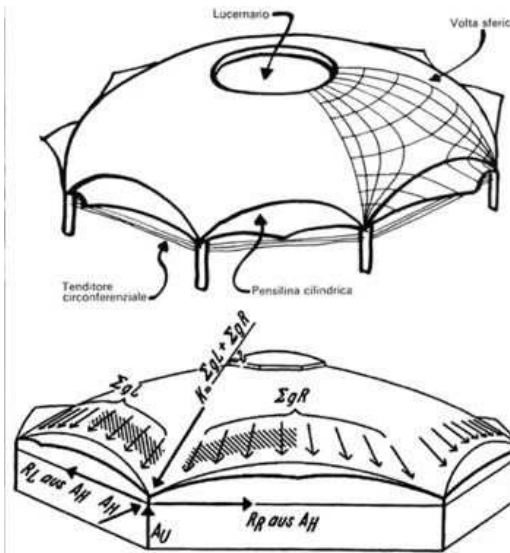
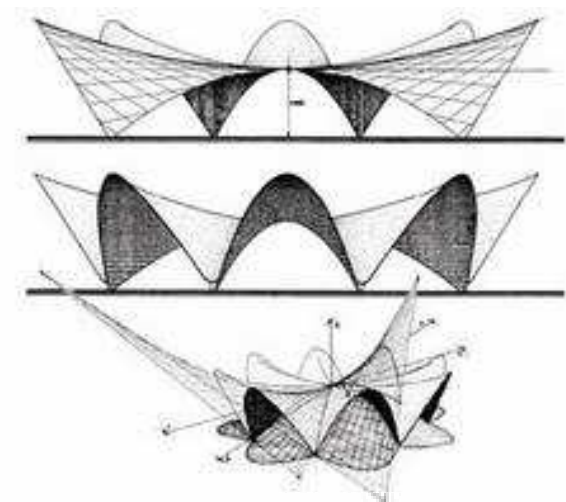
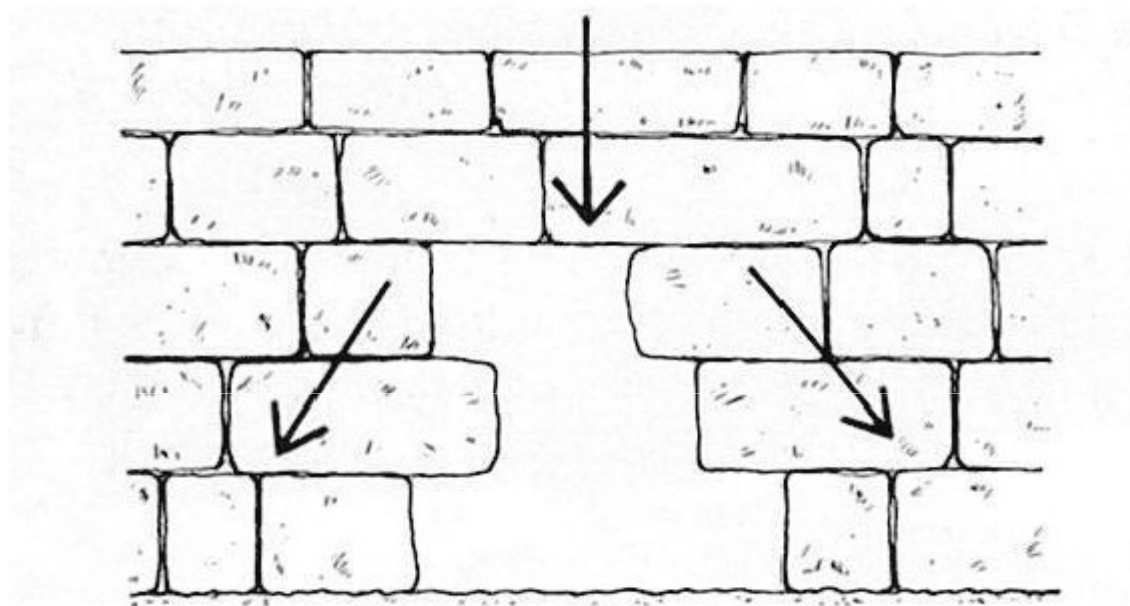


# Strutture resistenti per forma

Arco  
Fune  
Volta  
Cupola



# arco



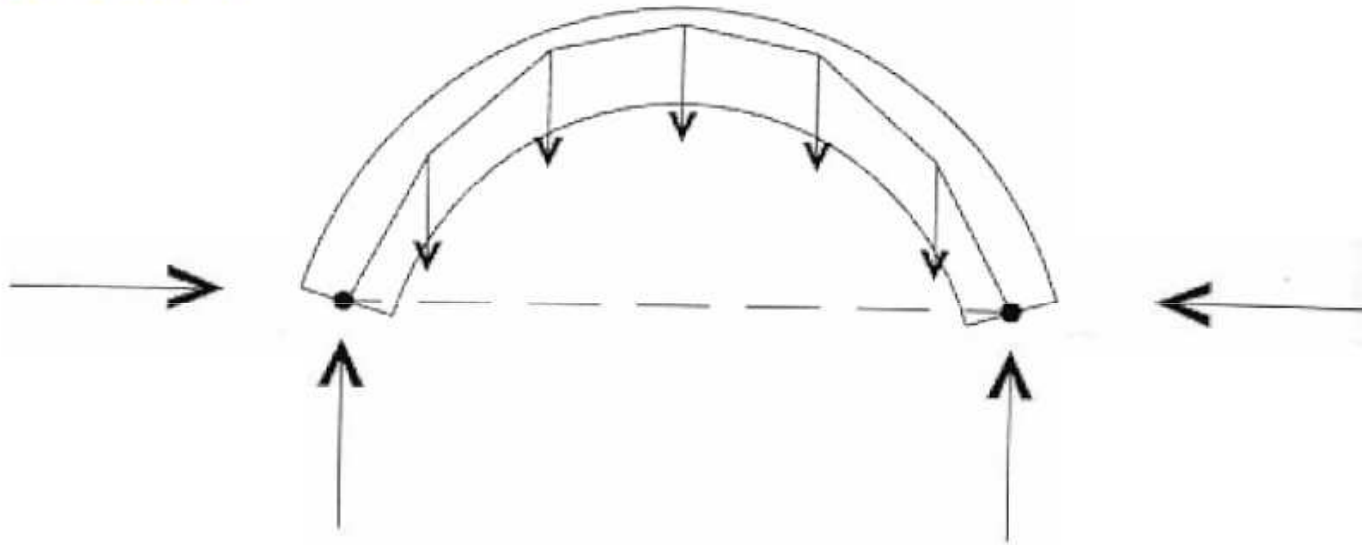
La sollecitazione di compressione rappresenta praticamente l'unica sollecitazione cui la pietra e la muratura sono in grado di resistere.

# arco

Curva di pressione o  
"funicolare"

Reazione  
verticale

Reazione  
orizzontale



8/75

**L'arco è un elemento strutturale in grado di incanalare, con la sua traiettoria curvilinea, le sollecitazioni prodotte dai carichi trasformandole in forze prevalenti di compressione.**

# funi

Cavi di trasmissione

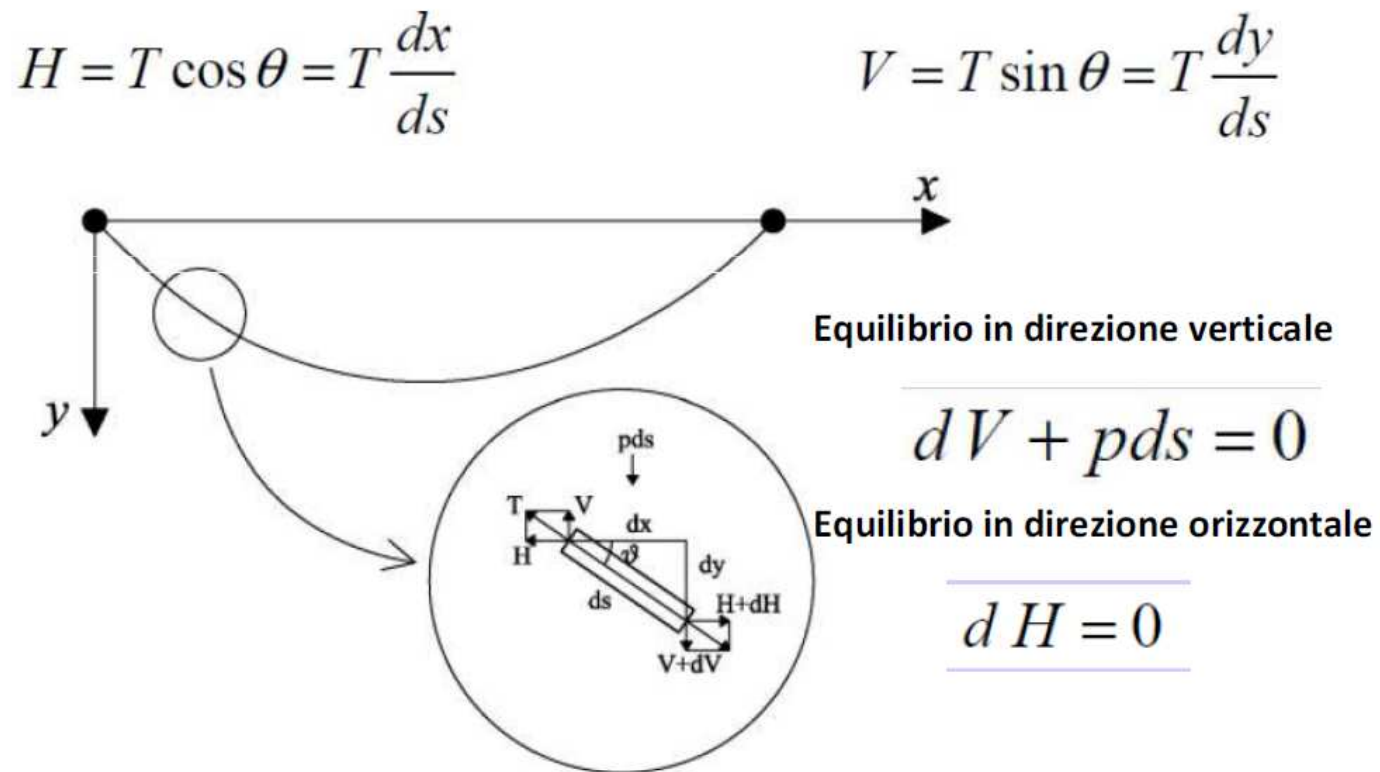


ponti sospesi



Strutture soggette solo a sforzo normale (trazione)

# funi



Strutture soggette solo a sforzo normale (trazione)

# Volte

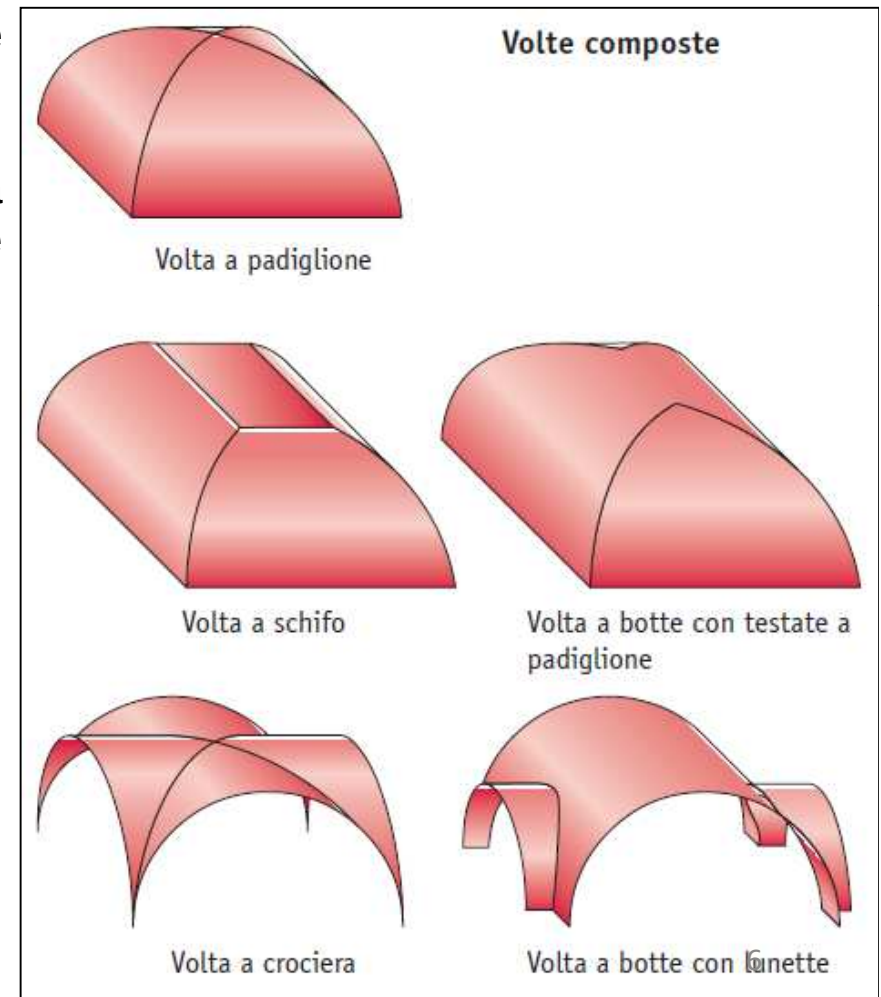
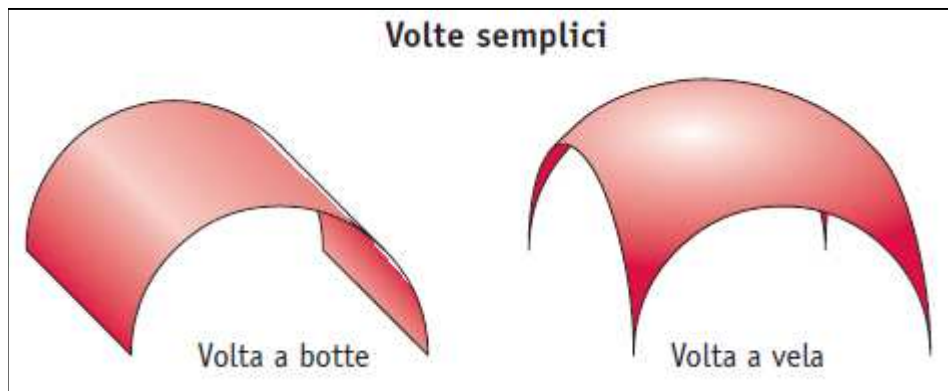
Le volte fiorirono in età romana come naturale derivazione dell'arco; mentre quest'ultimo era destinato a delimitare aperture nei muri, le volte consentivano la copertura degli ambienti.

Copyright © 2010 Zanichelli Editore SpA, Bologna  
[6237]

La loro realizzazione era basata sulla tecnica costruttiva delle murature in calcestruzzo, cioè mattoni o blocchi di pietra assemblati con un legante a base di calce.

La qualità del calcestruzzo era garanzia della solidità delle volte, che gradualmente conquistarono leggerezza e dimensioni sempre maggiori.

Le tipologie classiche sono distinte in *volte semplici* e *volte composte*.



# Volte, cupole...



Volte a botte nella Basilica di Massenzio a Roma (313 d.C.).

# Volte, cupole...



Volte a vela nel Palazzo della Ragione a Milano (1316).

# Volte



Volta a crociera nella basilica di S. Ambrogio a Milano (XI sec.).



Volta a botte con lunette nella Cappella Sistina a Roma (1480).



Volte con nervature nella Abbazia di Westminster a Londra (1512).

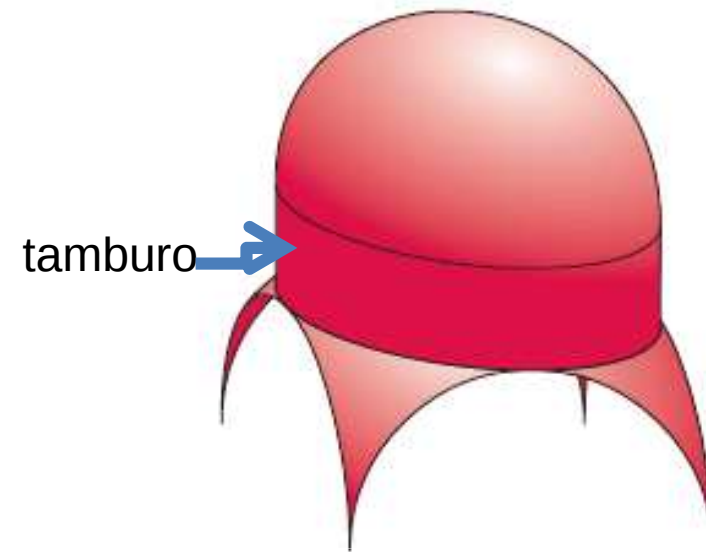
# Cupole

Le cupole sono in genere caratterizzate da una simmetria centrale o dalla rotazione di un profilo intorno a un asse verticale. L'esempio più semplice è costituito da una calotta semisferica.

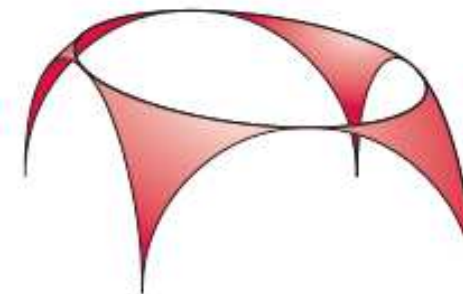
Spesso le cupole poggiano su un **tamburo** di forma prismatica o cilindrica, che poggia sulle strutture di base.

