

Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

Ci poniamo la seguente domanda:

Qual è l'errore che si commette nel considerare 1 o 2 elementi finiti Hermitiani cubici (esatti per l'analisi statica della trave caricata ai nodi)?

Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

Tabella 15.4

Caso	Coeff.vincolo esatto	Coeff.vincolo 1 EF	Coeff.vincolo 2 EF	Errore 1EF	Errore 2EF
	χ	χ_1	χ_2	$(\chi_1 - \chi)/\chi$	$(\chi_2 - \chi)/\chi$
a) 	1.0	1.216	1.008	21.6%	0.8%
b) 	0.250	0.252	---	0.8%	---
c) 	2.046	3.040	2.098	48.6%	2.6%
d) 	4.0	∞	4.053	∞	1.3%
e) 	1.0	1.013	---	1.3%	---
f) 	0.250	0.252	---	0.8%	---

Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

L'errore che si commette con 1 EF è inaccettabile quando il grado di libertà traslazionale in direzione ortogonale all'asse della trave dei nodi risulta nullo per via dei vincoli

Lo schema EF per funzionare bene necessita di avere come incognite nodali almeno 1 grado di libertà traslazionale

Inoltre, occorre attenzione anche in caso di molle traslazionali che limitano lo spostamento

Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

Infatti la soluzione esatta in termini del campo di spostamento del problema della stabilità dell'asta presso-inflessa

$$\mathbf{v}^{\text{iv}}(\mathbf{x}) + \alpha^2 \mathbf{v}^{\text{ii}}(\mathbf{x}) = 0$$

Sotto le condizioni al contorno

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{U}_1, \mathbf{v}'(0) = \mathbf{U}_2, \quad \mathbf{v}(\ell) = \mathbf{U}_3, \mathbf{v}'(\ell) = \mathbf{U}_4$$

Risulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{U}_1 + \Phi_2(\mathbf{x})\mathbf{U}_2 + \Phi_3(\mathbf{x})\mathbf{U}_3 + \Phi_4(\mathbf{x})\mathbf{U}_4$$

Richiami sull'uso del metodo degli elementi finiti per il calcolo del carico critico di aste presso-inflesse

Risulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{U}_1 + \Phi_2(\mathbf{x})\mathbf{U}_2 + \Phi_3(\mathbf{x})\mathbf{U}_3 + \Phi_4(\mathbf{x})\mathbf{U}_4$$

Dove

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = 1 - \Phi_3(\mathbf{x}), \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Phi_4(\mathbf{x}) - \ell\Phi_3(\mathbf{x})$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \frac{\sin \alpha \ell (\alpha \mathbf{x} - \sin \alpha \mathbf{x}) - (1 - \cos \alpha \ell)(1 - \cos \alpha \mathbf{x})}{\alpha \ell \sin \alpha \ell - 2(1 - \cos \alpha \ell)}$$

$$\Phi_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(\alpha \ell - \sin \alpha \ell)(1 - \cos \alpha \mathbf{x}) - (1 - \cos \alpha \ell)(\alpha \mathbf{x} - \sin \alpha \mathbf{x})}{\alpha \ell \sin \alpha \ell - 2(1 - \cos \alpha \ell)} \right]$$

Pertanto è evidente che una soluzione cubica polinomiale non rappresenta in nessun modo la soluzione esatta del problema

Stabilità di telai elasto-plastici

Le aste presso-inflesse hanno un comportamento non lineare in quanto la rigidezza flessionale diminuisce a causa della compressione

Tuttavia è possibile affrontarne lo studio mediante equazioni lineari negli spostamenti

Infatti l'energia si approssima al II ordine e la sua stazionarietà fornisce le equazioni di equilibrio

Stabilità di telai elasto-plastici

Inoltre, lo sforzo normale risulta sempre staticamente determinato sin dall'inizio ed è possibile disaccoppiare la rigidezza flessionale da quella geometrica

Il contributo dovuto al cambio di geometria risulta poi proporzionale solo all'azione assiale

In sostanza, nelle aste presso-inflesse eseguiamo un calcolo linearizzato

Stabilità di telai elasto-plastici

I telai sono invece sistemi iperstatici di aste presso-inflesse

Le azioni assiali in genere non sono staticamente determinate ma dipendono in modo non lineare dagli spostamenti

Pertanto, in generale, occorrerebbe un'analisi non lineare per poter stabilire l'entità delle azioni interne nei telai

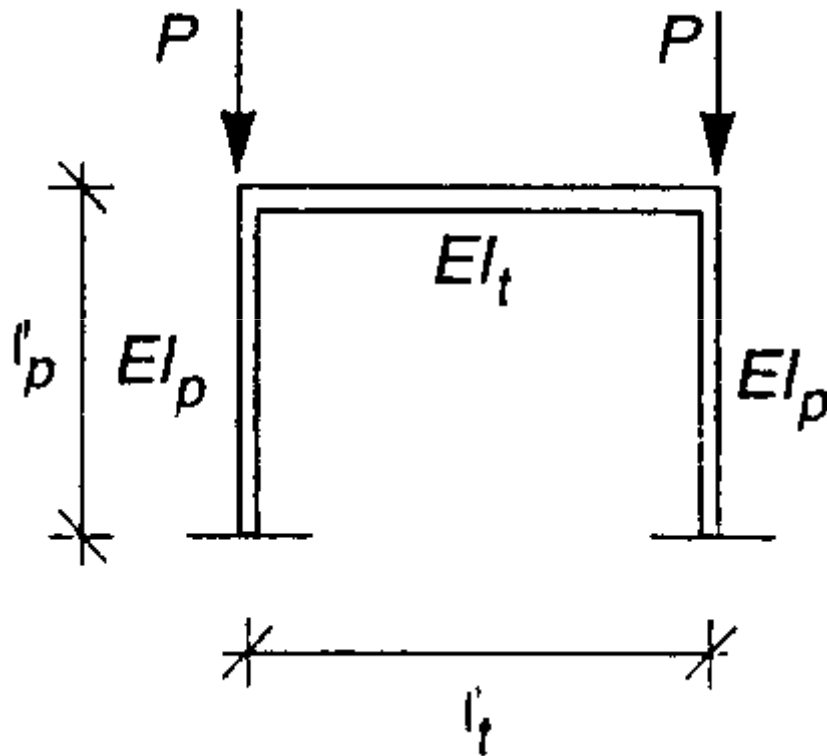
Stabilità di telai elasto-plastici

Spesso, a valle di un'analisi non-lineare, si constata che è tuttavia ancora possibile eseguire un'analisi linearizzata senza compromettere la validità dei risultati

Vediamo dapprima esempi semplici che configurano problemi di instabilità Euleriani

Solo in seguito considereremo casi caratterizzati da non-linearità pre-critica

1° caso elementare: telaio simmetrico caricato simmetricamente non controventato

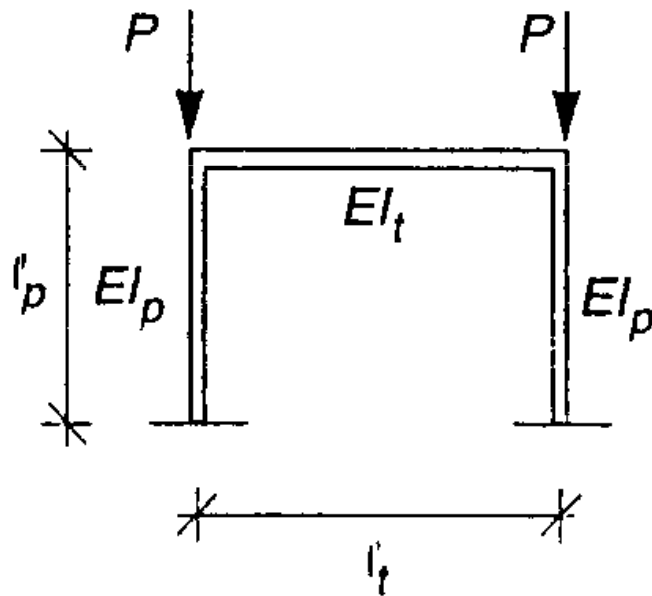


Per il telaio in figura si dimostra che sono possibili percorsi diramati a partire dalla configurazione fondamentale di tipo

- 1) **antisimmetrico**
- 2) **simmetrico**

1° caso elementare: telaio simmetrico caricato simmetricamente incastrato alla base

