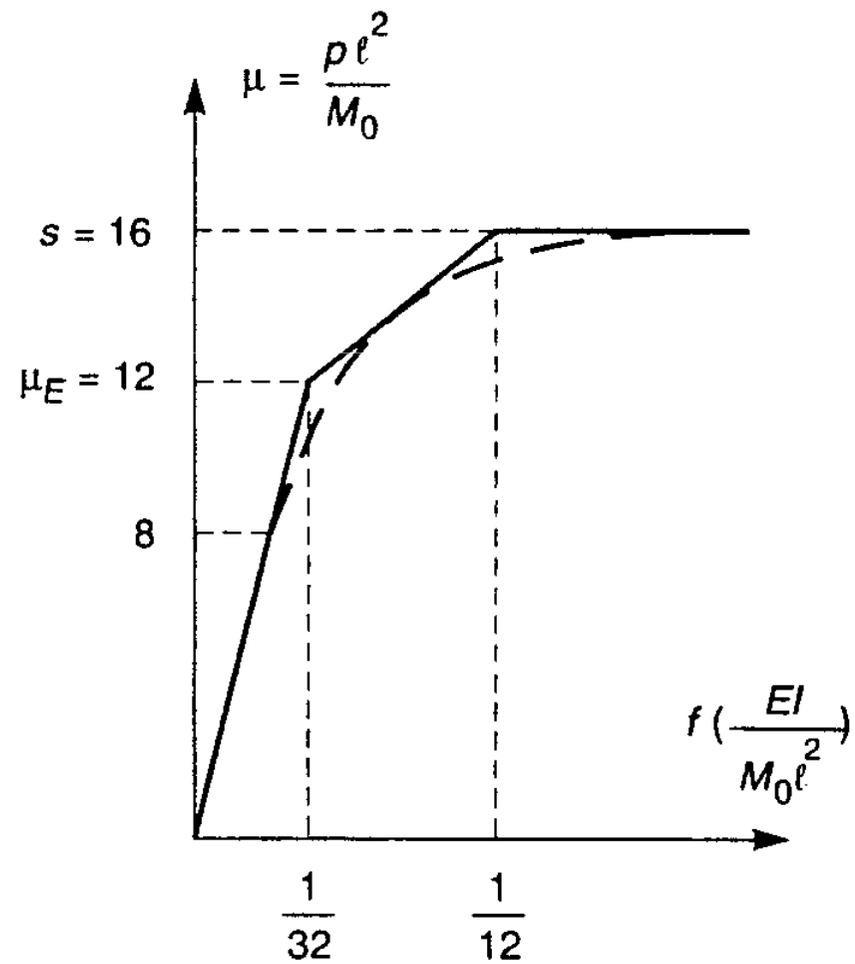
$$f_L - f_E = \frac{5}{384} (s - \mu_E) \frac{p_0 \ell^4}{EI}$$

e quindi, ricordando le (e) e la (f1)

$$f_L = \frac{1}{12} \frac{M_0 \ell^2}{EI} \quad (f2)$$

Il moltiplicatore è stato indicato con  $s$  perché si è formato il meccanismo costituito dalle tre cerniere allineate in Figura 13.20, che permette un atto di moto. I momenti limite nelle cerniere consentono alla trave di equilibrare nella sua configurazione indeformata il carico  $sp_0$ , ma non carichi più elevati.  $s$  rappresenta pertanto il *moltiplicatore di collasso* della struttura. I valori che le diverse quantità assumono nella situazione di collasso incipiente sono contraddistinti dall'indice ( )<sub>L</sub>.

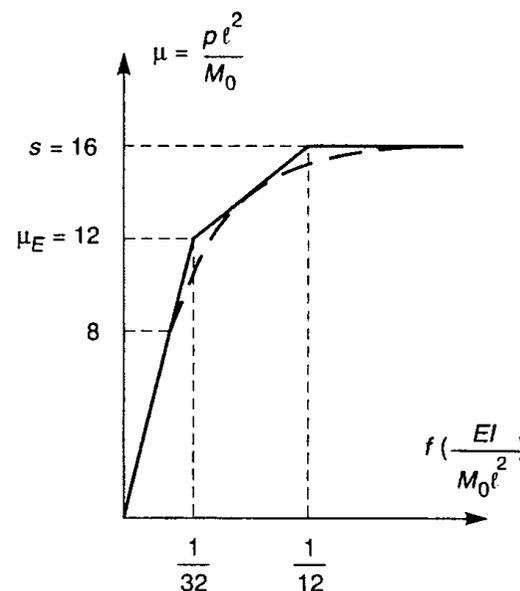
# Analisi incrementale di travi e telai EPP