Il tamburo, oltre a dare maggiore visibilità e dignità a una cupola più alta, serve anche all'apertura di finestre che illuminano l'ambiente sottostante.

Per raccordare una base quadrata con un tamburo ottagonale vengono inseriti dei **pennacchi**, che possono avere forma sferica, conica oppure più complessa.



Cupola semisferica  
su tamburo cilindrico  
poggianti su pennacchi sferici

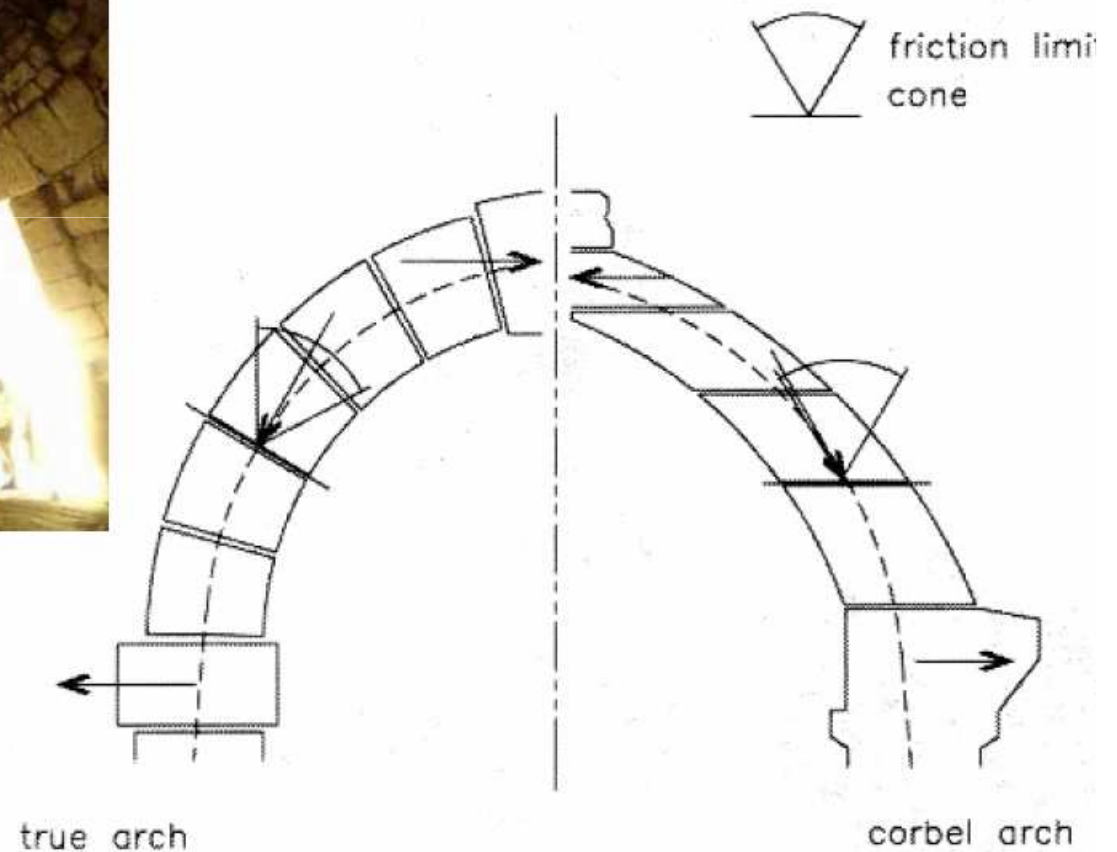


Pennacchi sferici  
originati dalla  
sezione di una volta a vela

# Cupole

La prima cupola della storia:

La stanza del tesoro a Micene (XIV s. a.C.)



# Cupole...

Sulla sommità (cervello) della cupola si apre molto spesso una *lanterna*, che fornisce un punto d'illuminazione centrale e crea un elemento decorativo terminale alla superficie esterna. Altri punti d'illuminazione possono essere inseriti nella stessa superficie della cupola mediante aperture denominate *occhi*.

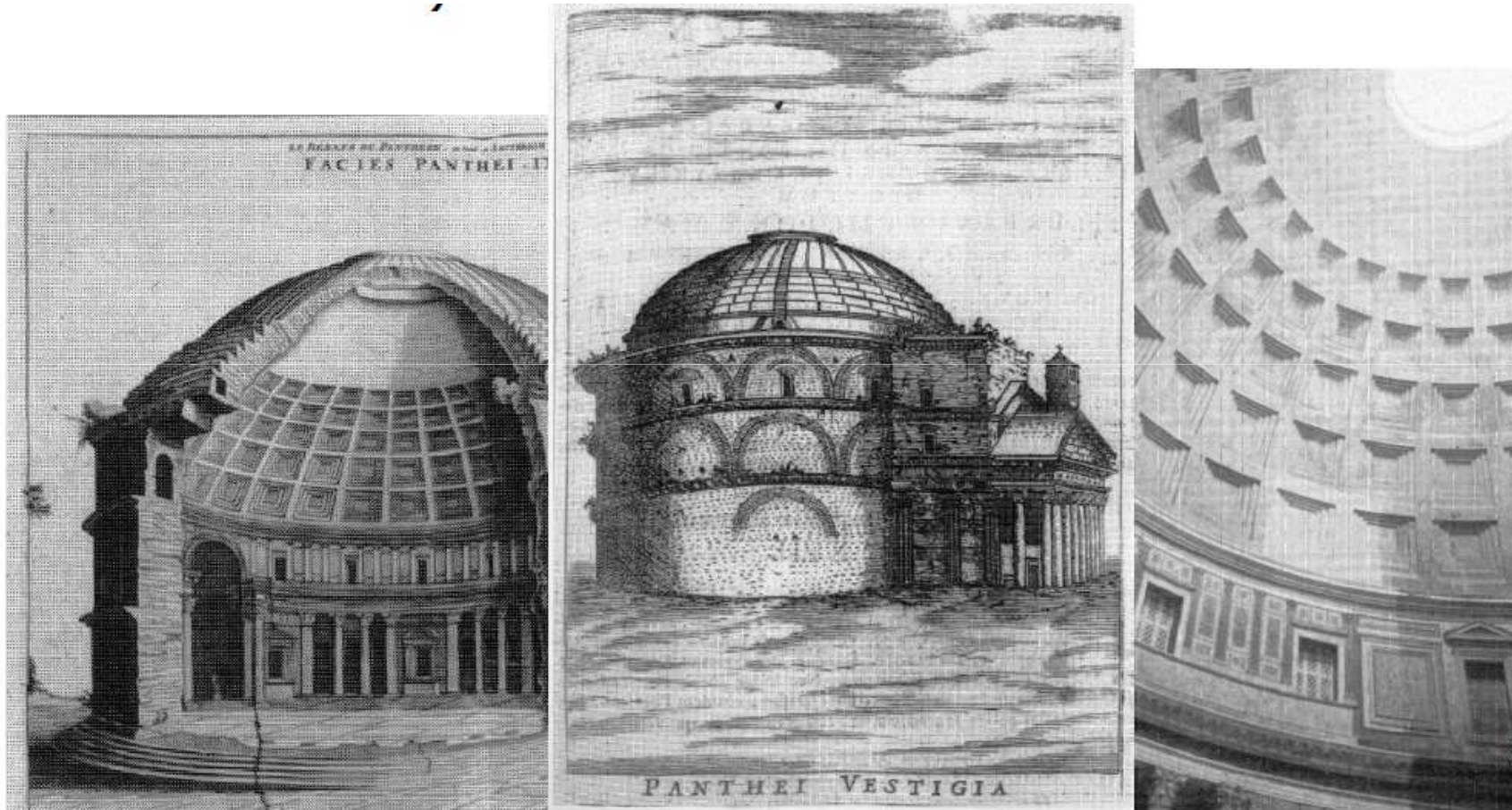


Mole Antonelliana a Torino, di Alessandro Antonelli (1863-1900).



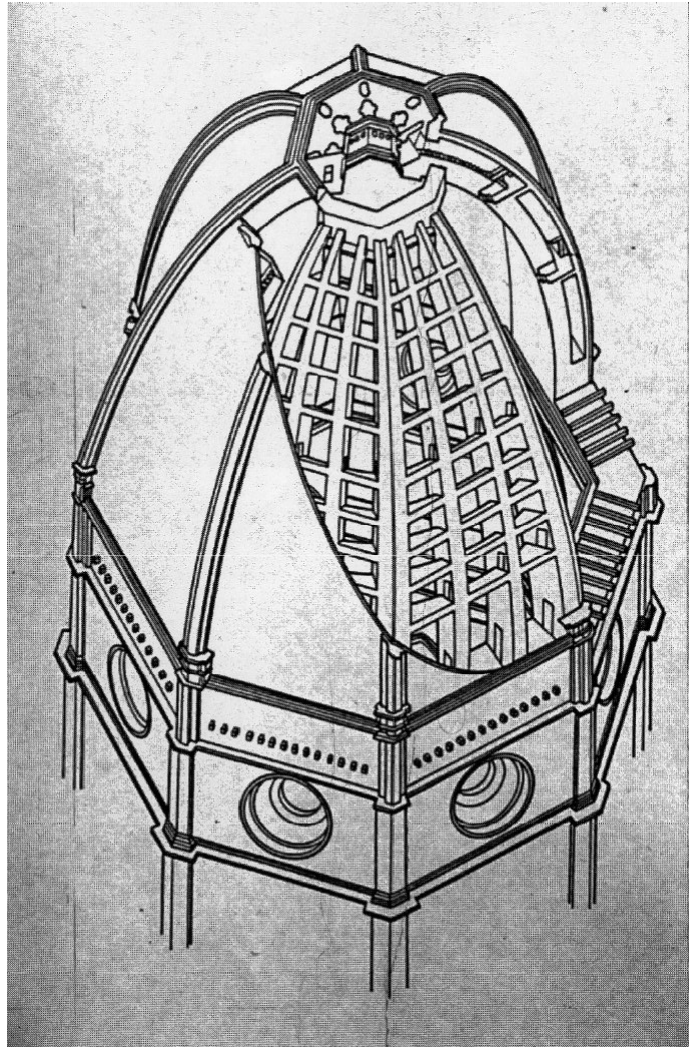
Cupola di S. Maria di Loreto, a Roma, di Antonio da Sangallo il Giovane (1501).

# Cupole



**Pantheon, Roma, opus cementitium**

# Cupole



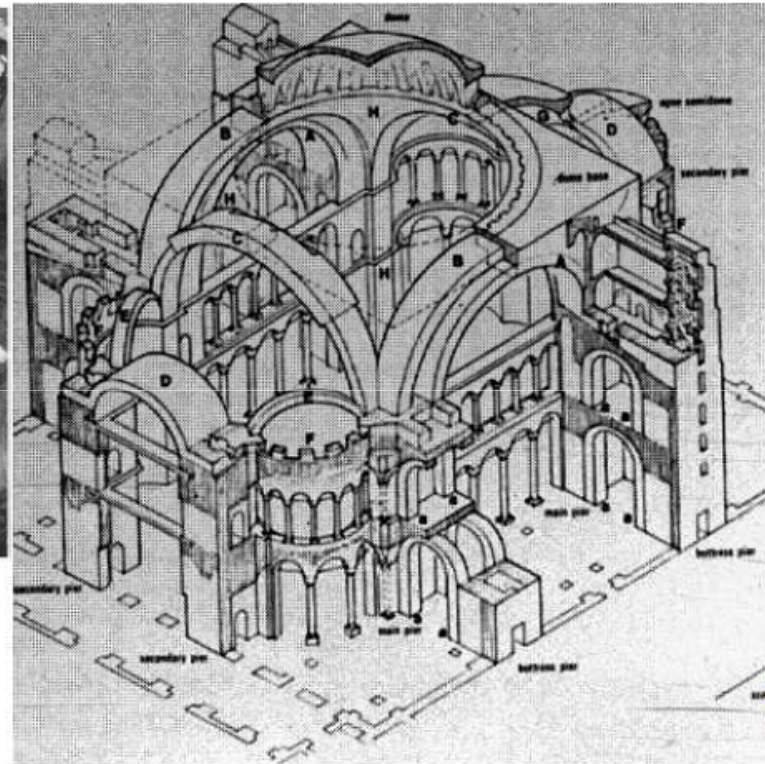
**Santa Maria del Fiore, Firenze, schema misto**

# Cupole...



**Santa Sofia, Istanbul, VI sec d.C.**

# Cupole...



**Santa Sofia, Istanbul, VI sec d.C.**

# Cupole...



**San Pietro, Roma**

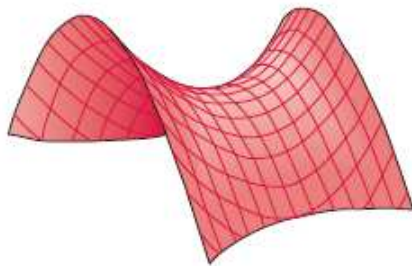
# Volte e cupole contemporanee

Con la tecnologia del cemento armato si possono coprire luci molto estese

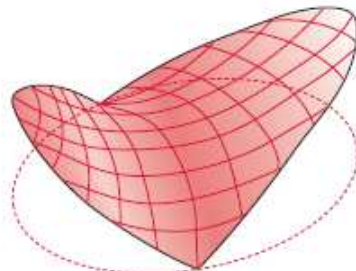
Le grandi costruzioni sportive, congressuali o aeroportuali hanno fornito campi di prova per la sperimentazione di volte e cupole avveniristiche.



Franklin Halle a Berlino di H. A. Stubbins (1957).



Volta a paraboloide iperbolico



Volta sottesca



Città delle Scienze edelle Arti a Valencia, di Santiago Calatrava (2002).

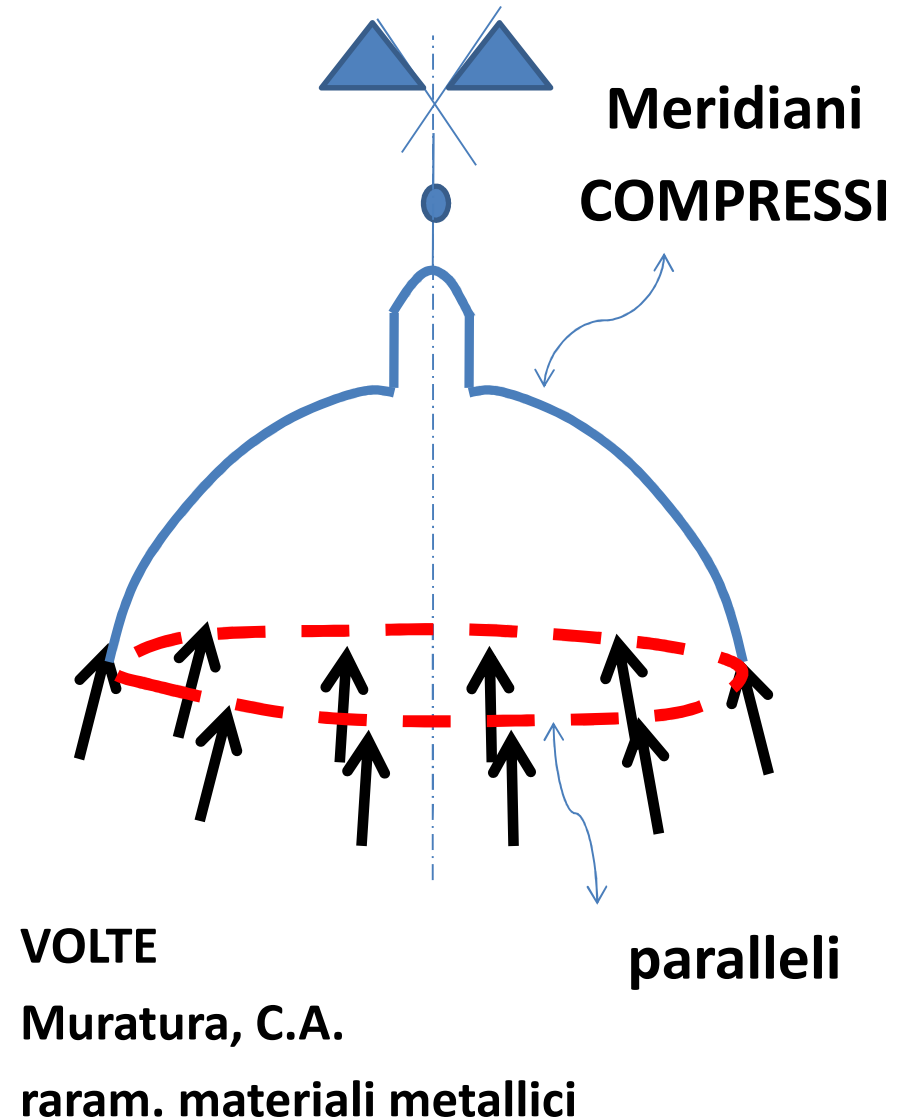
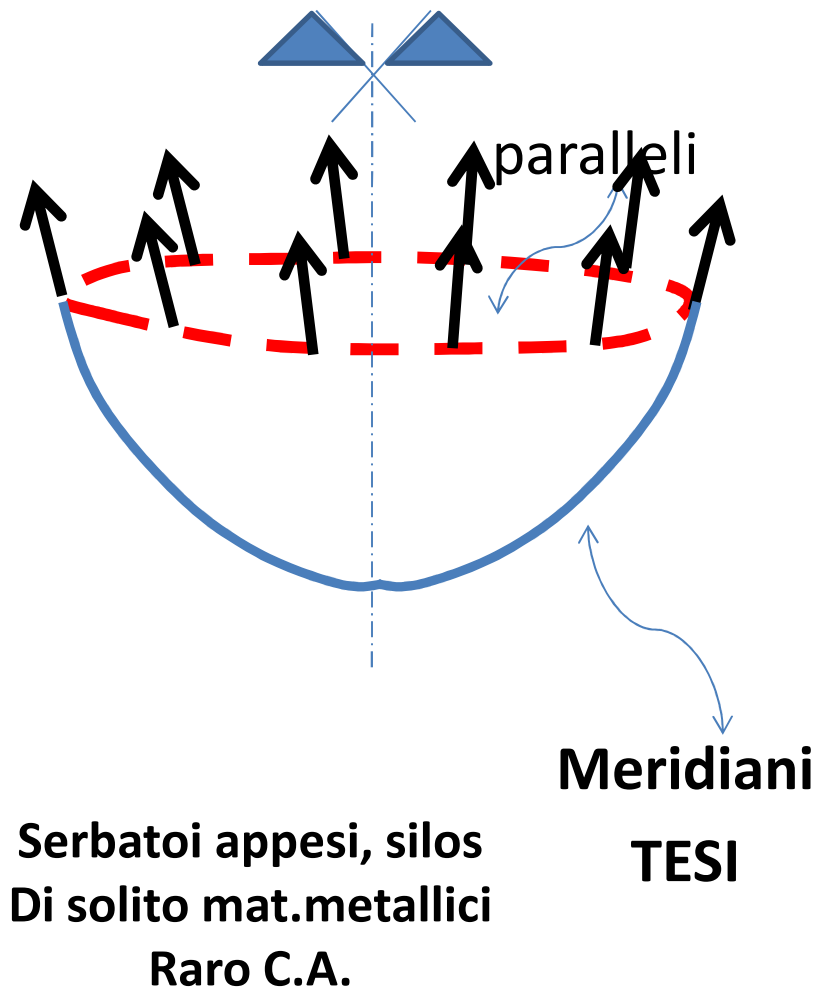
# Membrane curve