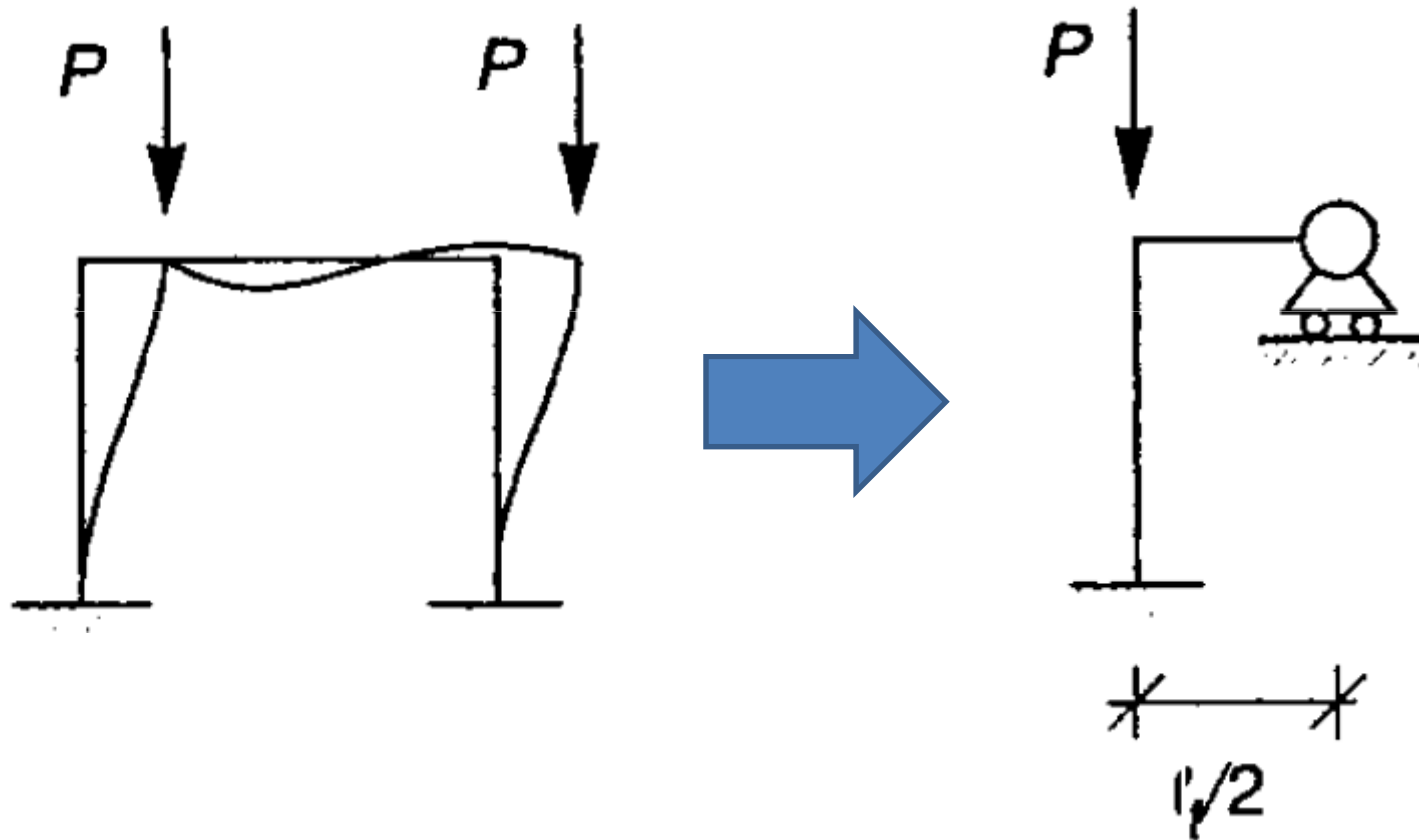
Prima di tutto definiamo i seguenti parametri adimensionali (t: trave, p: pilastro)



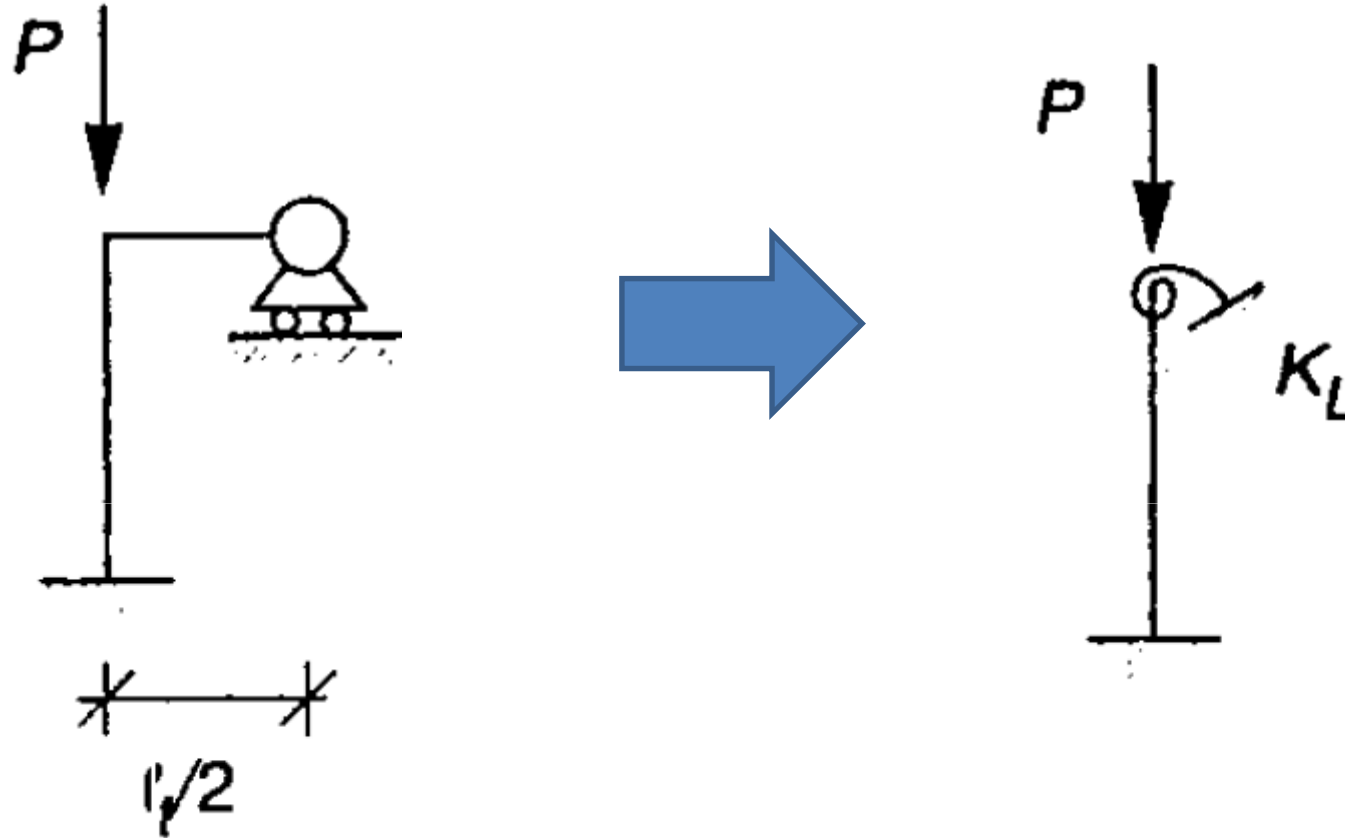
$$p = P \frac{\ell_p^2}{EI_p}$$

$$\psi = \frac{\frac{EI_t}{\ell_t}}{\frac{EI_p}{\ell_p}} = \frac{EI_t}{\ell_t} \frac{\ell_p}{EI_p}$$

Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica



Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica

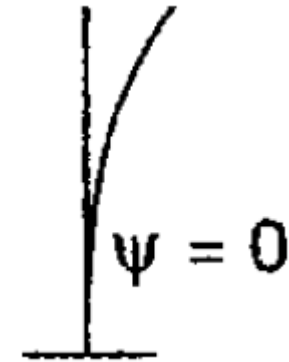


Dove
$$K_L = \frac{3EI_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{6EI_t}{l_t} = 6\psi \frac{EI_p}{l_p}$$

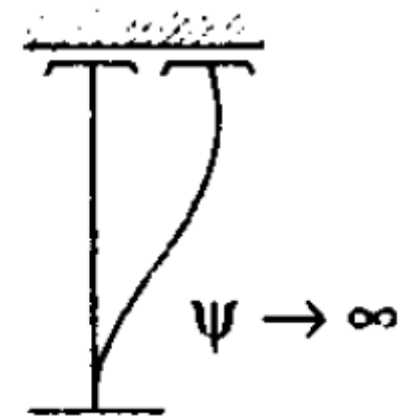
Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica



I° caso limite
Trave molto
flessibile
 $\psi = 0$



II° caso limite
Trave
infinitamente
rigida
 $\psi = \infty$



$$K_L = 6\psi \frac{EI_p}{l_p}$$

Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica

I° caso limite-Trave molto flessibile

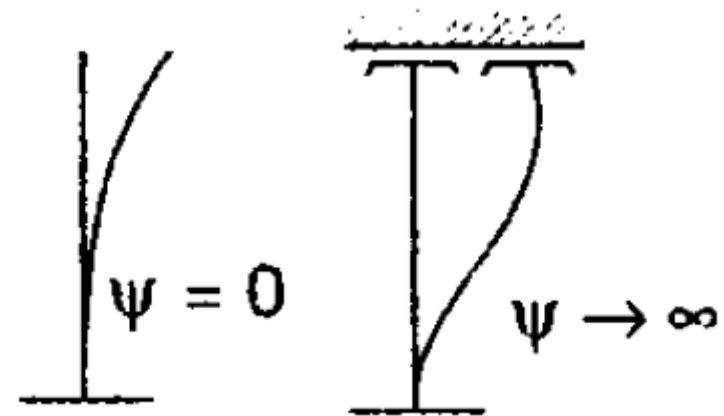
$$P_{EA} = \frac{\pi^2 EI_p}{(2\ell_p)^2} = \frac{\pi^2 EI_p}{4\ell_p^2}$$

**II° caso limite-
Trave infinitamente rigida**

$$P_{EA} = \frac{\pi^2 EI_p}{\ell_p^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{EI_p}{\ell_p^2} \leq P = p_A \frac{EI_p}{\ell_p^2} \leq \pi^2 \frac{EI_p}{\ell_p^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{4} \leq p_A \leq \pi^2$$



Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata antisimmetrica

La stima

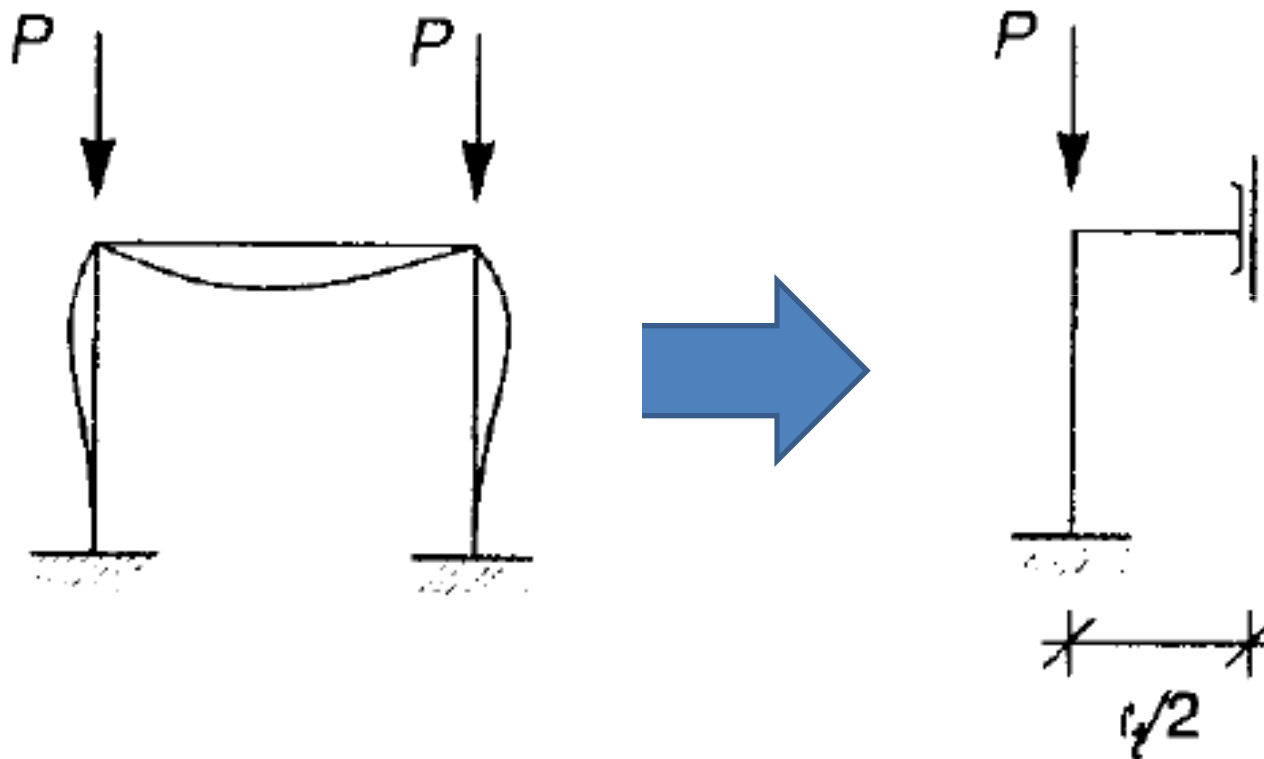
$$\frac{\pi^2}{4} \leq \mathbf{p}_A \leq \pi^2$$

**comporta un errore $\leq 1.3\%$ rispetto ad un calcolo con
1EF hermitiano cubico con cui si ha**

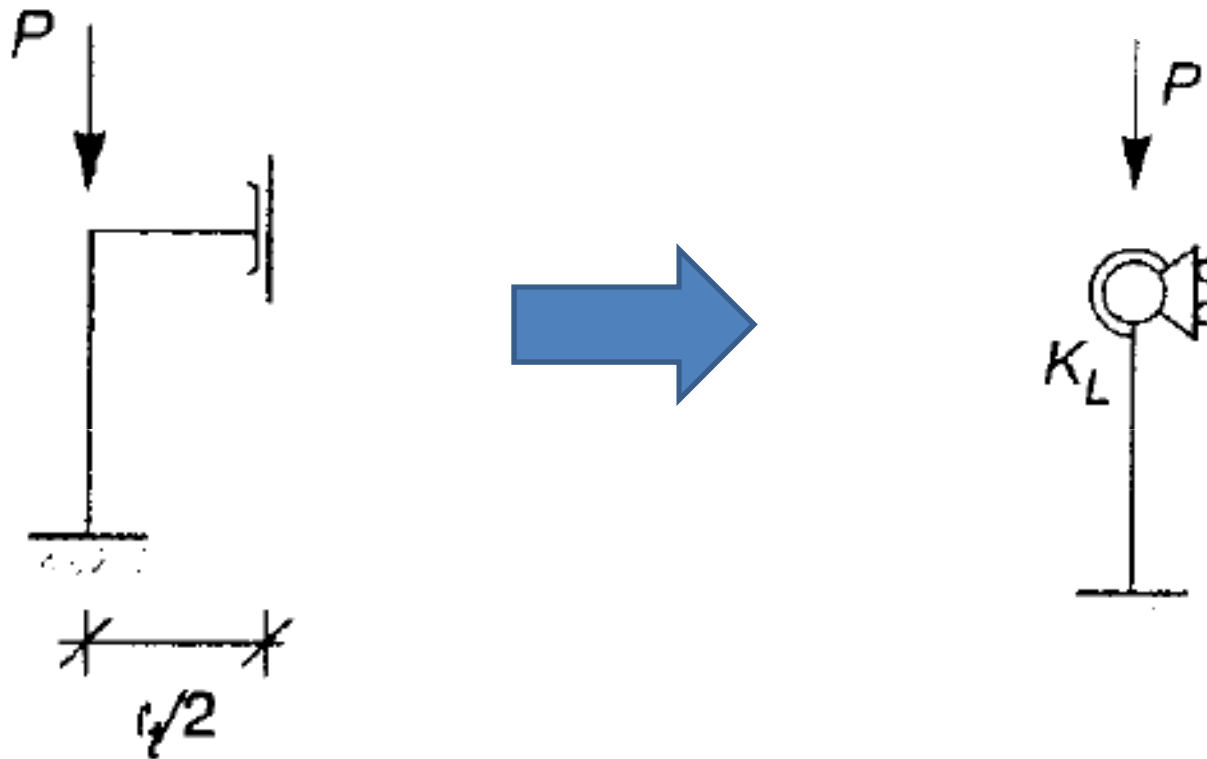
$$\mathbf{p}^{\text{EF}}_A = 10 \frac{2 + 15\psi + 18\psi^2}{8 + 21\psi + 18\psi^2}$$

ed è massimo per le due situazioni limite $\psi = 0, \infty$

Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica



Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica

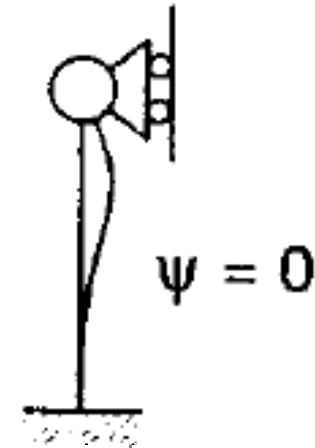


$$K_L = \frac{EI_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{2EI_t}{l_t} = 2\psi \frac{EI_p}{l_p}$$

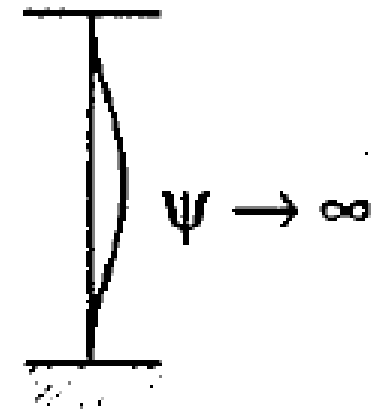
Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica



I° caso limite
Trave molto
flessibile



II° caso limite
Trave
infinitamente
rigida



Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica

I° caso limite-Trave molto flessibile

$$P_S = \frac{\pi^2 EI_p}{(0.699 \ell_p)^2} = \frac{\pi^2 EI_p}{0.699^2 \ell_p^2} = 2.046 \pi^2 \frac{EI_p}{\ell_p^2}$$

II° caso limite- Trave infinitamente rigida

$$P_S = \frac{\pi^2 EI_p}{\frac{\ell_p^2}{4}} = 4\pi^2 \frac{EI_p}{\ell_p^2}$$

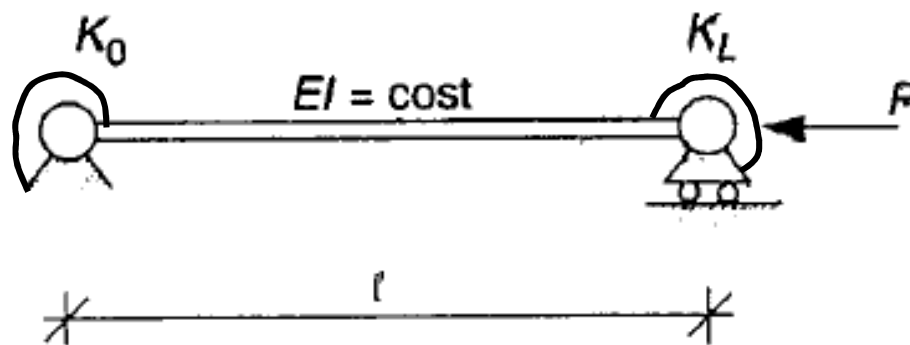
Pertanto

$$2.046\pi^2 \leq p_S \leq 4\pi^2$$

Telaio simmetrico incastrato alla base: deformata simmetrica

Possiamo utilizzare il metodo di Newmark per trovare il carico critico Euleriano nei casi intermedi di ψ

$$P_E = \chi \pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$$



$$\chi = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_L)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_L)} \quad \text{con} \quad \mu_0 = \frac{EI_p}{K_0 \ell_p}, \quad \mu_L = \frac{EI_p}{K_L \ell_p}$$