## Analisi incrementale di travi e telai EPP

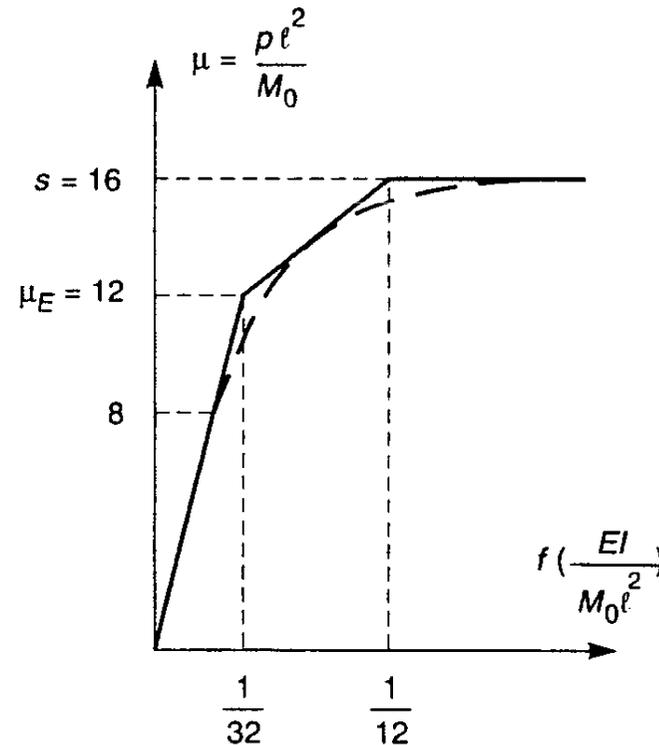
La risposta della trave è sintetizzata dalla spezzata a tratto pieno in Figura 13.21. Rispetto al limite elastico, la capacità portante è aumentata del 33%. L'incremento è dovuto all'iperstaticità della struttura, che permette di ridistribuire i momenti nel ri-

spetto dell'equilibrio, possibilità che la duttilità del materiale consente effettivamente di sfruttare. Il pianerottolo per  $\mu = s$  indica che, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, al meccanismo sono associati incrementi di freccia di entità arbitraria sotto carico costante. La trave possiede in realtà ulteriori risorse, dovute alle azioni di membrana che si instaurano in fase post-collasso, che tuttavia solo per spostamenti non piccoli concorrono a equilibrare i carichi trasversali.