Belluzzi III pag 240

- 1) Per l'esiguità dello spessore rispetto alle altre dimensioni si possono trascurare le rigidezze flessionali e torsionali, le tensioni tangenziali si annullano, le tensioni si suppongono costanti nello spessore (come nelle funi)**
- 2) Le deformazioni elastiche non hanno una sensibile influenza sugli sforzi per cui possono essere considerate inestensibili (come nelle funi)**
- 3) Gli sforzi possono essere calcolati sulla base delle sole equazioni di equilibrio (come nelle funi)**
- 4) A differenza delle funi, la loro configurazione di equilibrio non dipende dal carico**

# Membrane di rivoluzione

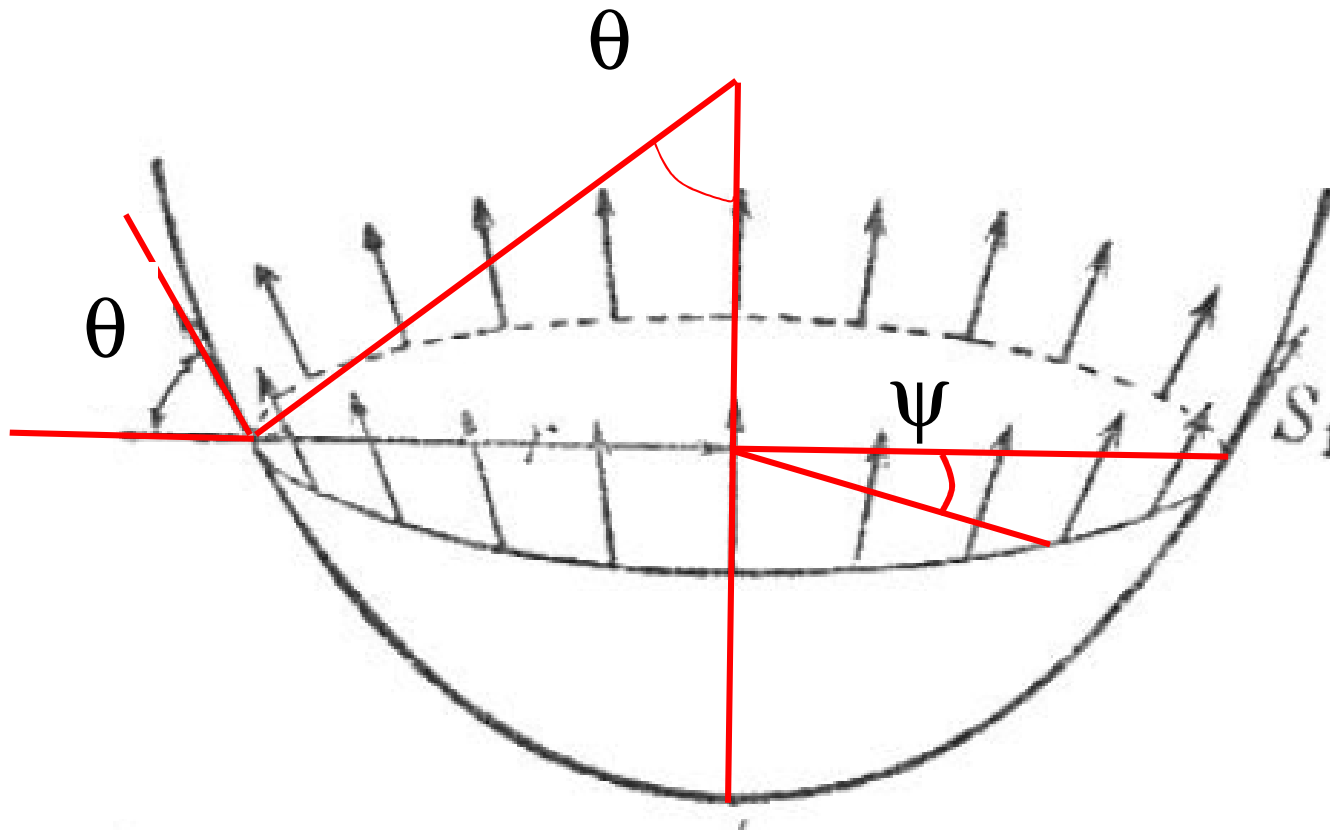
Belluzzi III pag 240



# Membrane curve

$\theta$  colatitude: angolo che il piano tangente forma con il piano orizzontale

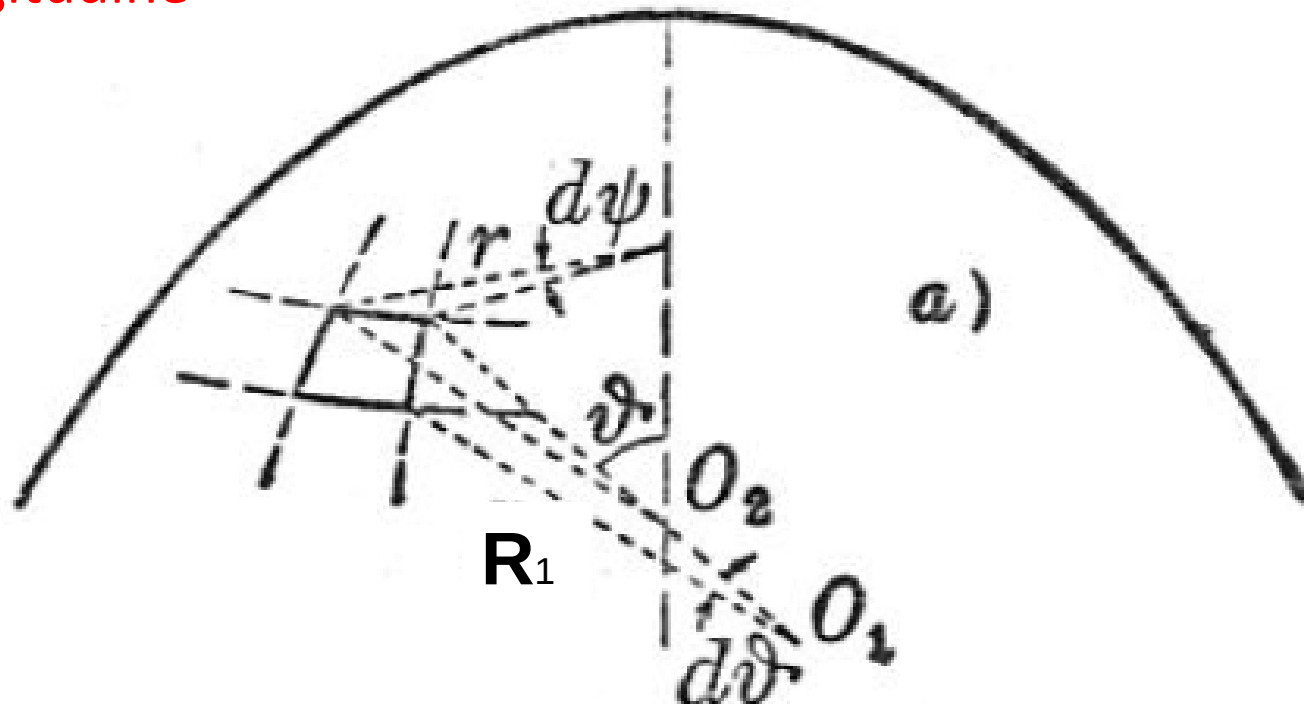
$\psi$  longitude



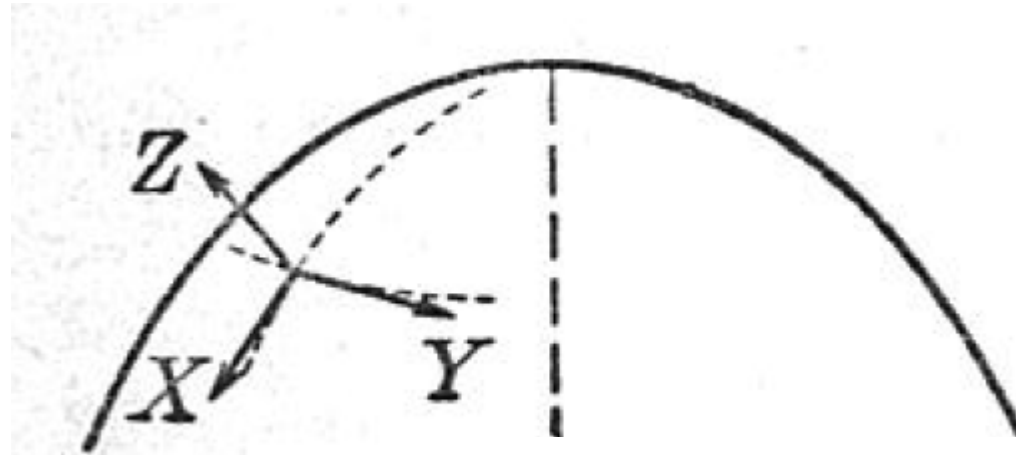
# Membrane curve

$\theta$  colatitude: angolo che la tangente al piano forma con il piano orizzontale

$\psi$  longitude



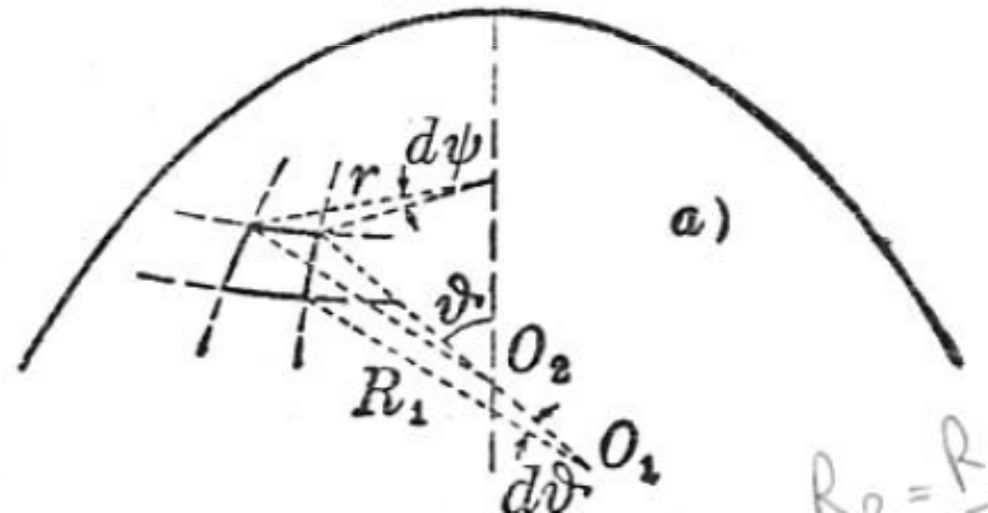
# Risultanti dei carichi agenti



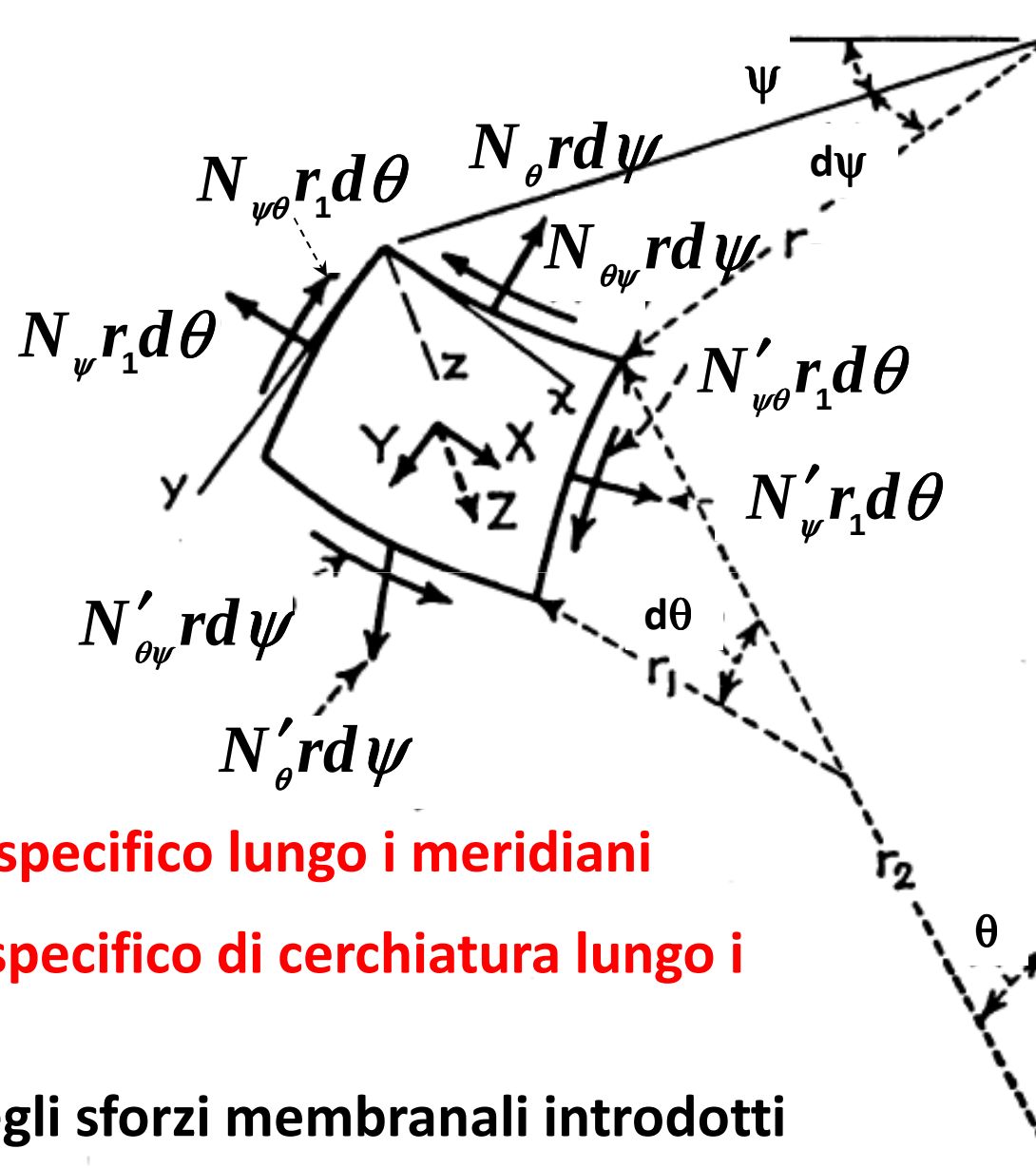
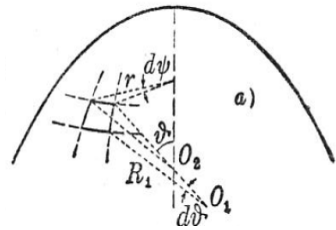
$$X = p_{\theta} r d\psi r_1 d\theta$$