Nel caso in esame $\mu_0=0$ perché $K_0=\infty$ e $\mu_L=1/(2\psi)$

$$P_s^{Nk} = \chi \pi^2 = 2\pi^2 \frac{1 + 0.8\psi}{1 + 0.4\psi}$$

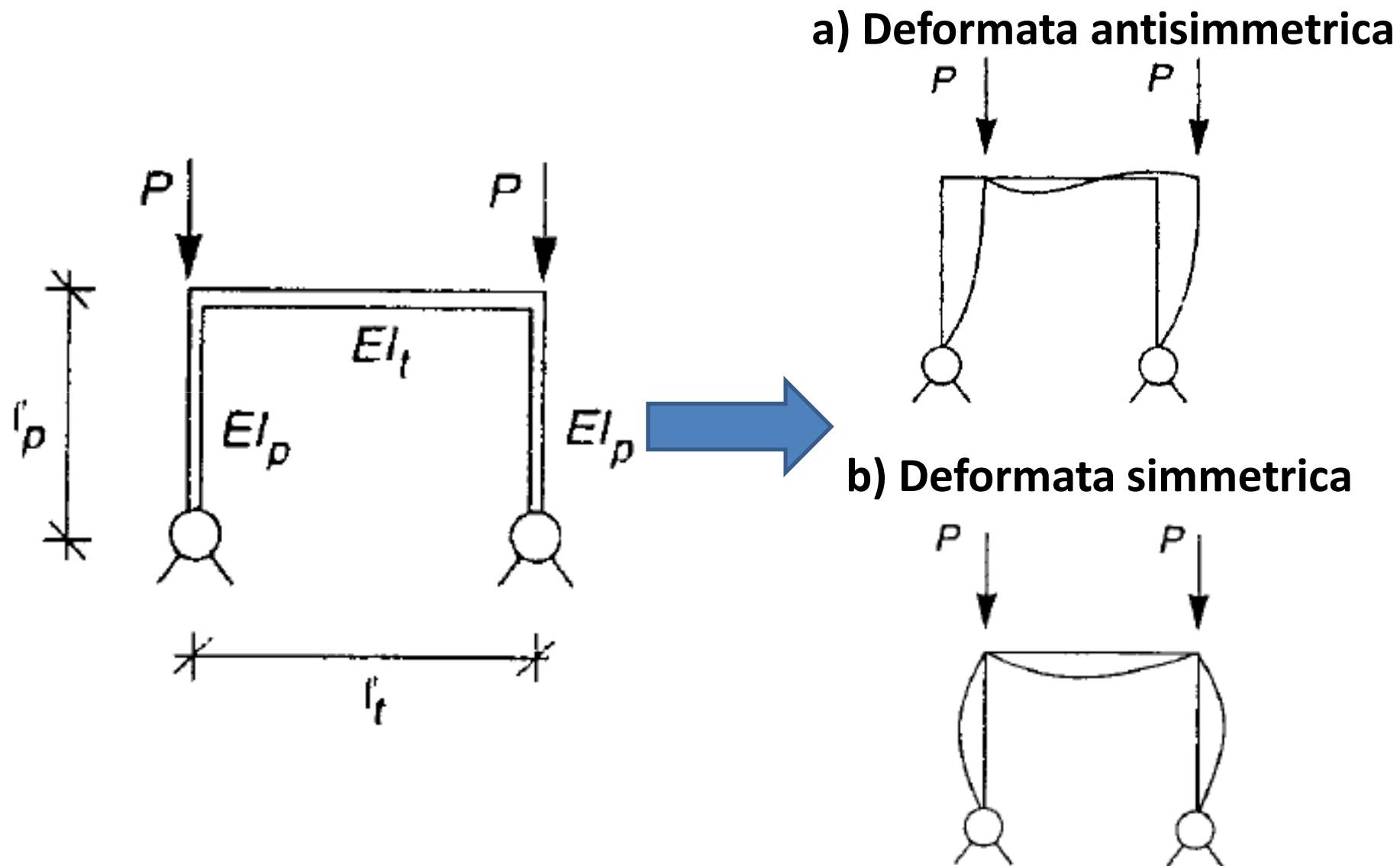
Telaio simmetrico incastrato alla base

Tabella 17.1

Telaio incastrato al piede (Figura 17.11)

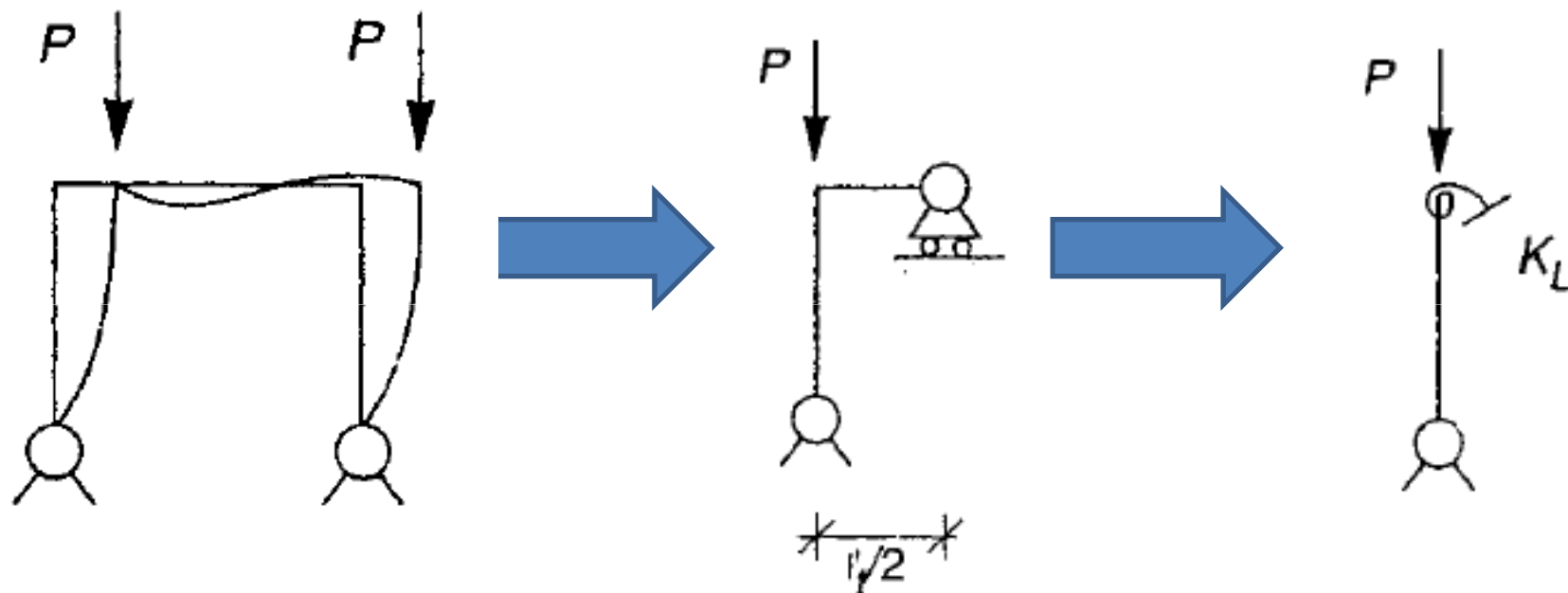
ψ	Deformata antisimmetrica			Deformata simmetrica		
	ρ_A	PA EF	$\frac{\ell_{0A}}{\ell_p}$	ρ_S	Ps Newmark	$\frac{\ell_{0S}}{\ell_p}$
	Esatto [9]			Esatto [9]		
0.0	2.467	2.500	2.0	20.191	19.739	.699
0.2	4.382	4.427	1.501	21.328	21.201	.680
1.	7.382	7.447	1.156	25.167	25.379	.626
2.	8.429	8.525	1.082	28.385	28.512	.590
5.	9.287	9.361	1.031	33.122	32.899	.545
10.	9.554	9.673	1.016	35.925	35.531	.524
∞	9.870	10.000	1.0	39.478	39.478	.5