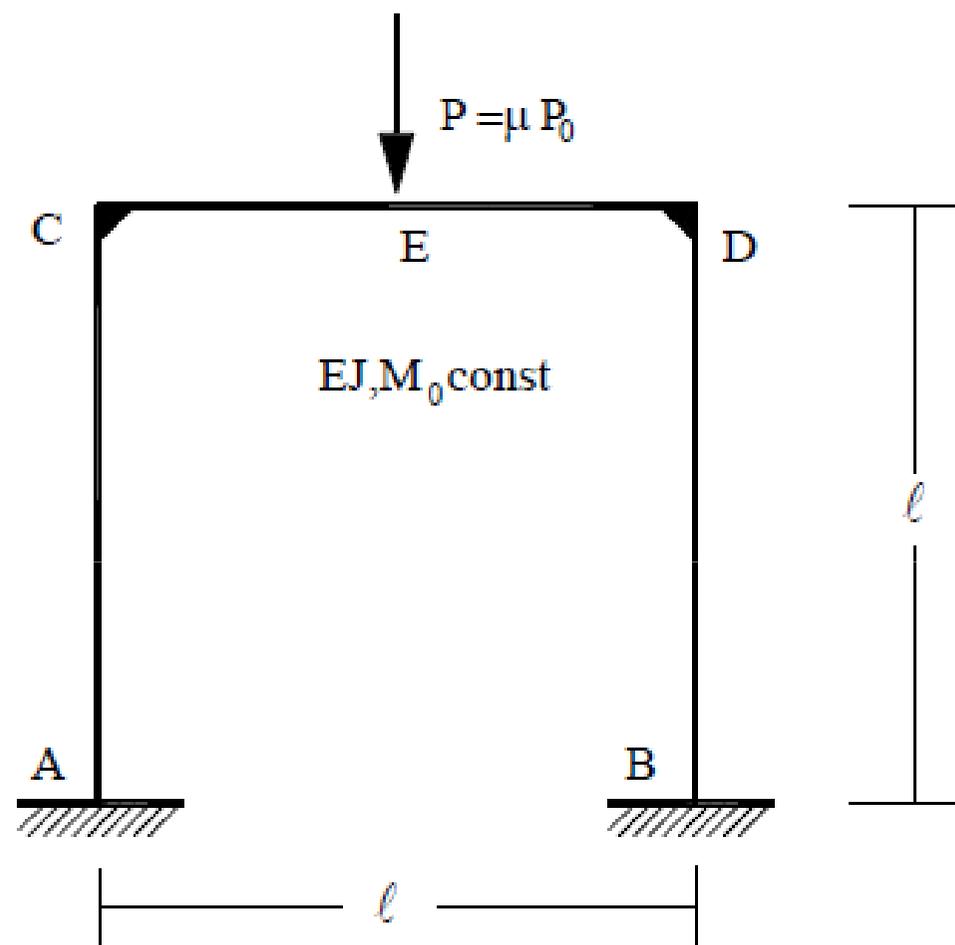


## Analisi incrementale di travi e telai EPP

Un'analisi che tenesse conto dell'effettivo diagramma momento-curvatura della sezione, porterebbe al risultato qualitativamente rappresentato dalla curva tratteggiata in Figura 13.21: il limite elastico si raggiungerebbe per  $M_{inc} = -M_e$  (nel caso di sezione rettangolare, per  $\mu = 8$ ); gli spostamenti anelastici risulterebbero maggiori, ma in modo significativo solo in prossimità del collasso; il valore di  $s$  resterebbe inalterato. Benché drastica, l'ipotesi di cerniera plastica è quindi adeguata a rappresentare le caratteristiche essenziali della risposta della trave.