$$Y = p_{\psi} r d\psi r_1 d\theta$$

$$Z = p_N r d\psi r_1 d\theta$$



# Membrane di rivoluzione

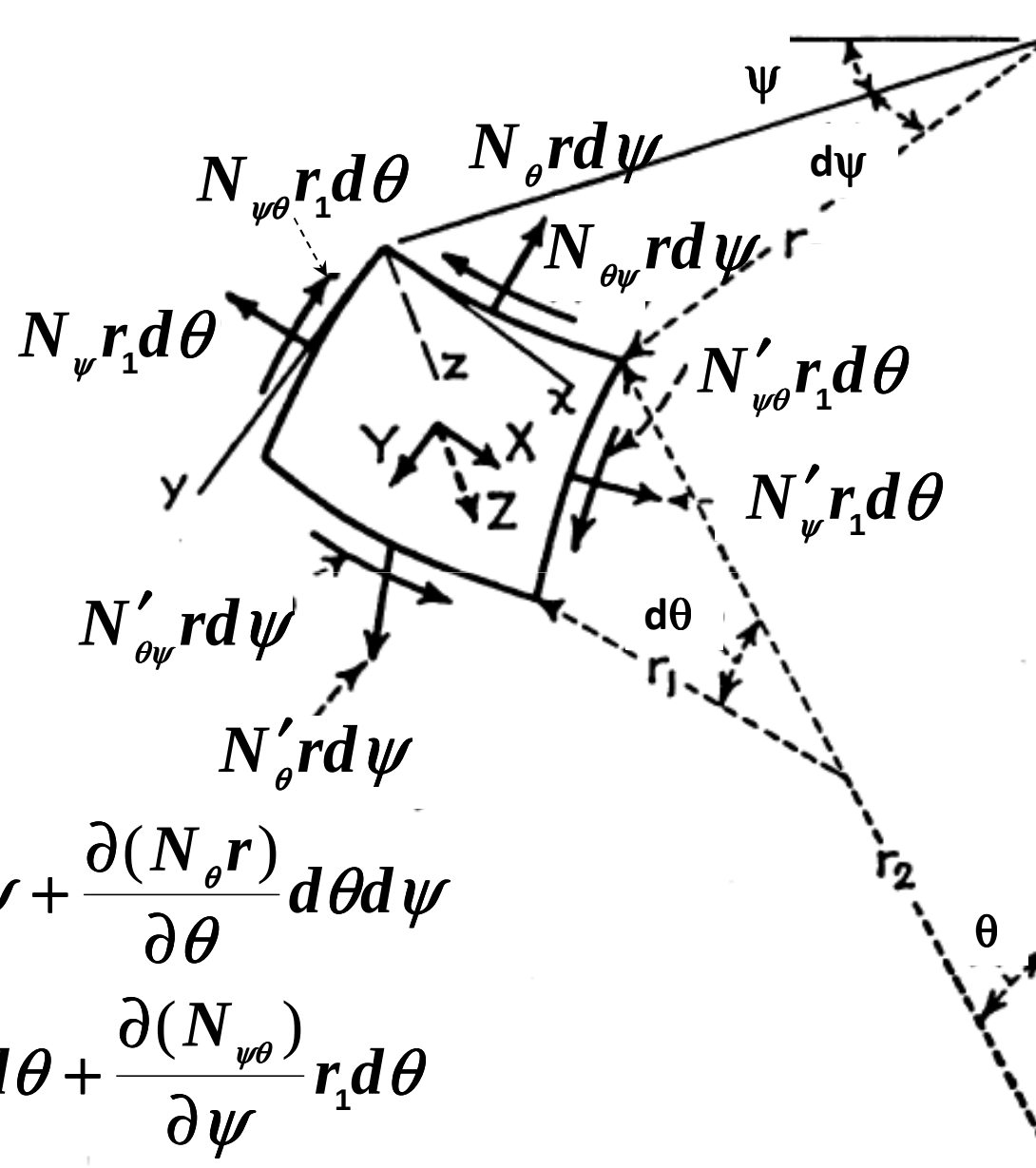


**$N_\theta$ : sforzo normale specifico lungo i meridiani**

**$N_\psi$ : sforzo normale specifico di cerchiatura lungo i paralleli**

Sono gli analoghi degli sforzi membranali introdotti nelle piastre

# Membrane di rivoluzione

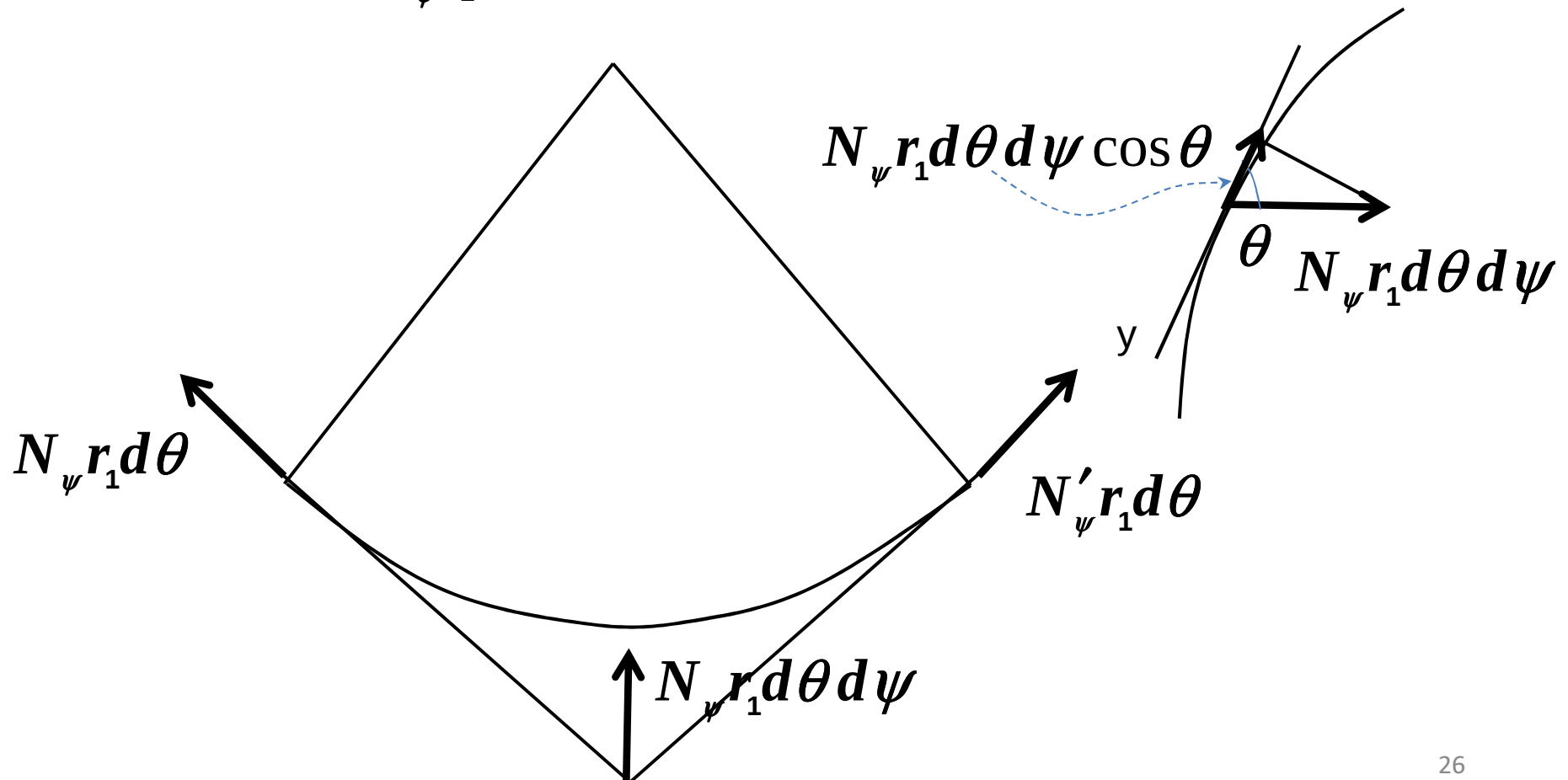


$$N'_{\theta} r d\psi = N_{\theta} r d\psi + \frac{\partial(N_{\theta} r)}{\partial \theta} d\theta d\psi$$

$$N'_{\psi\theta} r_1 d\theta = N_{\psi\theta} r_1 d\theta + \frac{\partial(N_{\psi\theta})}{\partial \psi} r_1 d\theta$$

## Equilibrio lungo y (tangente al meridiano )

Gli sforzi normali  $N_\psi r_1 d\theta$  ed  $N'_\psi r_1 d\theta$  hanno la risultante diretta secondo r che vale a meno di infinitesimi di ordini superiori  $N_\psi r_1 d\theta d\psi$  e questa ha secondo y una componente  $N_\psi r_1 d\theta d\psi \cos \theta$



# Equilibrio lungo $\psi$ (tangente al meridiano)

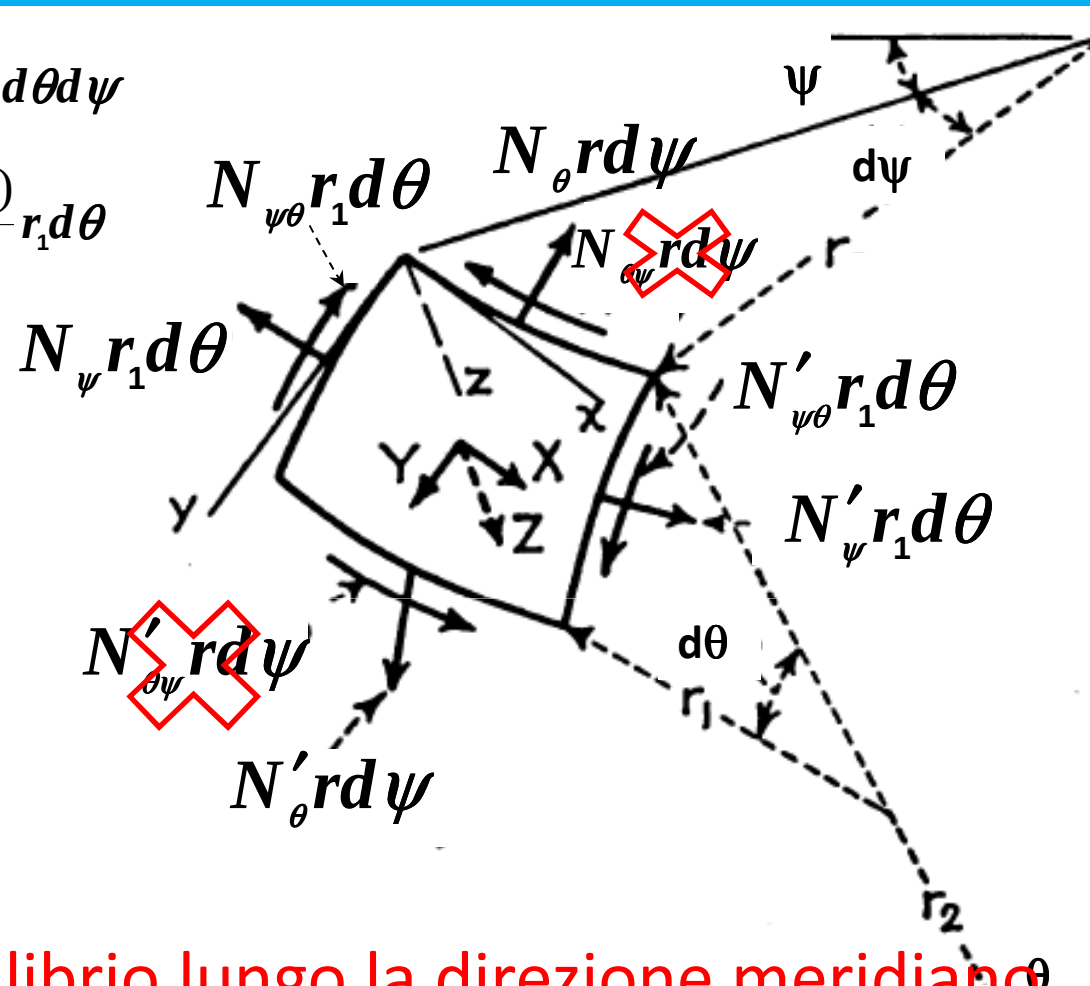
$$N'_\theta r d\psi = N_\theta r d\psi + \frac{\partial(N_\theta r)}{\partial \theta} d\theta d\psi$$

$$N'_{\psi\theta} r_1 d\theta = N_{\psi\theta} r_1 d\theta + \frac{\partial(N_{\psi\theta})}{\partial \psi} r_1 d\theta$$

$$X = p_\theta r d\psi r_1 d\theta$$

$$Y = p_\psi r d\psi r_1 d\theta$$

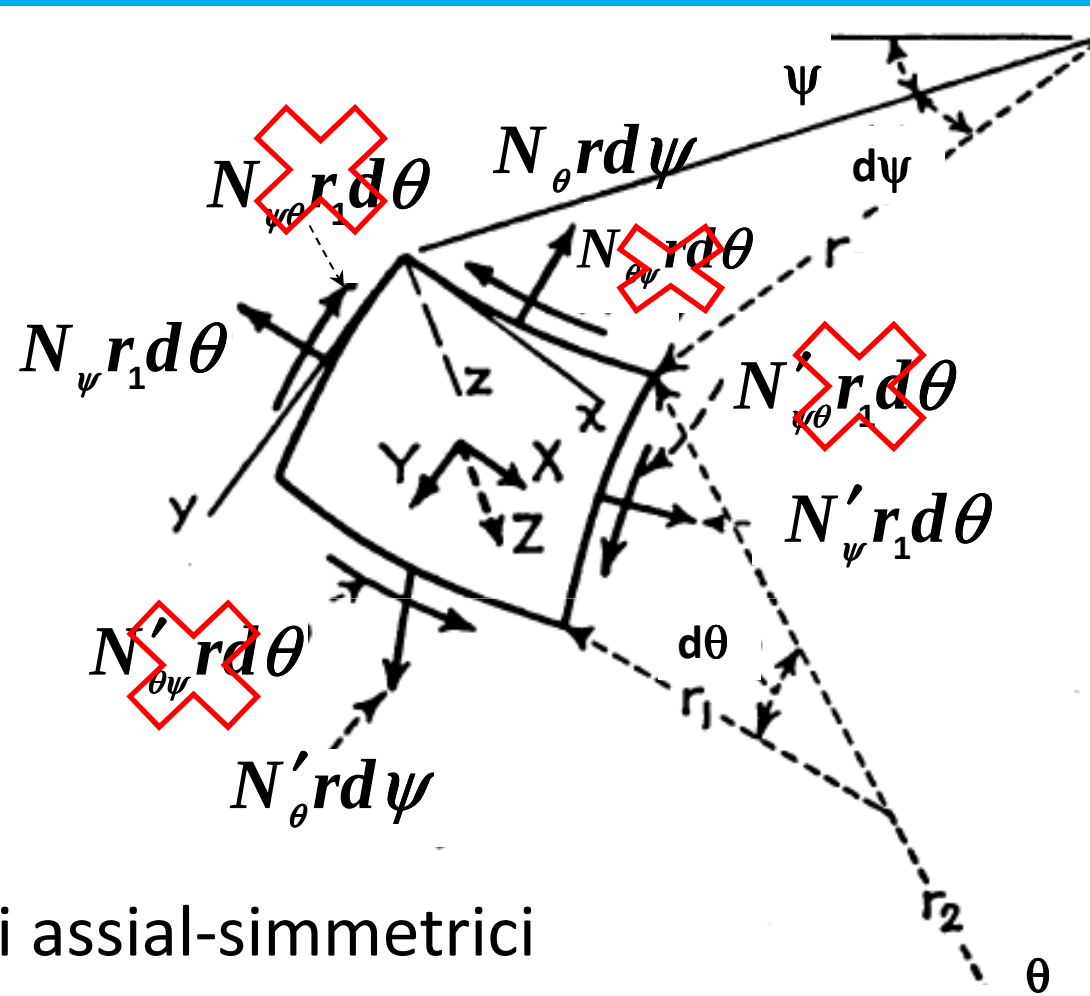
$$Z = p_N r d\psi r_1 d\theta$$



Equazione di equilibrio lungo la direzione meridiano  $\theta$

$$\frac{\partial(N_\theta r)}{\partial \theta} d\theta d\psi + \frac{\partial N_{\psi\theta}}{\partial \psi} r_1 d\theta d\psi - N_{\psi\theta} r_1 \cos \theta d\theta d\psi + p_\psi r r_1 d\theta d\psi = 0$$