Telaio simmetrico incernierato alla base



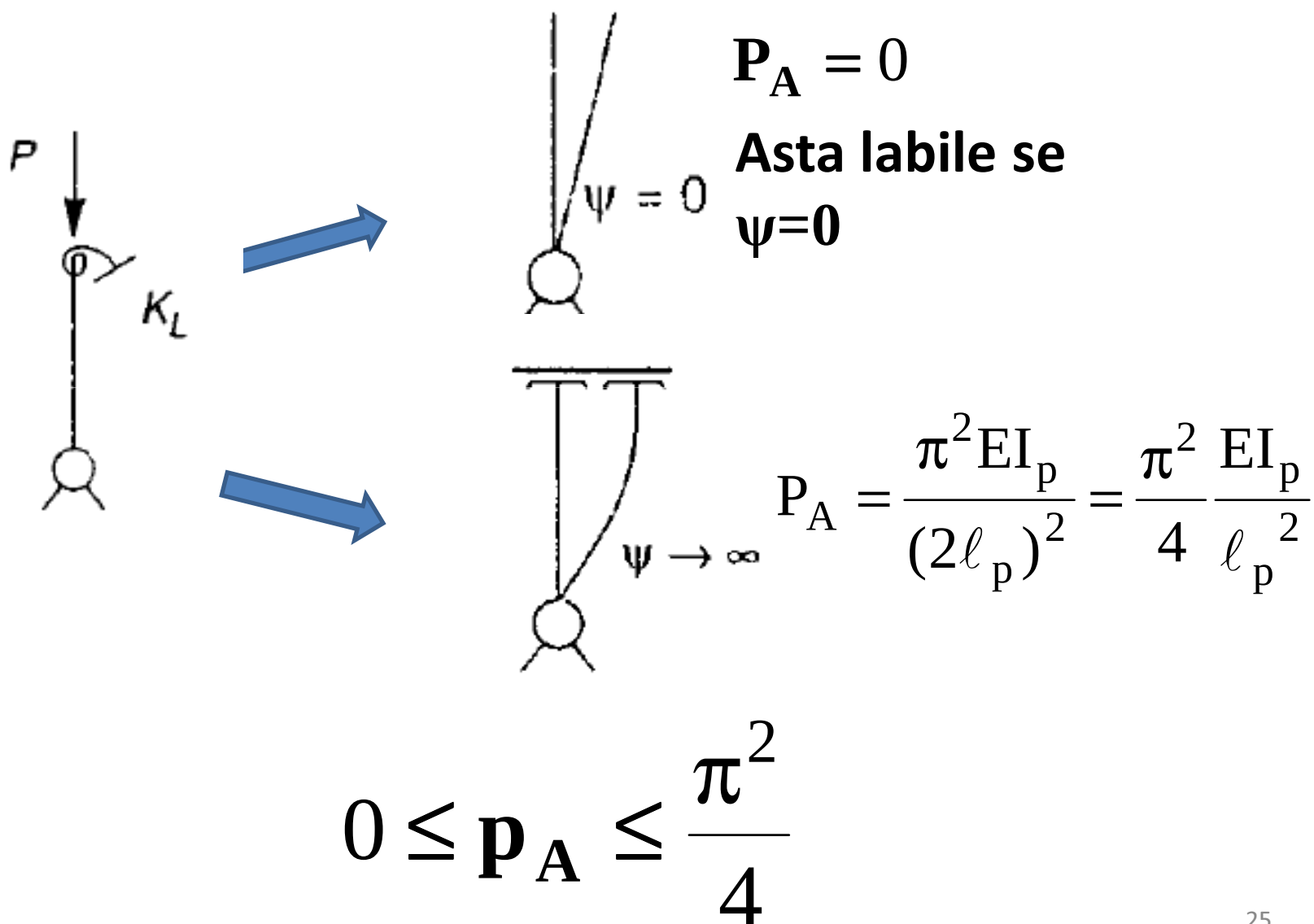
Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata antisimmetrica

Ne risolviamo metà



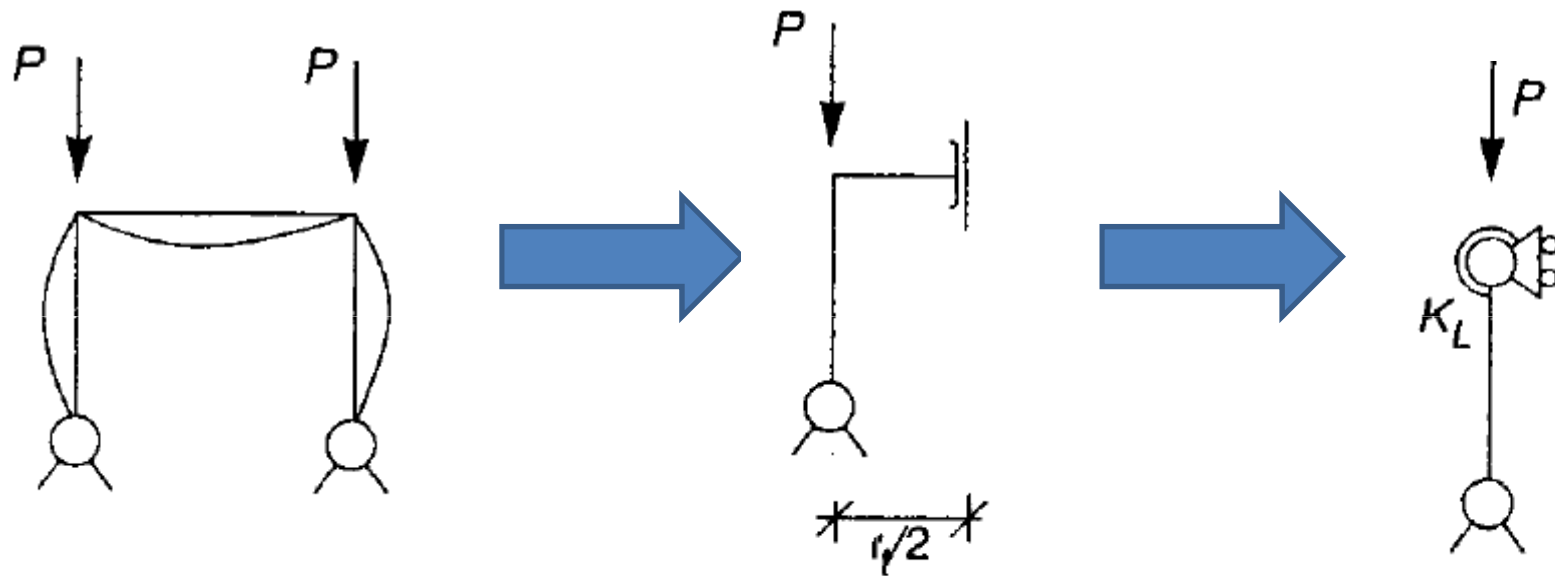
$$K_L = \frac{3EI_t}{\frac{l_t}{2}} = \frac{6EI_t}{l_t} = 6\psi \frac{EI_p}{l_p}$$

Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata antisimmetrica



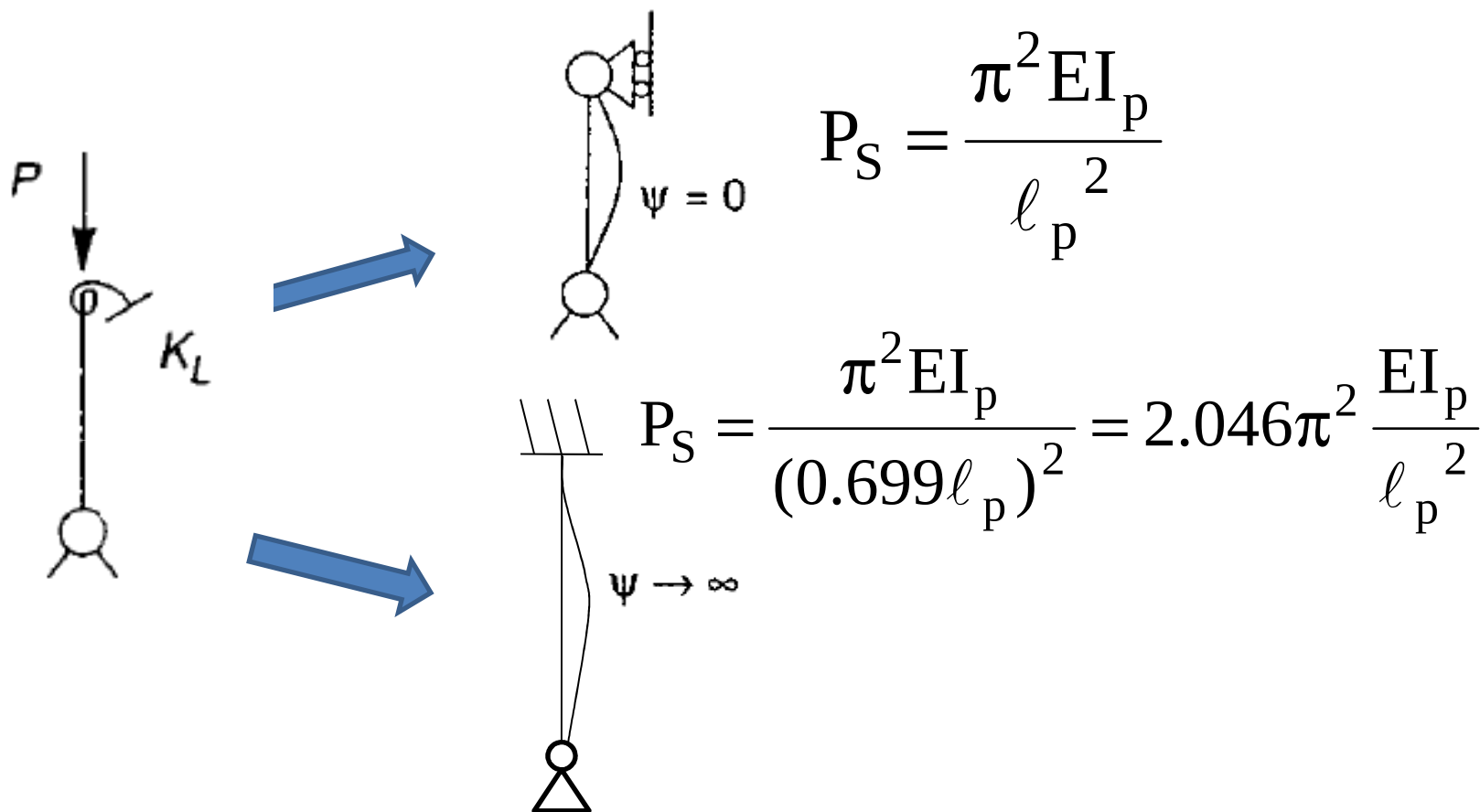
Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata simmetrica