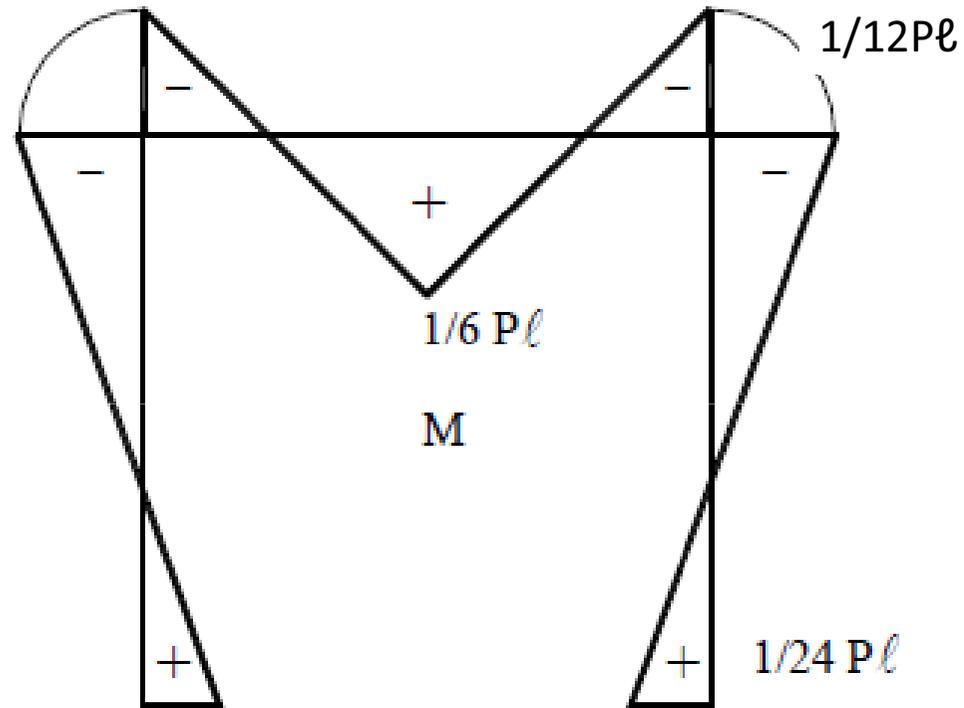


# Esempio: telaio 3 volte iperstatico



## 1- risposta elastica

$$0 \leq \mu \leq \mu_{el}$$



$$M_{el} = \frac{1}{6} P_{el} \ell = M_0$$

$$P_{el} = \mu_{el} P_0$$

$$\frac{1}{6} \mu_{el} P_0 \ell = M_0 \Rightarrow \mu_{el} = \frac{6M_0}{P_0 \ell}$$