# Equilibrio lungo $y$ (tangente al meridiano )

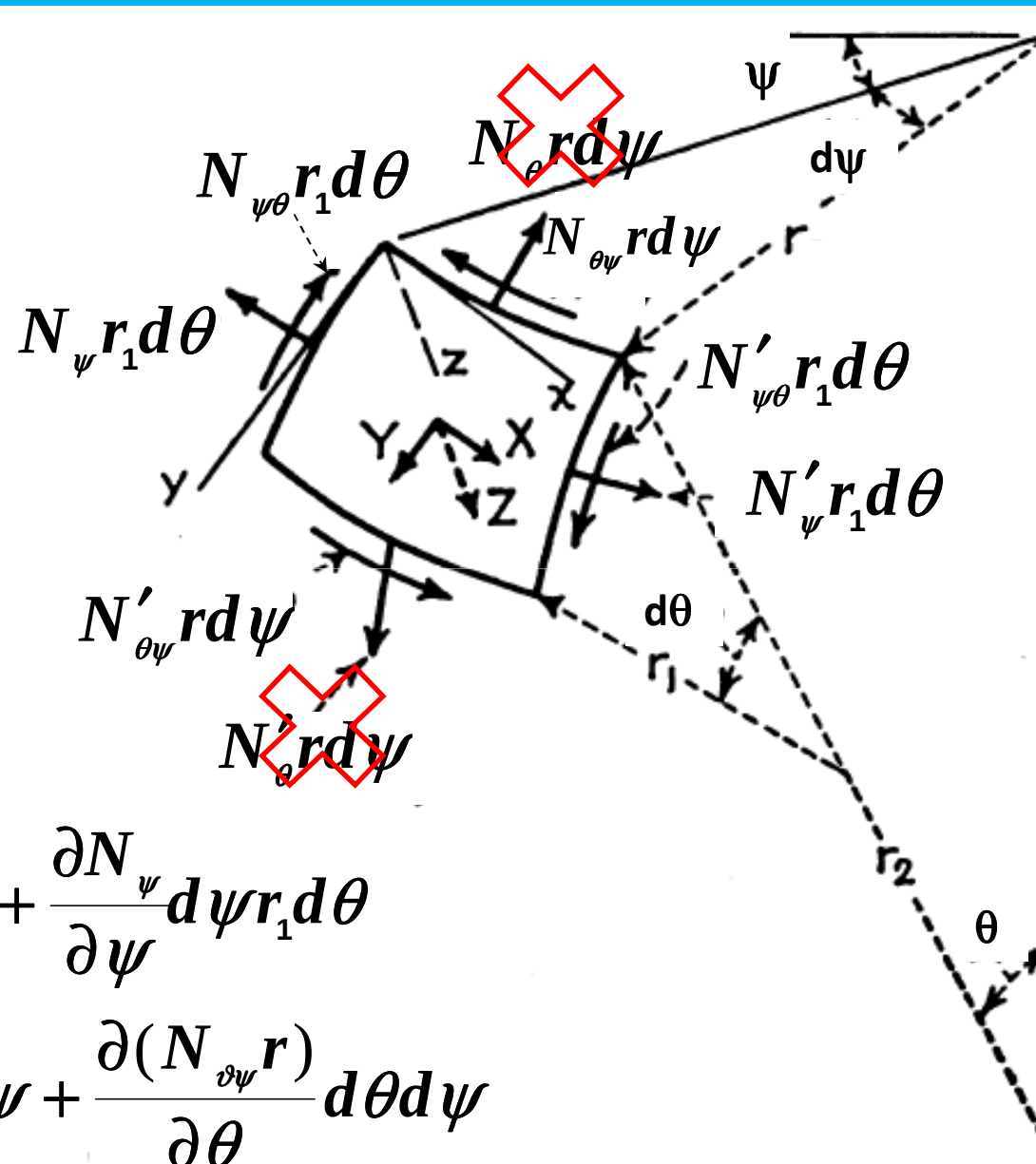


Nel caso di carichi assial-simmetrici

$$N_{\psi\theta} = 0$$

$N_\psi$  non varia con  $\psi$

# Equilibrio lungo x (tangente al parallelo )

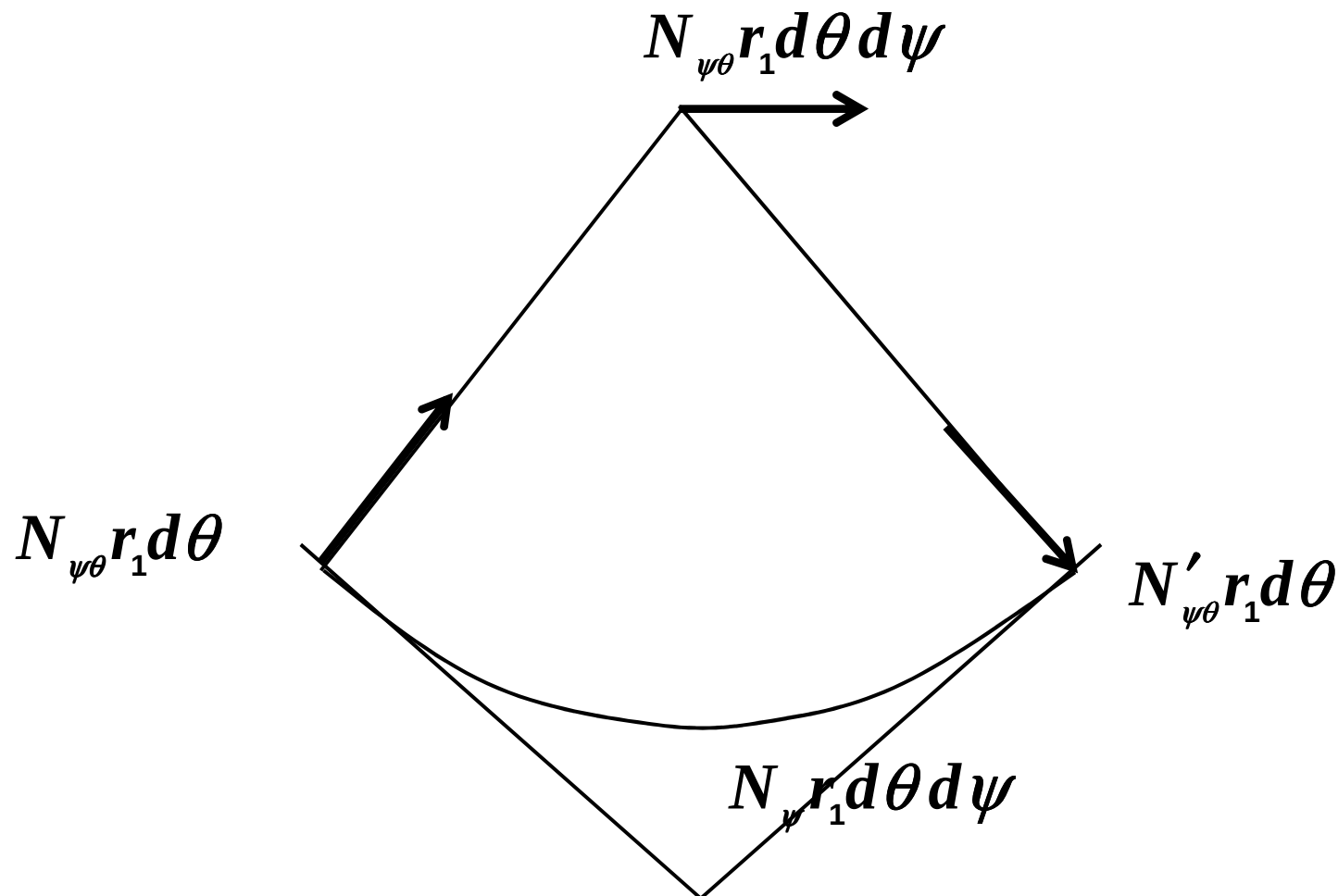


$$N'_{\psi} r_1 d\theta = N_{\psi} r_1 d\theta + \frac{\partial N_{\psi}}{\partial \psi} d\psi r_1 d\theta$$

$$N'_{\theta\psi} r d\psi = N_{\theta\psi} r d\psi + \frac{\partial (N_{\theta\psi} r)}{\partial \theta} d\theta d\psi$$

## Equilibrio lungo x (tangente al parallelo )

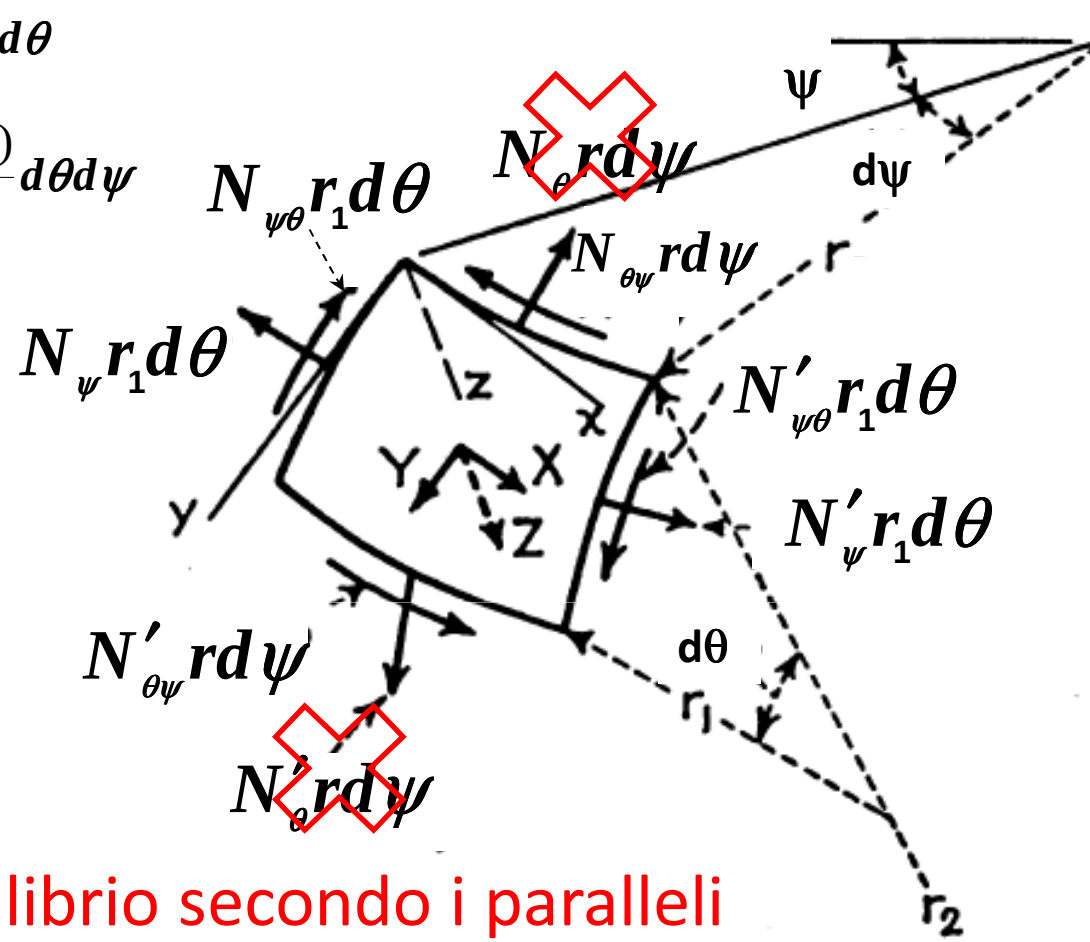
Gli sforzi normali  $N_{\psi\theta} r_1 d\theta$  ed  $N'_{\psi\theta} r_1 d\theta$  hanno una risultante la cui componente secondo x vale a meno di infinitesimi di ordini superiori  $N_{\psi\theta} r_1 d\theta d\psi \cos \theta$



## Equilibrio lungo x (tangente al parallelo )

$$N'_{\psi} r_1 d\theta = N_{\psi} r_1 d\theta + \frac{\partial N_{\psi}}{\partial \psi} d\psi r_1 d\theta$$

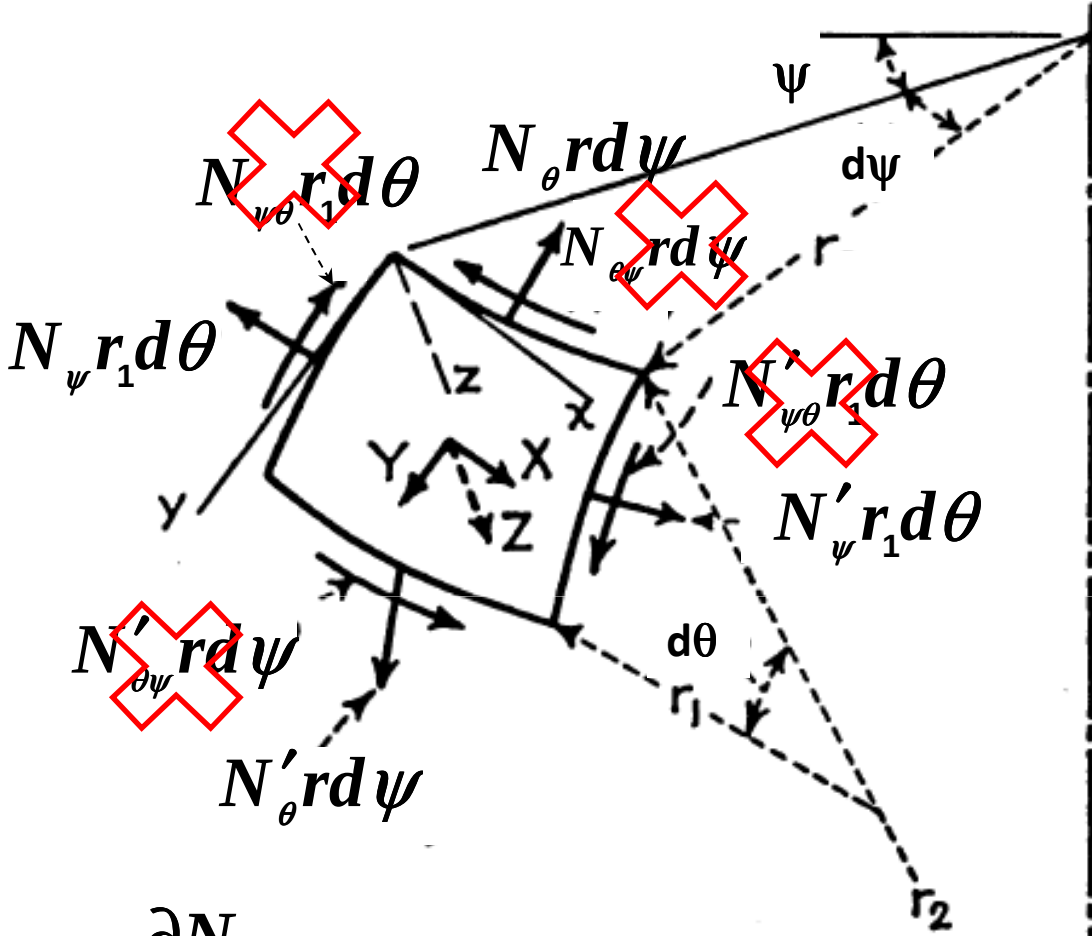
$$N'_{\theta\psi} r d\psi = N_{\theta\psi} r d\psi + \frac{\partial(N_{\theta\psi} r)}{\partial \theta} d\theta d\psi$$



Equazione di equilibrio secondo i paralleli

$$\frac{\partial(N_{\theta\psi} r)}{\partial \theta} d\theta d\psi + \frac{\partial N_{\psi}}{\partial \psi} r_1 d\theta d\psi + N_{\theta\psi} r_1 d\theta d\psi \cos \theta + p_{\theta} r_1 d\theta r d\psi = 0$$

## Equilibrio lungo $z$ (normale)

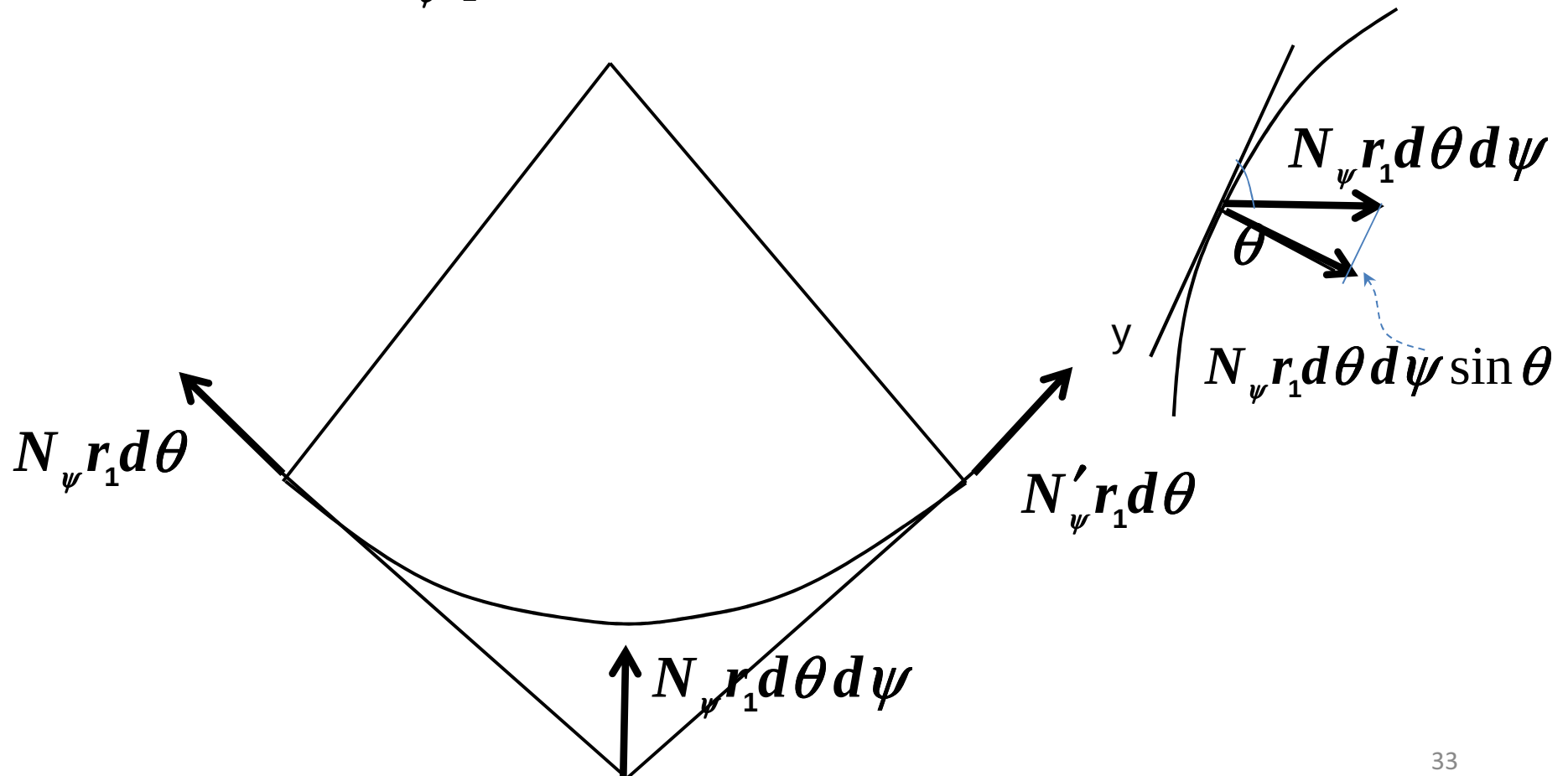


$$N'_\psi r_1 d\theta = N_\psi r_1 d\theta + \frac{\partial N_\psi}{\partial \psi} d\psi r_1 d\theta$$