Ne risolviamo metà



$$K_L = \frac{EI_t}{\frac{\ell_t}{2}} = \frac{2EI_t}{\ell_t} = 2\psi \frac{EI_p}{\ell_p}$$

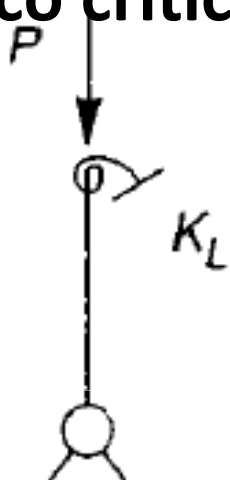
Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata simmetrica



$$\pi^2 \leq p_S \leq 2.046 \pi^2$$

Telaio simmetrico incernierato alla base: deformata simmetrica

Possiamo utilizzare il metodo di Newmark per trovare il carico critico Euleriano nei casi intermedi di ψ



$$\chi = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_L)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_L)}$$

$$\text{con } \mu_0 = \infty, \quad \mu_L = \frac{EI_p}{K_L \ell_p}$$

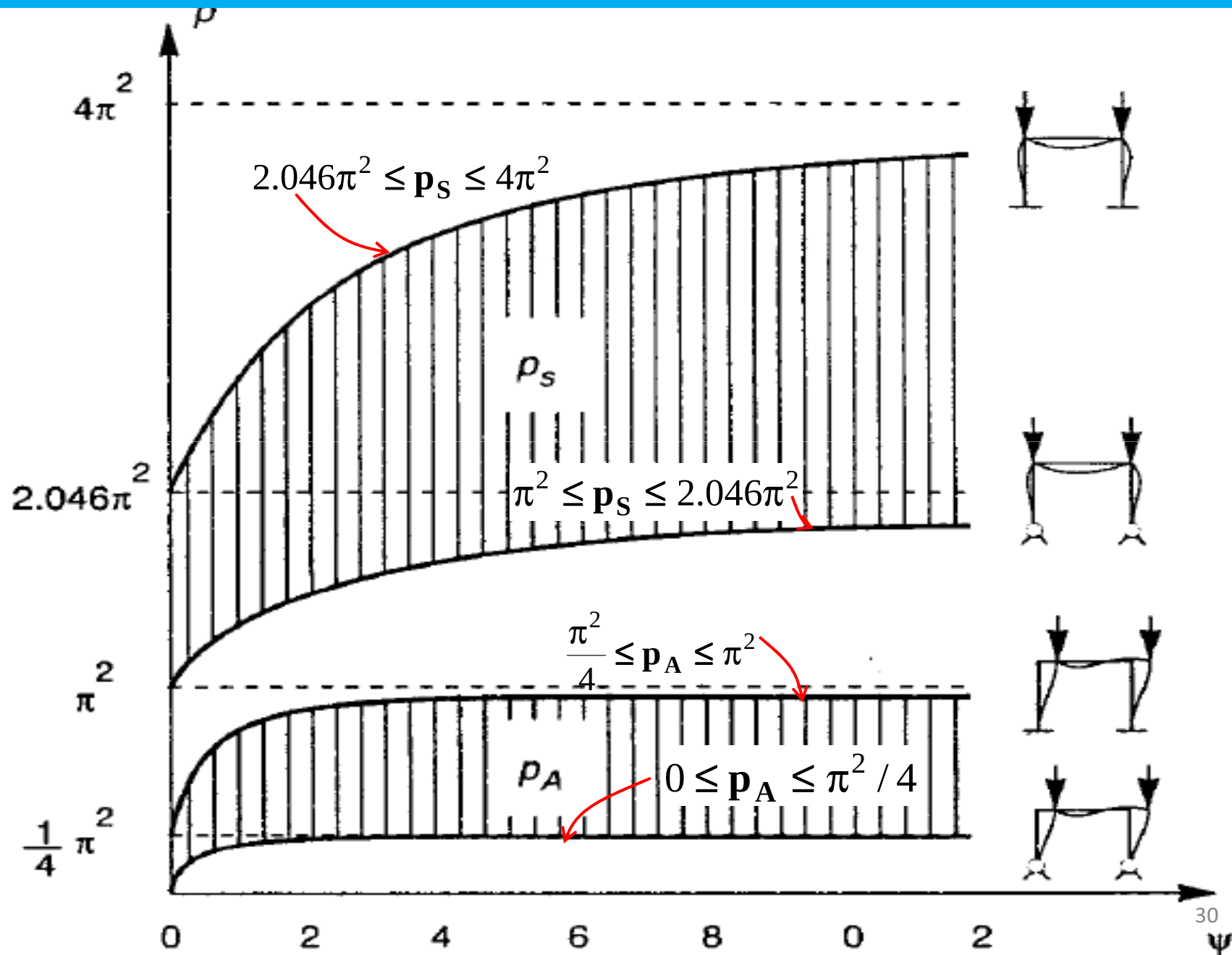
$$p_s = \pi^2 \frac{1 + 0.8\psi}{1 + 0.4\psi}$$

Telaio simmetrico incernierato alla base

Telaio incernierato al piede (Figura 17.14)

ψ	Deformata antisimmetrica			Deformata simmetrica		
	ρ_A		$\frac{\ell_{0A}}{\ell_p}$	ρ_S		$\frac{\ell_{0S}}{\ell_p}$
	Esatto [9]	ρ_A EF		Esatto [9]	ρ_S Newmark	
0.0	0.0	0.0	∞	9.870	9.870	1.0
0.2	0.819	0.843	3.371	10.630	10.601	.963
1.	1.826	1.837	2.325	12.890	12.689	.875
2.	2.102	2.128	2.167	14.666	14.256	.814
5.	2.300	2.340	2.071	17.074	16.449	.761
10.	2.388	2.418	2.033	18.417	17.765	.733
∞	2.467	2.500	2.0	20.191	19.739	.699

Telaio simmetrico incernierato alla base



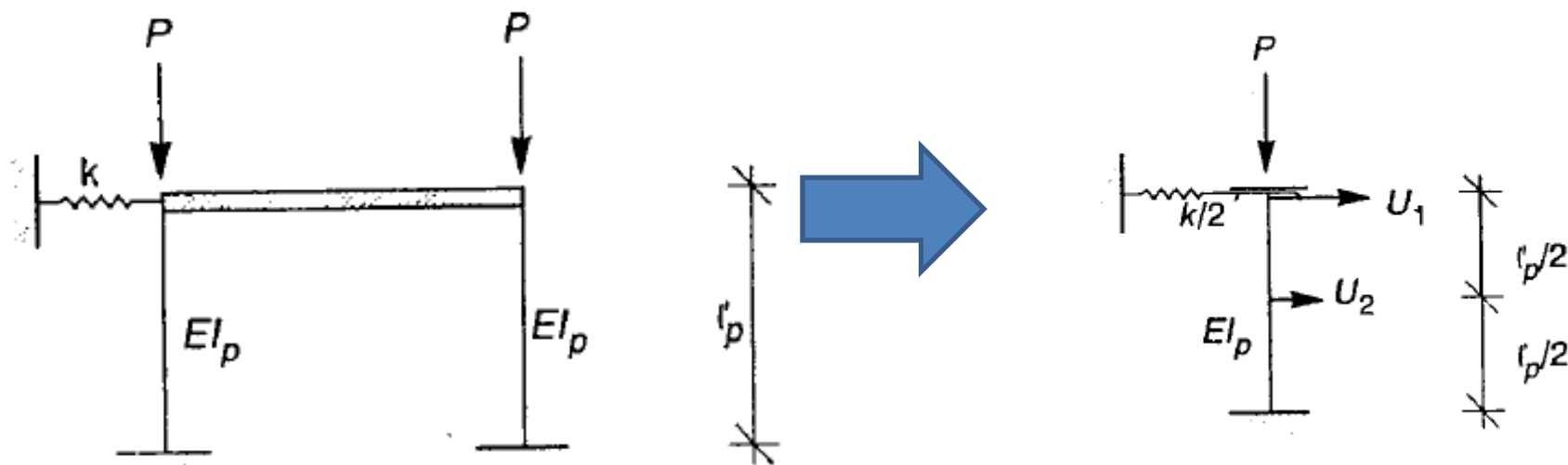
Telaio simmetrico incernierato od incastrato alla base: osservazioni

- 1) Con riferimento al grafico precedente, le zone tratteggiate devono essere interpretate come l'insieme dei punti che definiscono i carichi critici di telai simmetrici vincolati da cerniere elastiche alla base dotate di molle elastiche**
- 2) Si ha sempre $p_A < p_S$: infatti l'instabilità corrisponde ad uno sbandamento secondo un modo antisimmetrico: la trave non contrasta lo spostamento orizzontale dei pilastri fungendo da semplice elemento distanziatore**