## 2- cerniera plastica sezione E

$$\mu_{el} \leq \mu \leq \mu_2$$

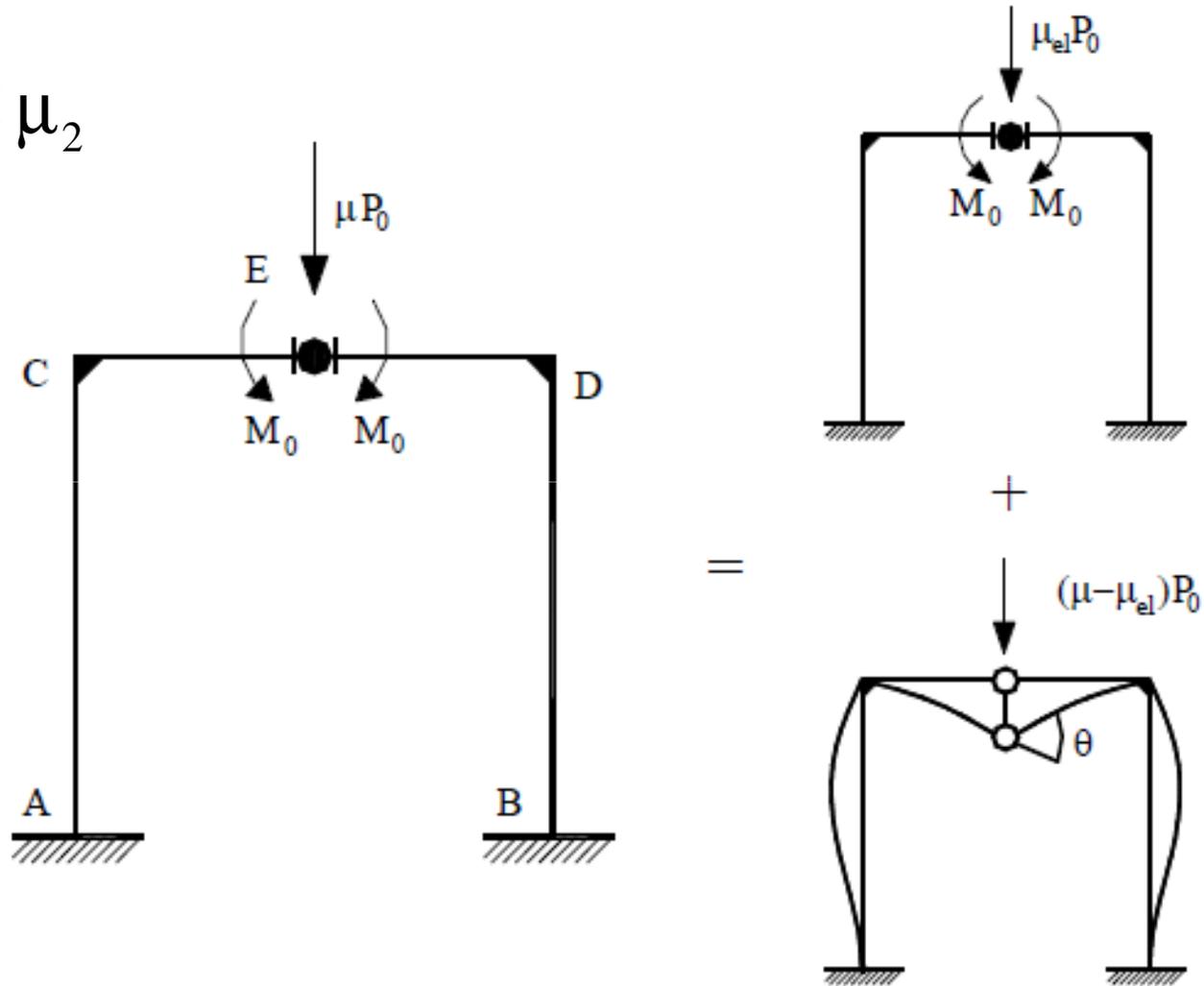


Fig.1.60

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

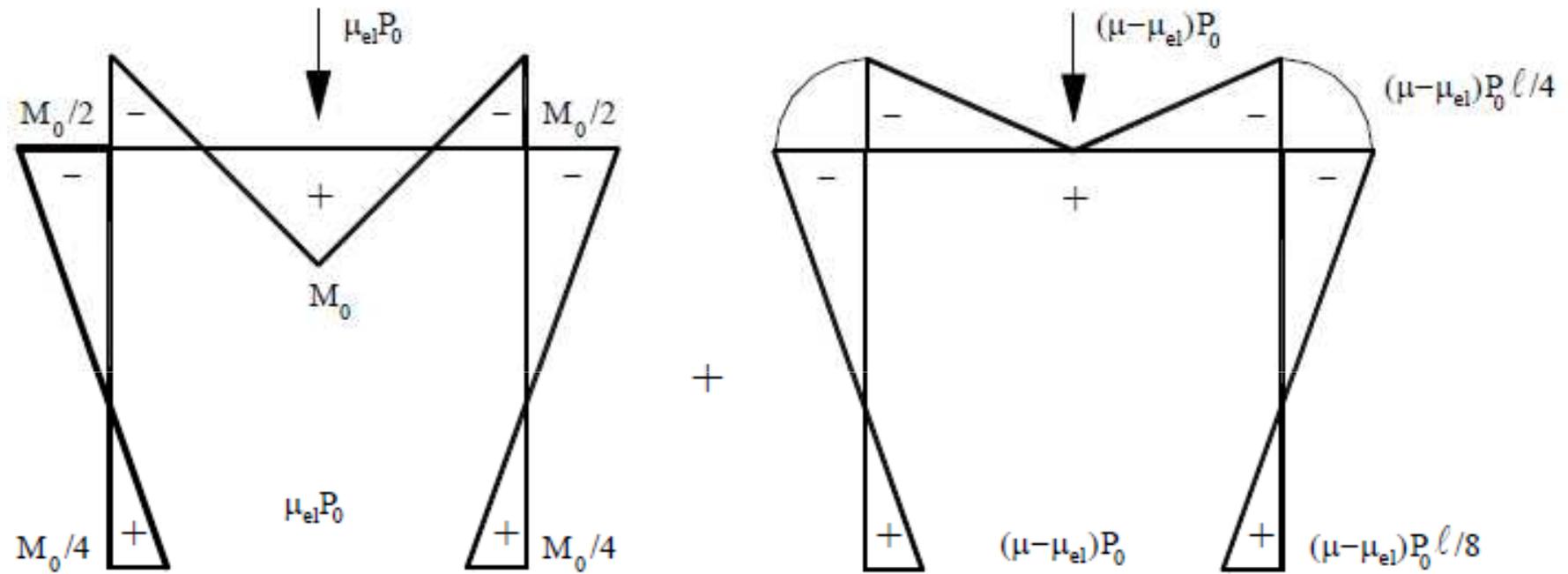


Fig.1.61

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

Tra tutti i moltiplicatori  $\mu$  prendiamo quello che verifica la condizione di plasticizzazione in C e D

$$M_C = -M_0 \Rightarrow -\frac{M_0}{2} - (\mu_2 - \mu_{el}) \frac{P_0 l}{4} = -M_0 \Rightarrow \mu_2 = \frac{8M_0}{P_0 l}$$