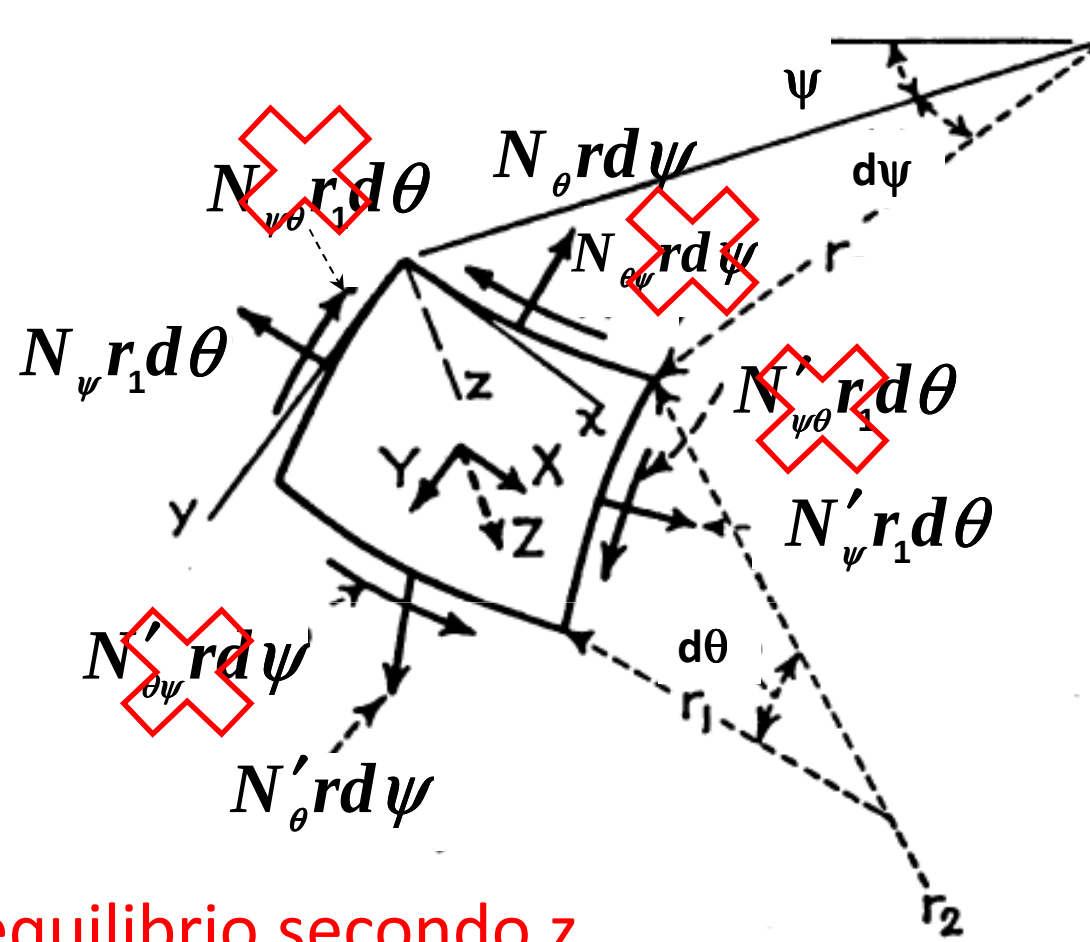
$$N'_\vartheta rd\psi = N_\theta rd\psi + \frac{\partial(N_\theta r)}{\partial\theta}d\theta d\psi$$

## Equilibrio lungo z

Gli sforzi normali  $N_\psi r_1 d\theta$  ed  $N'_\psi r_1 d\theta$  hanno la risultante diretta secondo r che vale a meno di infinitesimi di ordini superiori  $N_\psi r_1 d\theta d\psi$  e questa ha secondo z una componente  $N_\psi r_1 d\theta d\psi \sin \theta$



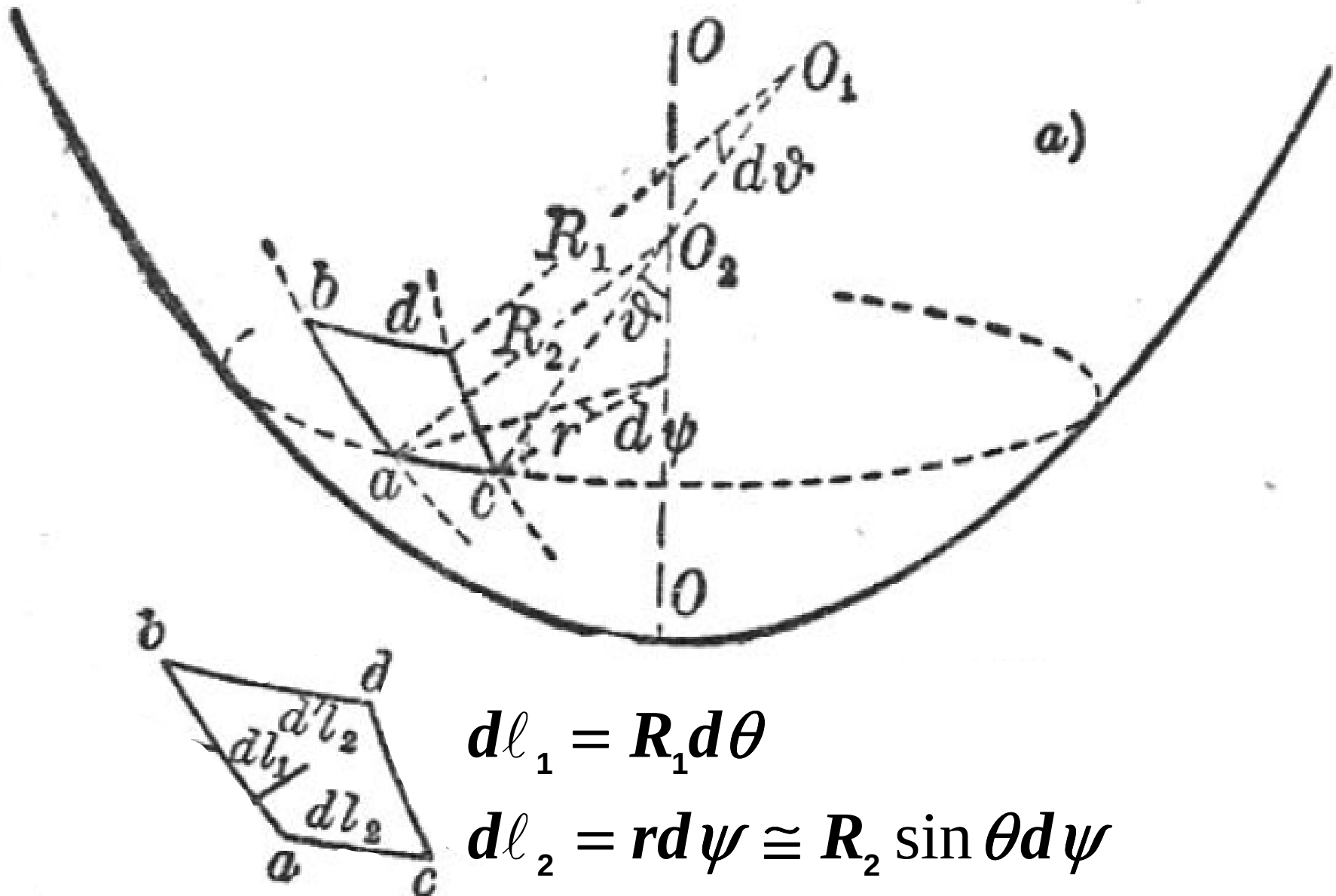
# Equilibrio lungo z (normale)



Equazione di equilibrio secondo z

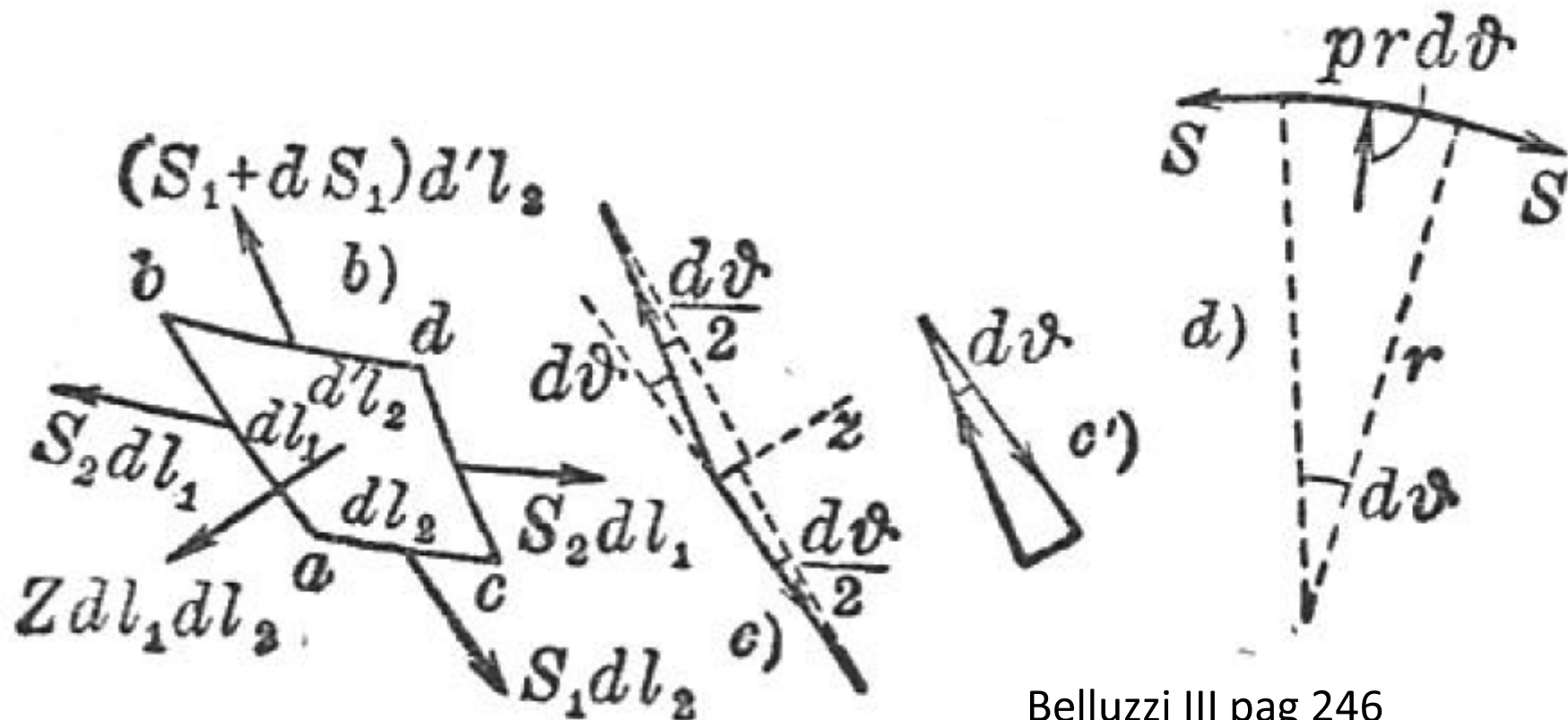
$$N_{\theta} r_2 \sin \theta d\psi d\theta + N_{\psi} r_1 \sin \theta d\psi d\theta = p_N r_2 r_1 \sin \theta d\psi d\theta$$

# Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



# Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico

Consideriamo un elemento abcd di membrana;  
In tale caso lo sforzo tangenziale si annulla



Belluzzi III pag 246

# Membrane di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico

Consideriamo un elemento di membrana;

In tale caso lo sforzo tangenziale si annulla

Il piano meridiano ed il piano perpendicolare al meridiano diventano i piani principali di curvatura in un punto della superficie di rivoluzione

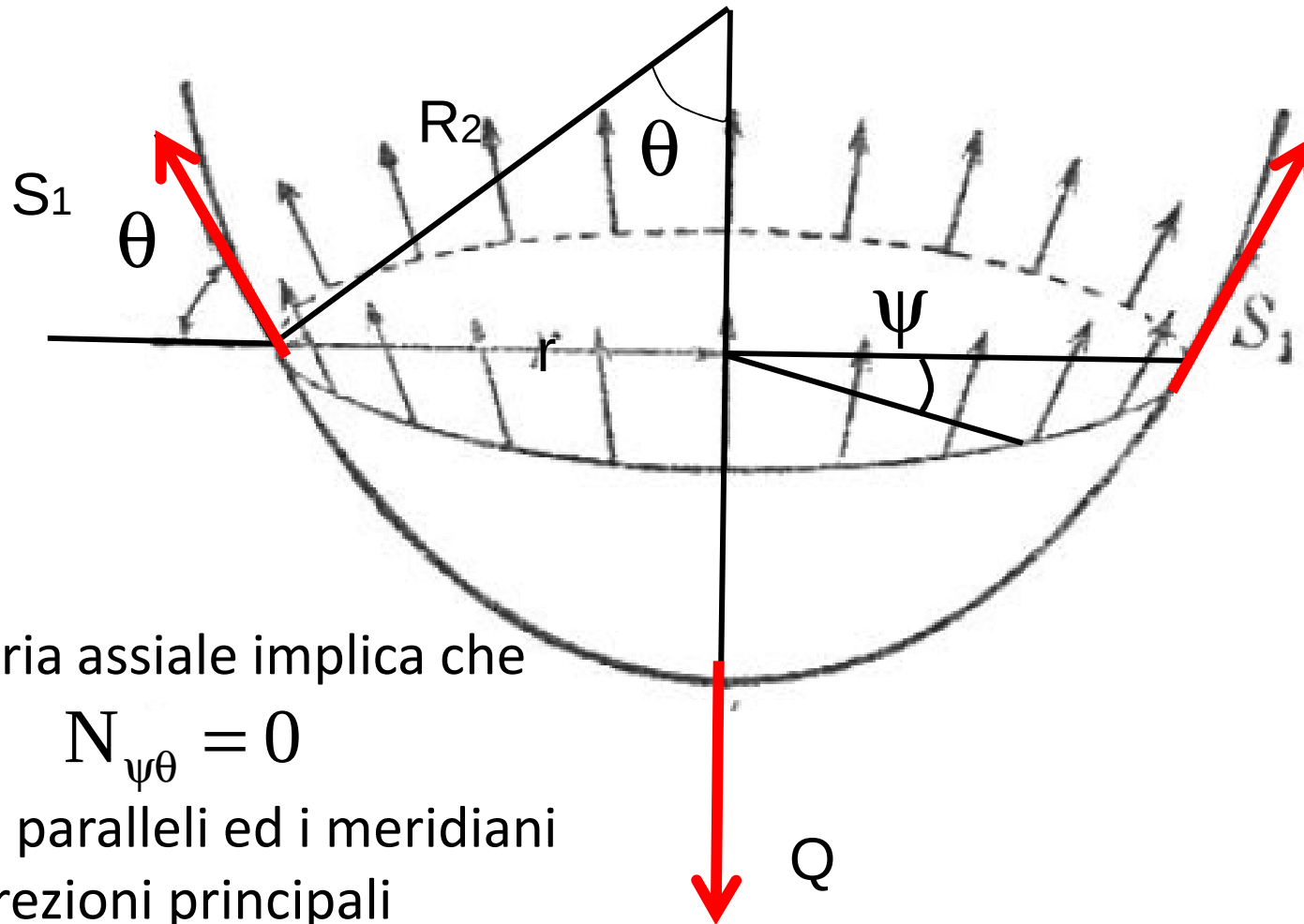
i corrispondenti raggi di curvatura sono  $R_1$  (paralleli) ed  $R_2$  (meridiani)

$1/R_1$  e  $1/R_2$  sono dette curvatures Gaussiane della superficie

$$S_1 R_2 \sin \theta d\psi d\theta + S_2 R_1 \sin \theta d\psi d\theta = p_N R_2 R_1 \sin \theta d\psi d\theta$$

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p_N \quad \text{formula di Mariotte per le membrane}$$