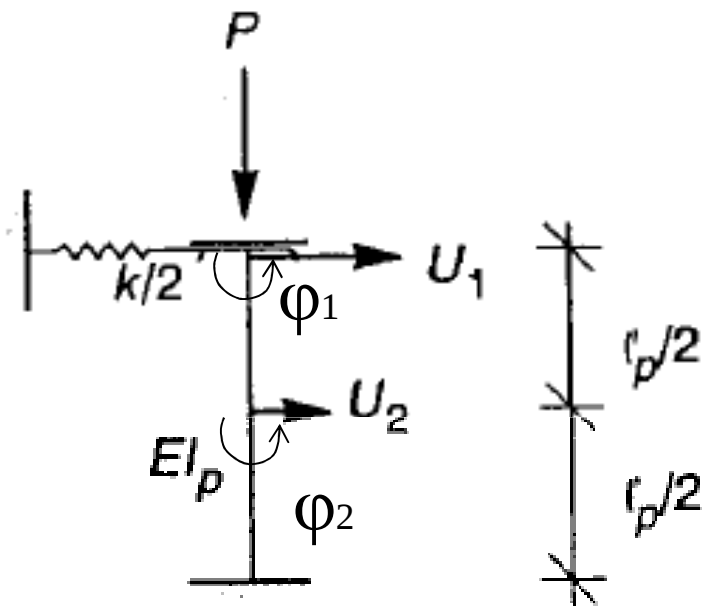
Telaio controventato

Possono essere presenti dei controventi che forniscono un'ulteriore rigidità atta a contrastare lo spostamento orizzontale

Si suppone che il traverso sia molto più rigido del pilastro ovvero $\psi=0$



Telaio controventato

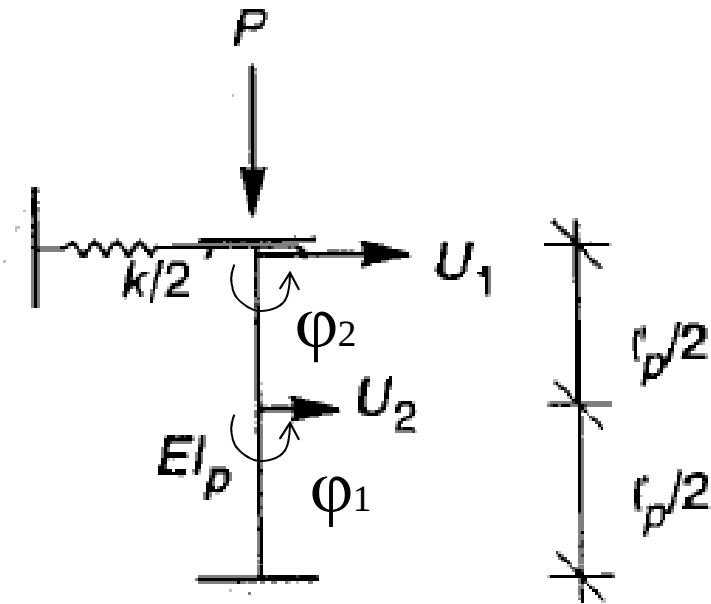


La presenza della molla impone che occorranza almeno 2 elementi finiti per approssimare numericamente il carico critico del pilastro in quanto il solo grado di libertà del nodo superiore non garantisce l'adeguatezza del modello

Con rif. alla figura, i gradi di libertà sono:

$$U_1, \phi_1, U_2, \phi_2$$

Telaio controventato



È possibile ricondurre il problema discreto ad una matrice di rigidezza relativa ai soli gradi di libertà traslazionali

$$\mathbf{K}^* = \frac{8EI_p}{\ell_p^3} \begin{bmatrix} 24 - 36\mathbf{p} & -12 + 18\mathbf{p} \\ -12 + 18\mathbf{p} & 7.5 + \beta - 18\mathbf{p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}\ell_p^2}{60EI_p}, \quad \beta = \frac{k\ell_p^3}{16EI_p}$$

Telaio controventato

Det(K*)=0 per $\mathbf{p_A} = \frac{3+2\beta}{18}, \quad \mathbf{p_S} = \frac{2}{3}$

Cui corrispondono i carichi critici

$$\mathbf{P_A} = \left(10 + \frac{5 \mathbf{k} \ell_p^3}{12 \mathbf{EI_p}}\right) \frac{\mathbf{EI_p}}{\ell_p^2}, \quad \mathbf{P_S} = 40 \frac{\mathbf{EI_p}}{\ell_p^2}$$

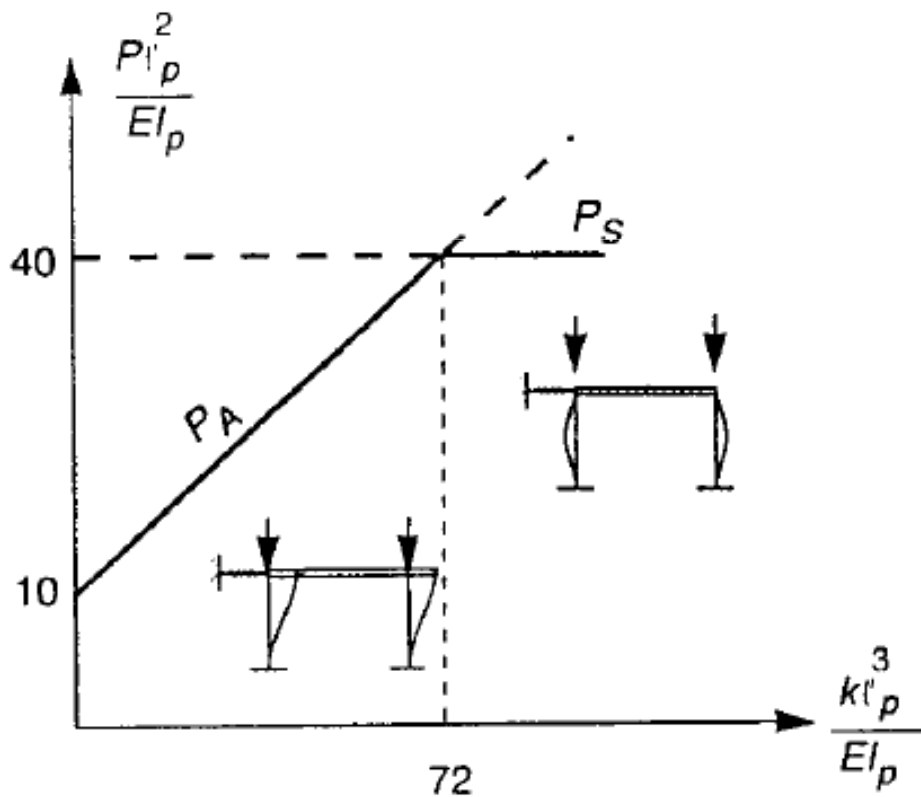
P_A si riferisce ad una deformata antisimmetrica

P_s ad una deformata simmetrica

OSS: la molla compare solo in P_A ma non in P_s

Telaio controventato

Diagramma di $P_A = \left(10 + \frac{5}{12} \frac{k \ell_p^3}{EI_p}\right) \frac{EI_p}{\ell_p^2}$, $P_S = 40 \frac{EI_p}{\ell_p^2}$



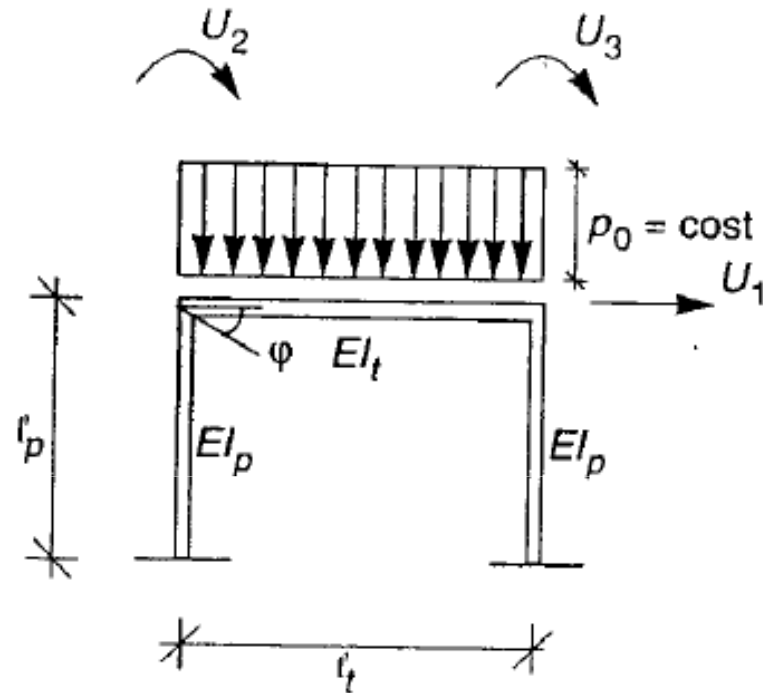
La linea piena indica il carico critico $P_c = \min\{P_A, P_S\}$

Se la molla è cedevole la deformata critica è antisimmetrica

P_c aumenta con k fino a $k=72$, dopo non aumenta anche se la molla diventa sempre più rigida

Per $k \rightarrow \infty$ modo simmetrico (telaio nodi fissi)