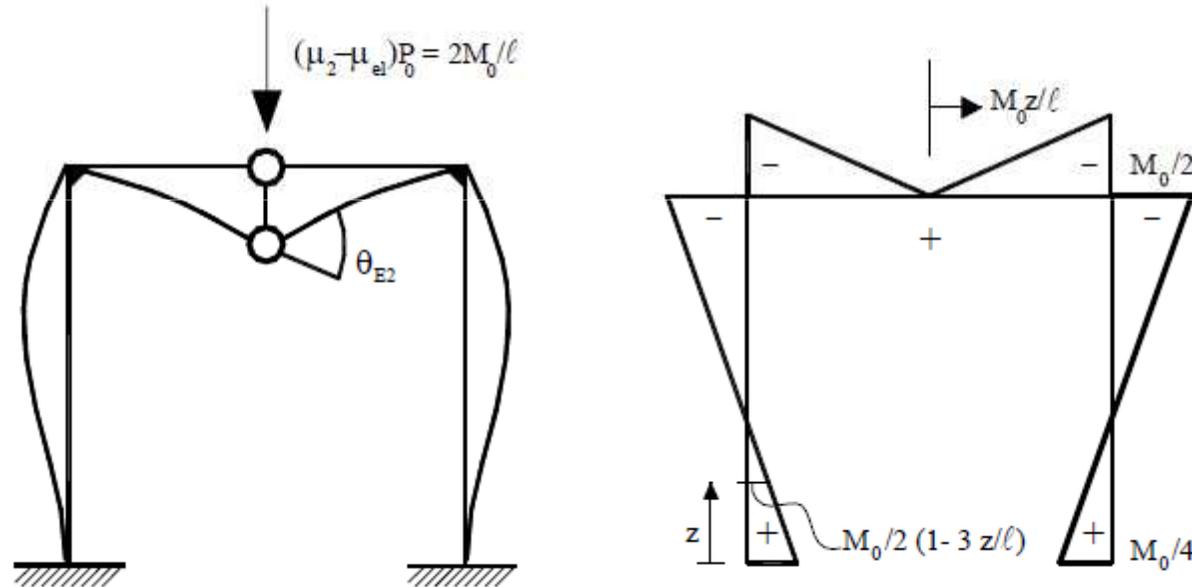
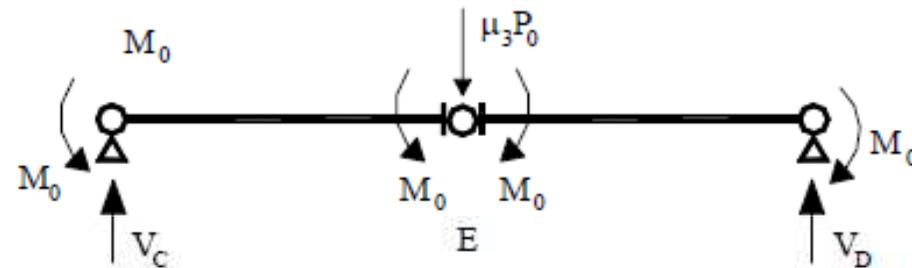
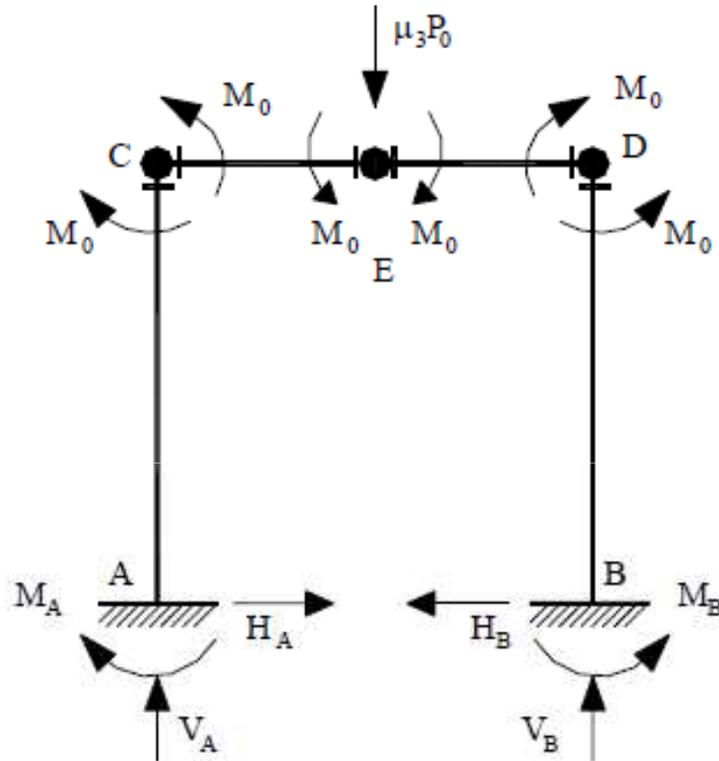