## Esempio: membrana di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



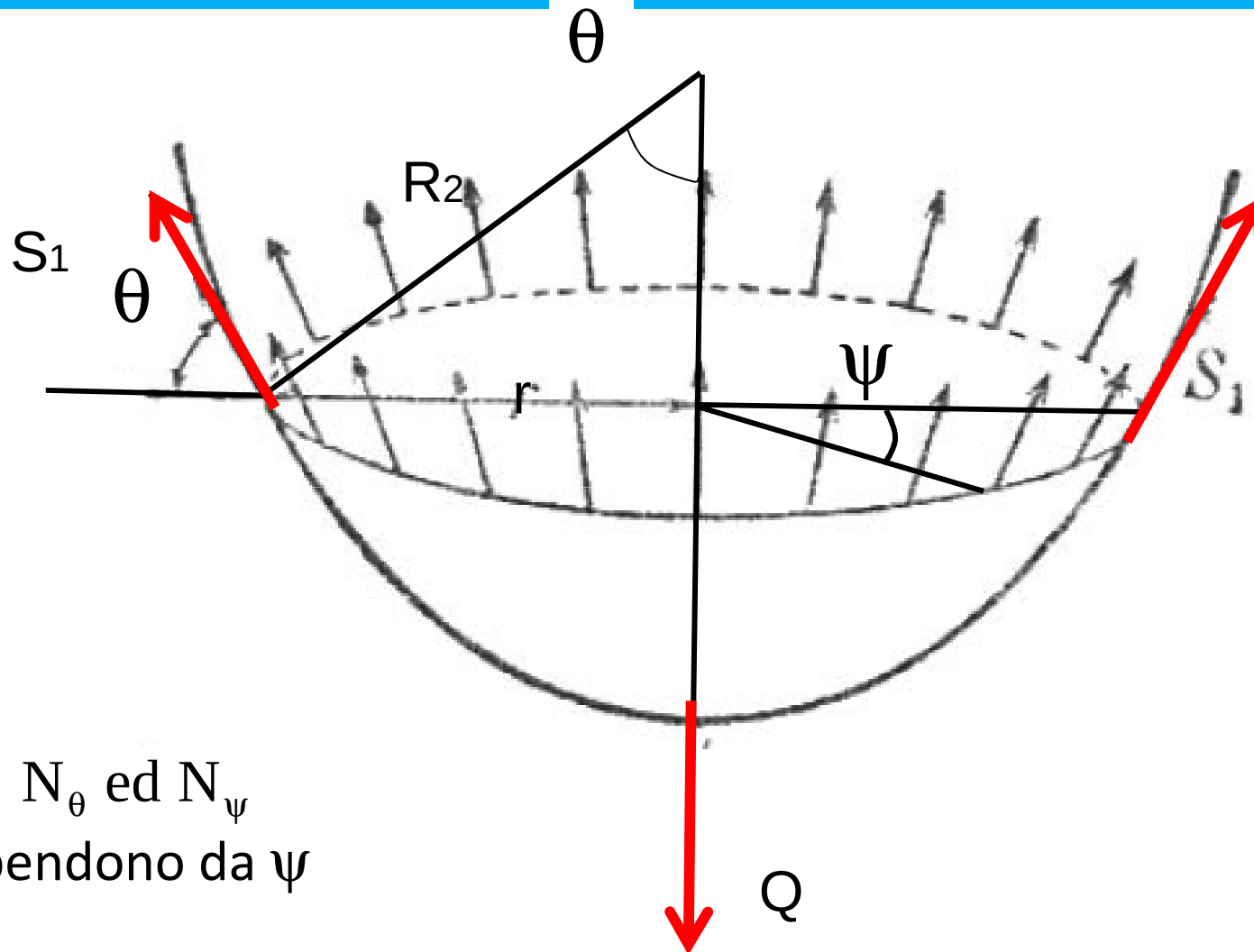
Simmetria assiale implica che

$$N_{\psi\theta} = 0$$

Inoltre i paralleli ed i meridiani  
sono direzioni principali

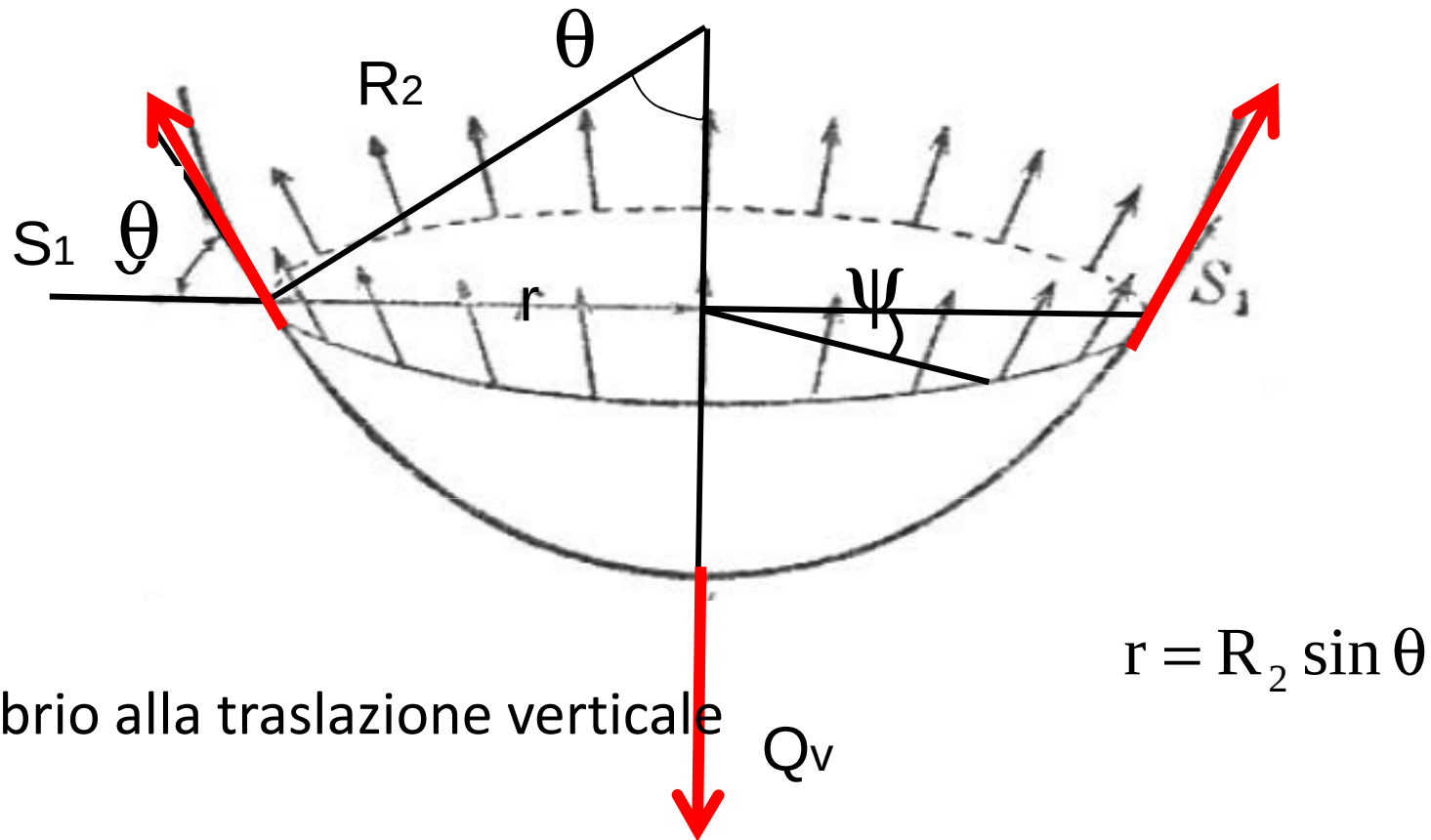
$$N_{\theta} = S_1 \quad N_{\psi} = S_2$$

## Esempio: membrana di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



Inoltre  $N_\theta$  ed  $N_\psi$   
Non dipendono da  $\psi$

## Esempio: membrana di rivoluzione caricate in modo assialsimmetrico



$$S_1 \sin \theta 2\pi r = Q_v$$

$$S_1 = \frac{Q_v}{\sin \theta 2\pi r} = \frac{Q_v}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}$$

# Casi particolari: serbatoi in pressione per gas

Si trascura il peso del fluido ed il peso proprio del serbatoio

$$Q_v = p\pi r^2$$

$$S_1 = \frac{Q_v}{2\pi r \sin \theta} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r \sin \theta} = \frac{pr}{2 \sin \theta} = \frac{pR_2}{2}$$

Dall'equazione di equilibrio si ha

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p \Rightarrow \frac{pR_2}{2R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p \Rightarrow S_2 = \frac{pR_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)$$

# Casi particolari: serbatoi in pressione per gas

Caso di serbatoio cilindrico di spessore  $s$

$$R_1 = \infty \quad R_2 = R$$

$$S_1 = \frac{pR}{2}$$

$$S_2 = \frac{pR}{2} \left(2 - \frac{R}{R_1}\right) \Rightarrow S_2 = pR$$

Le tensioni diventano(formula di Mariotte dei tubi sottili)

$$\sigma_1 = \frac{pR}{2s} \quad \sigma_2 = \frac{pR}{s} = 2\sigma_1$$

# Casi particolari: serbatoi per liquidi

Belluzzi III pag 255-258

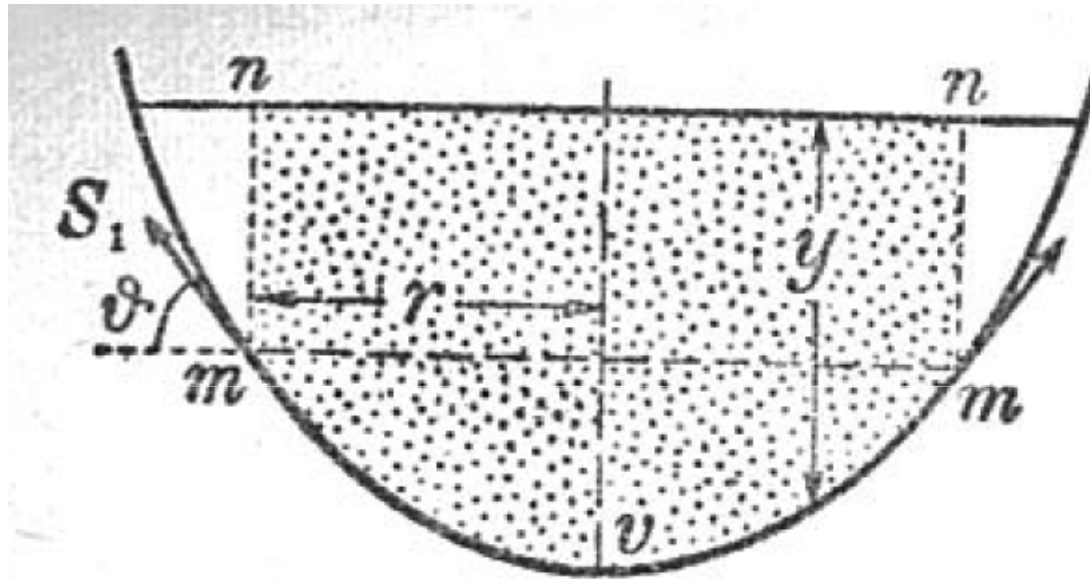
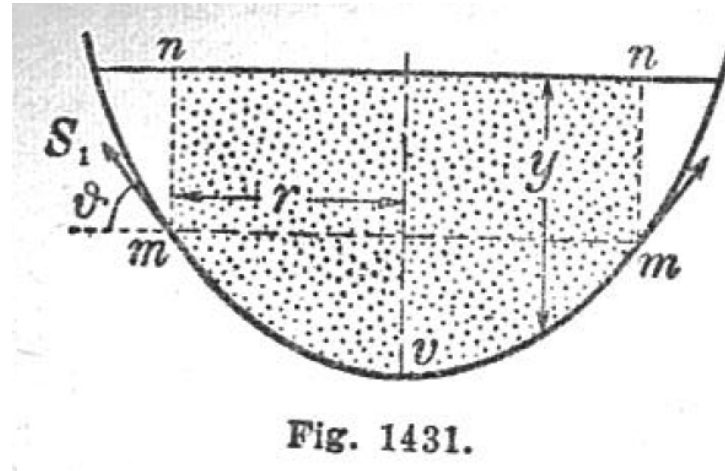


Fig. 1431.

Sia  $\gamma$  il peso specifico del liquido

# Casi particolari: serbatoi per liquidi

Belluzzi III pag 255-258

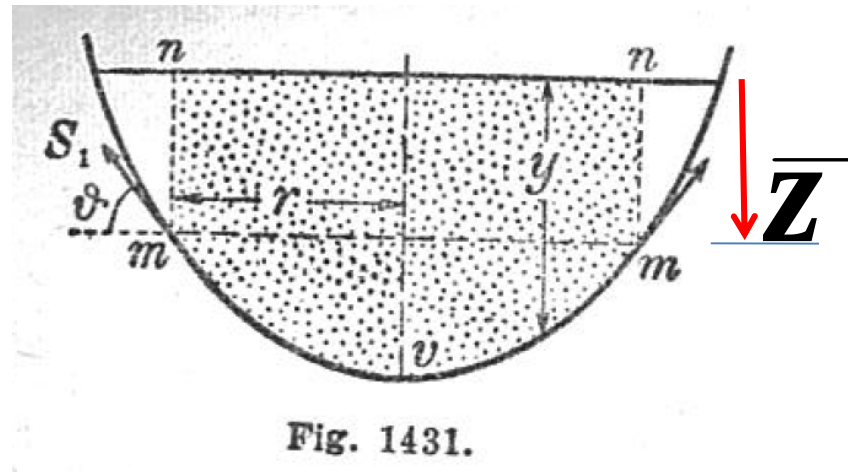


Tagliato il serbatoio con un piano orizzontale mm, la risultante Q delle pressioni agenti sulla parete sottostante è= al peso  $\gamma_l V$  del volume V di liquido punteggiato in figura. Da cui

$$S_1 = \frac{\gamma_l V}{2\pi r \sin \theta} = \frac{\gamma_l V}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}$$

# Casi particolari: serbatoi per liquidi

Belluzzi III pag 255-258



La  $S_2$  si calcola noto  $S_1$  come 
$$S_1 = \frac{\gamma_1 V}{2\pi r \sin \theta} = \frac{\gamma_1 V}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}$$

$$S_2 = R_2 \left( -\frac{S_1}{R_1} + p_N \right) = R_2 \left( -\frac{S_1}{R_1} + \gamma_1 \bar{z} \right)$$

## Casi particolari: tramoggia

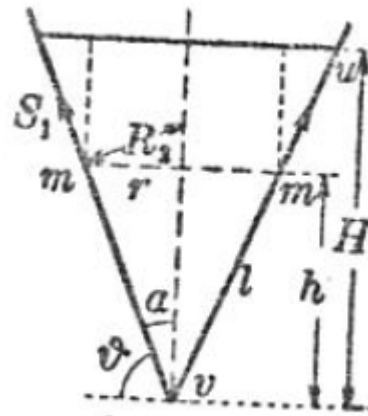


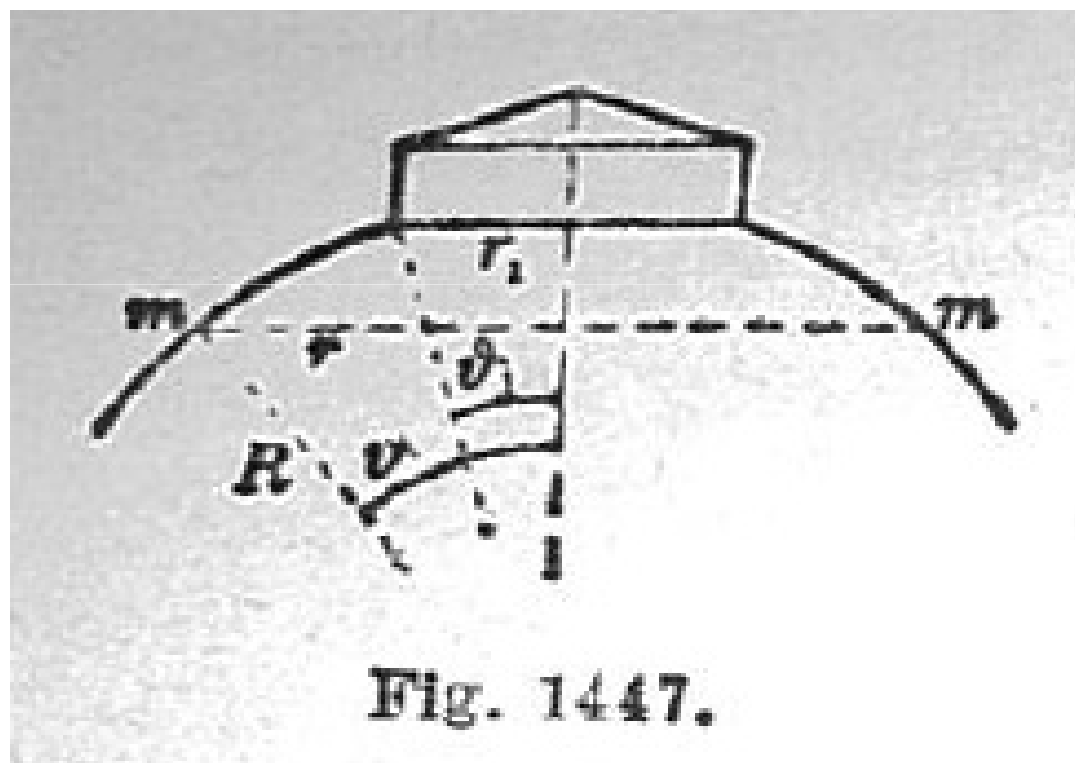
Fig. 1433.

**Esercizio 1277.** – Determinare l'angolo  $\alpha$  che deve avere un serbatoio conico di data capacità  $V$ , affinchè il volume  $v$  della lamiera risulti minimo.

$$\alpha = \sim 35^\circ .$$

# Casi particolari: cupola con lanterna

Esercizio 1294. - Cupola sferica con lanterna (fig. 1447).



## Casi particolari: cupola ogivale

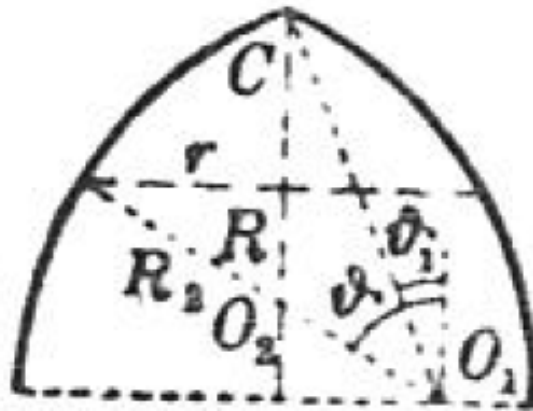
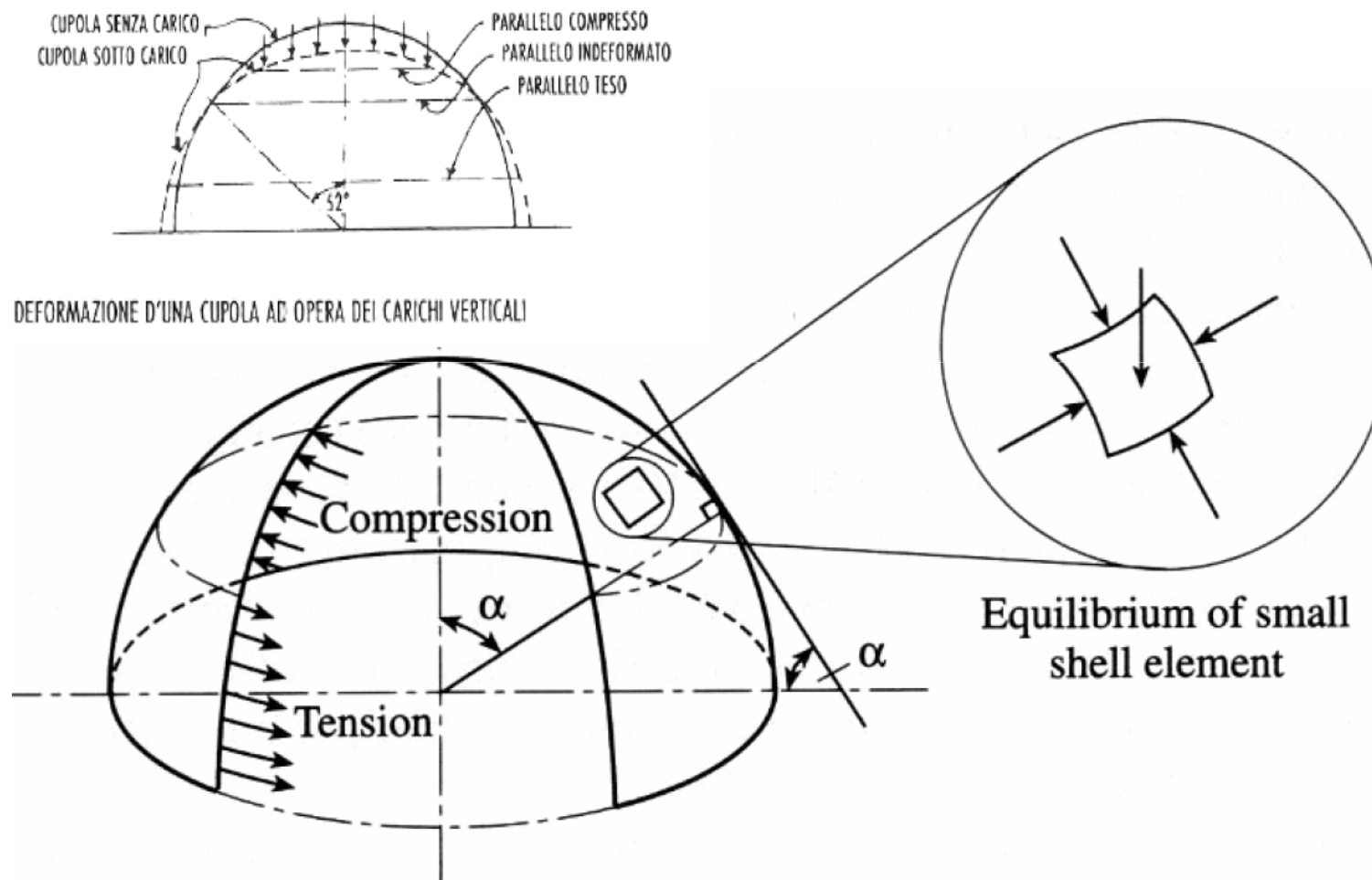


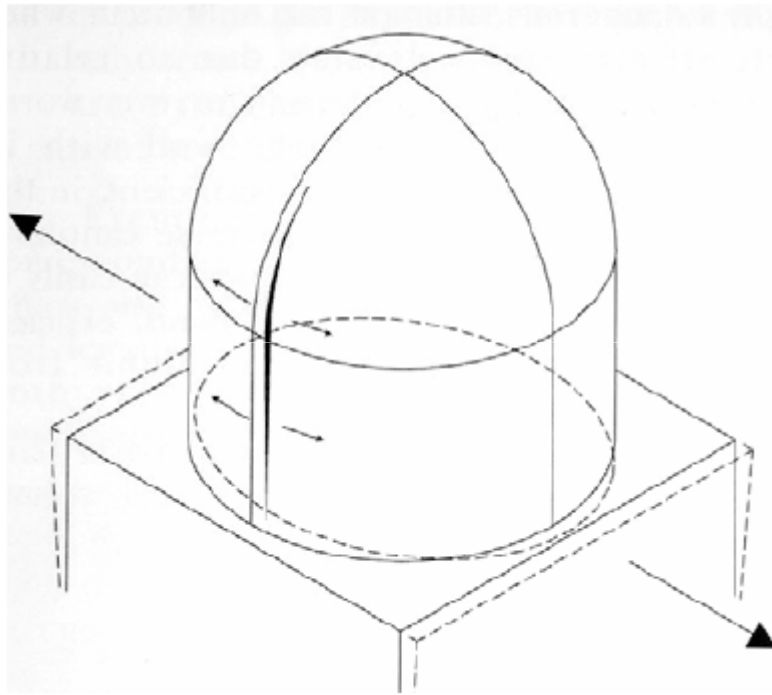
Fig. 1448.

**Esercizio 1296.** – Il meridiano di una cupola è un arco circolare, interrotto in un punto  $O$  nel quale l'inclinazione è  $\theta_1$ , così che ivi risulta una cuspide (fig. 1448). Determinare gli sforzi provocati dal peso proprio, essendo lo spessore costante.

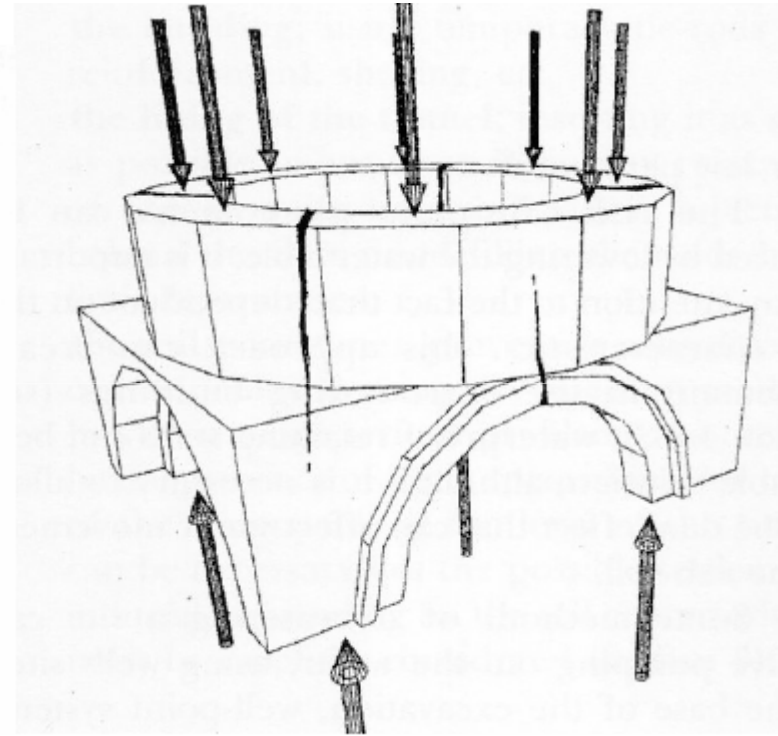
# Danneggiamento delle cupole



# Danneggiamento delle cupole



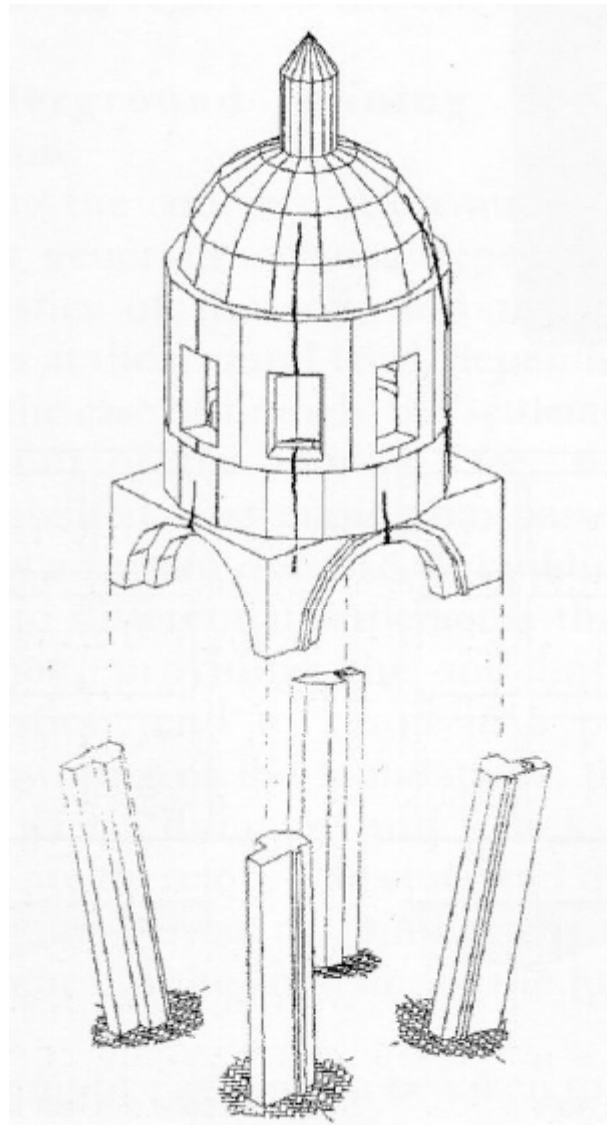
***Assestamento delle imposte***



***Tamburo inefficiente***

# Danneggiamento delle cupole

***Traslazione  
dei  
pilastri/muri  
di supporto***



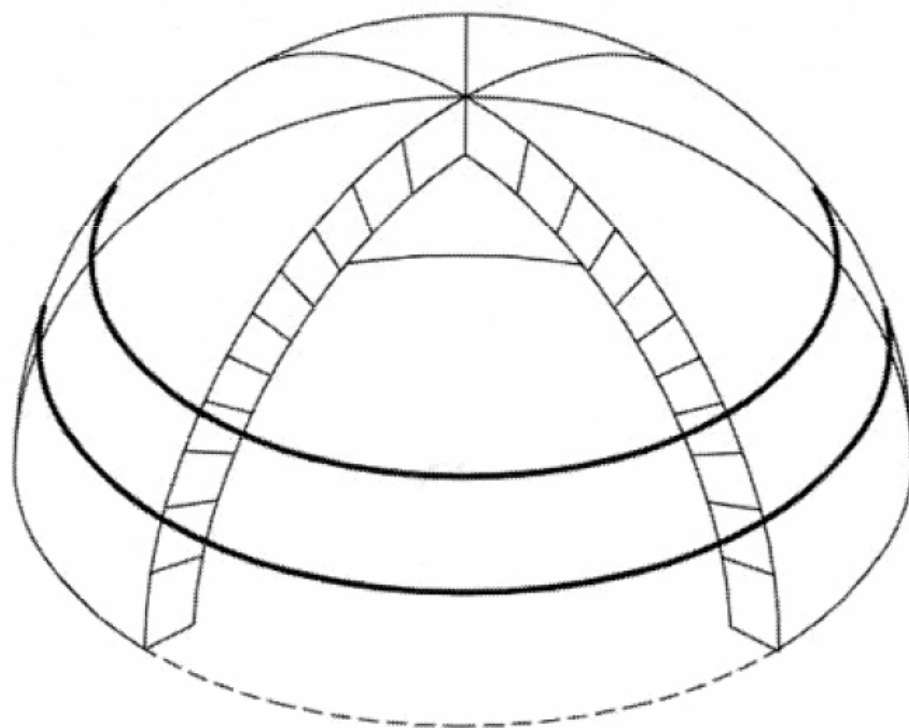
# Danneggiamento delle cupole

***Effetti biologici***  
***Es piante..***



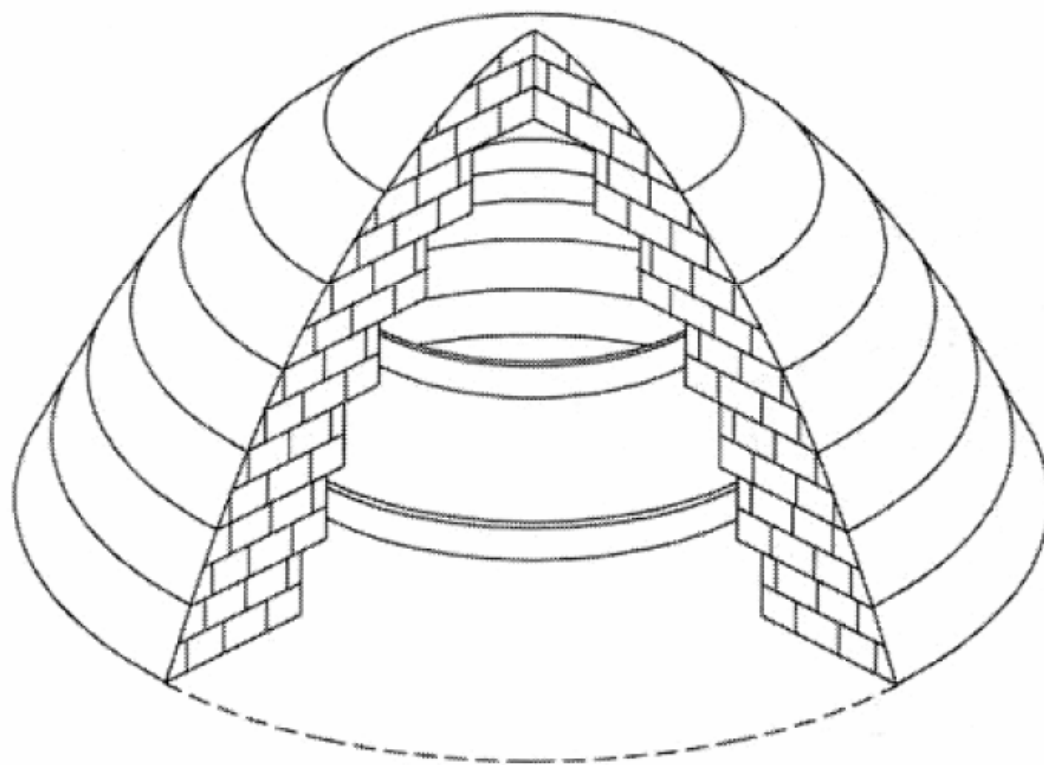
# Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola



# Interventi di ripristino

Anelli di rinforzo per false volte



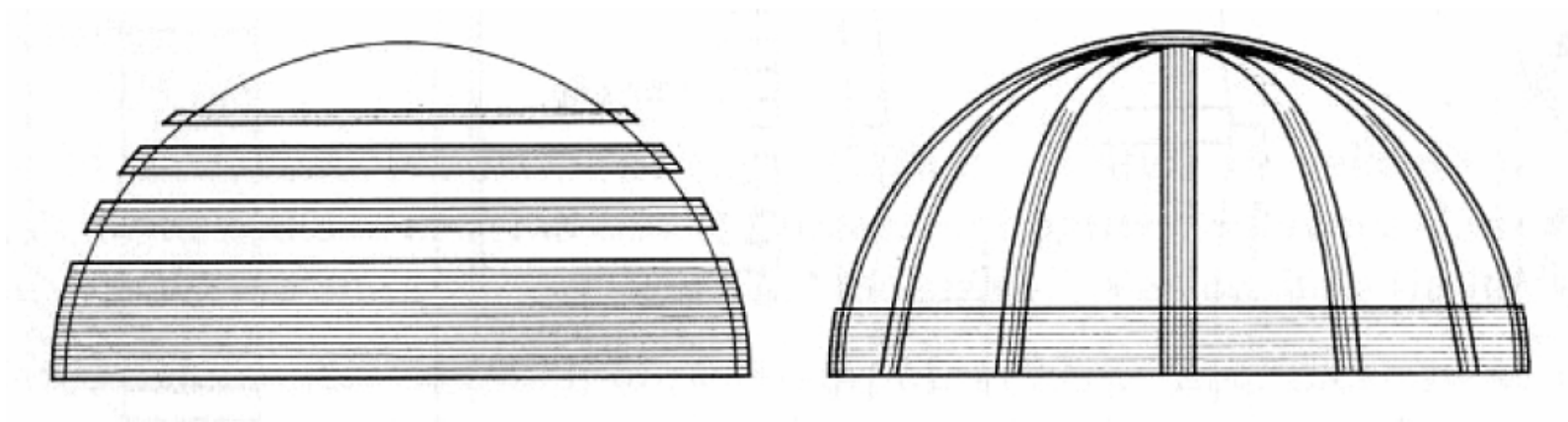
# Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola con FRP



# Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola con FRP



# Interventi di ripristino

Cerchiatura cupola San Carlo, Roma