Fig.1.62

# Analisi incrementale di travi e telai EPP

3- cerniere plastiche nelle sezioni E,C,D, valutiamo il moltiplicatore di collasso  $\mu_3$



$$V_C = \mu_3 P_0 / 2 = 4M_0 / \ell \quad \text{quindi} \quad \mu_3 = 8M_0 / (P_0 \ell)$$

Con 3 cerniere plastiche si ha il collasso (meccanismo parziale) dato che la truttura è affetta da un cinematismo

## Analisi incrementale di travi e telai EPP

Inoltre, variazioni della rigidità elastica influenzano la risposta elasto-plastica ma non alterano il moltiplicatore di collasso  $\mu_c$

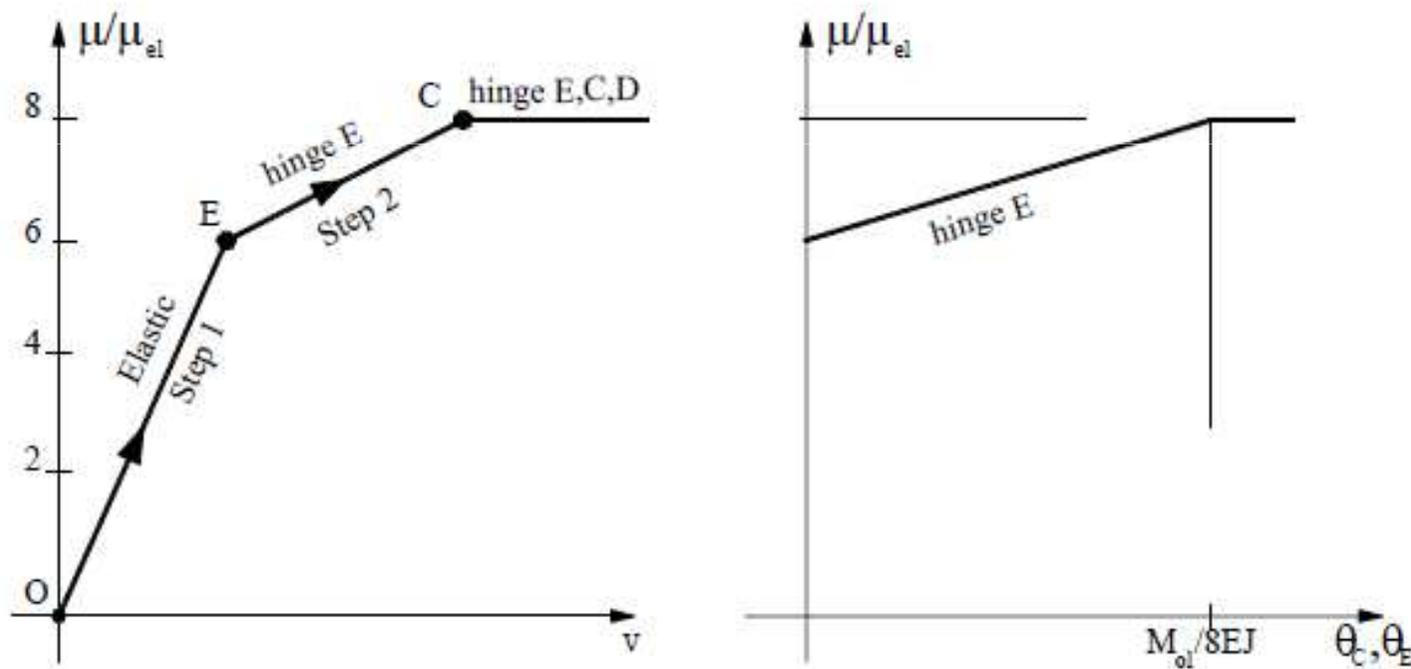


Fig.1.65