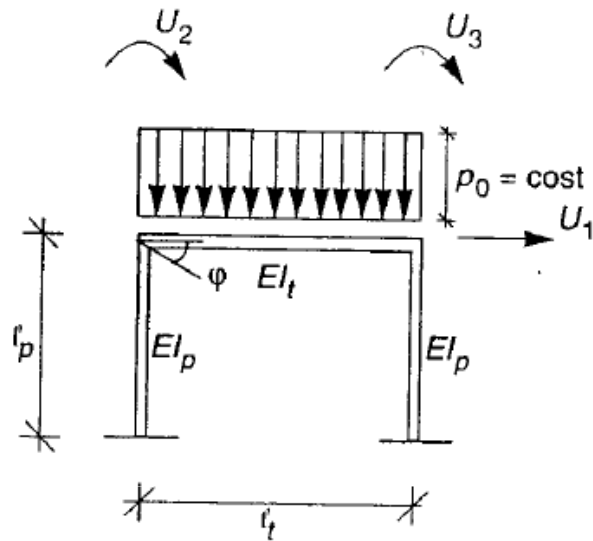
Analisi non-lineare di Telai simmetrici inflessi nella configurazione fondamentale



In genere la configurazione fondamentale di un telaio è inflessa e non indeformata

Nel caso in figura la deformata fondamentale sarà simmetrica

Analisi non-lineare di Telai simmetrici

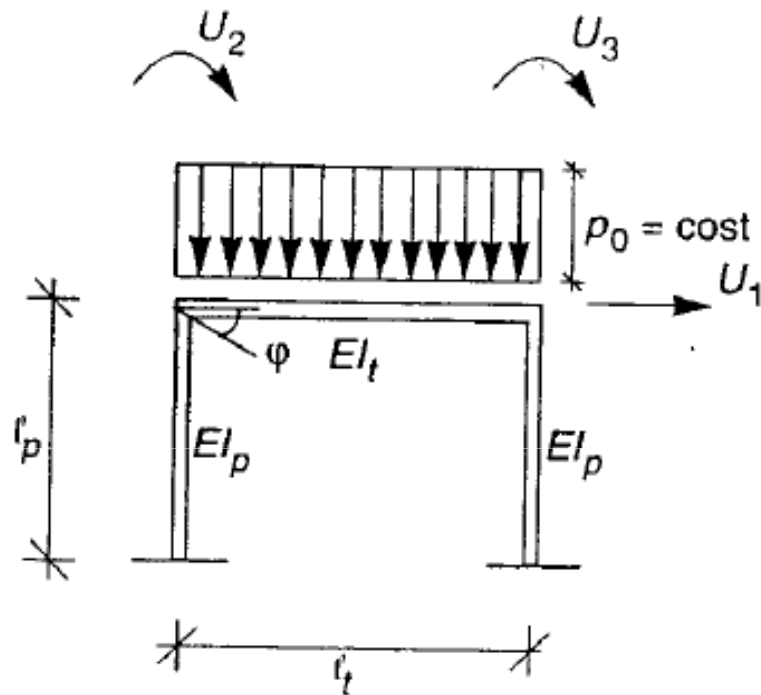


È noto lo sforzo normale N_p nei pilastri

$$N_p = -\frac{1}{2} p_0 l_t = -Q$$

Mentre lo sforzo normale N_t nella trave è a rigore incognito in quanto azione iperstatica che dipende dalla deformabilità della struttura in modo non-lineare → il problema che ne deriva è non-Euleriano nel senso che le azioni interne sono funzioni non-lineari dei carichi

Analisi non-lineare di Telai inflessi simmetrici

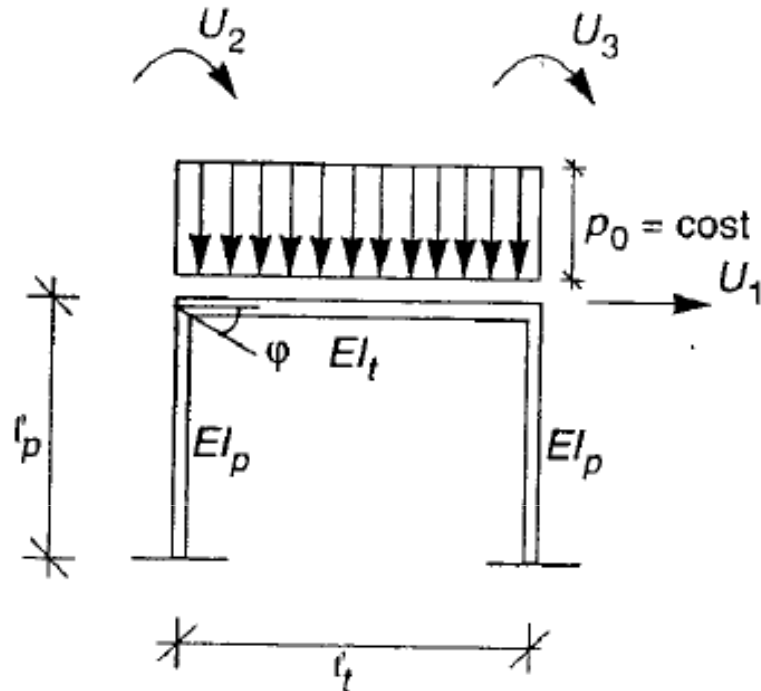


Per semplificare il problema assumiamo che N_t abbia il valore corrispondente all'ipotesi di piccoli spostamenti ovvero sia proporzionale a Q (NB: è un'ipotesi da verificare)

$$N_t = -Q \frac{\eta^2}{4\eta + 2\rho}$$

$$\rho = \frac{EI_t}{EI_p}, \quad \eta = \frac{l_t}{l_p}$$

Analisi non-lineare di Telai inflessi nella configurazione fondamentale



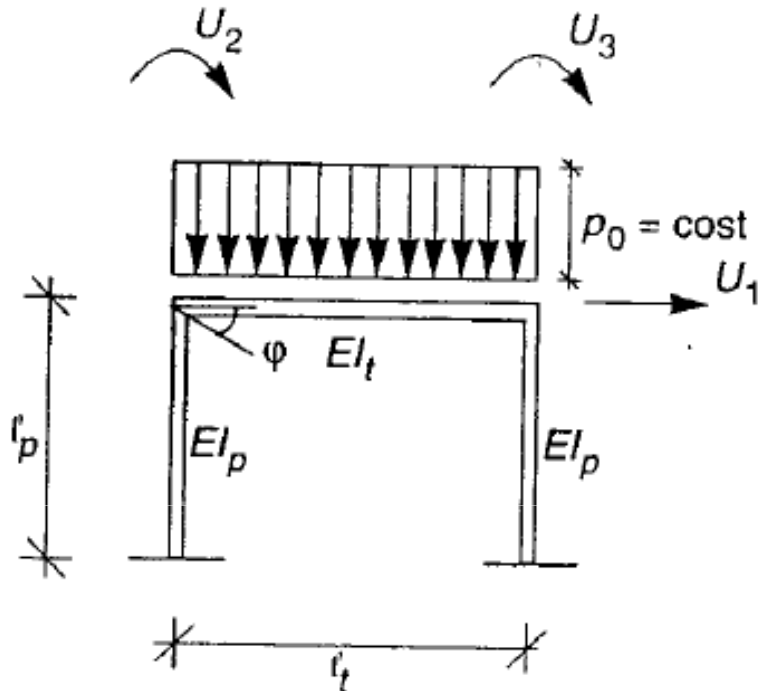
Il problema della stabilità dell'equilibrio si può approssimare al II ordine e, per es. con il metodo degli elementi finiti, si può ricondurre alla forma discreta

$$(\mathbf{K}_E - \mathbf{Q}\mathbf{K}_G)\mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{P}_0$$

$\mathbf{P}_0$ Carico base unitario

$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{P}_0$ Vettore delle forze nodali equivalenti al carico distribuito sulla trave

Analisi non lineare approssimata



Poniamo

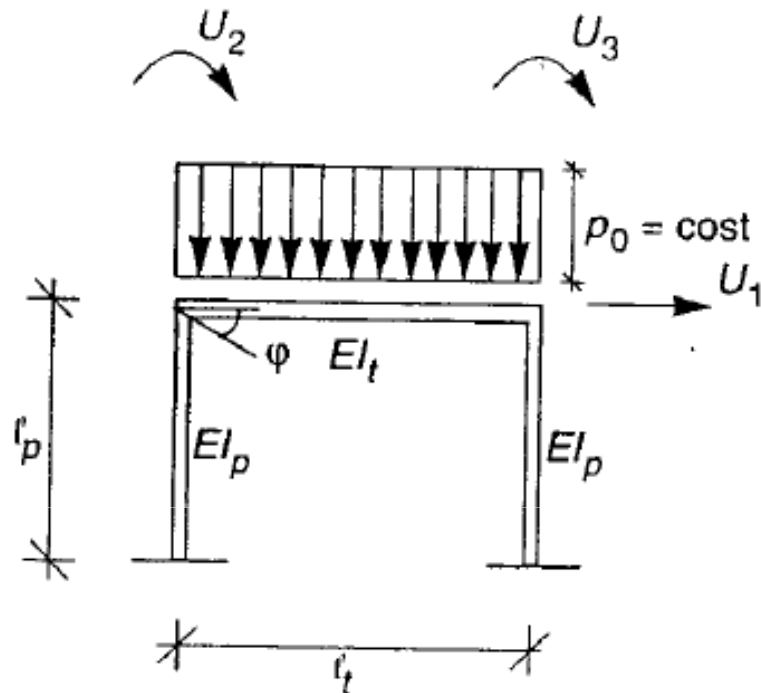
$$EI_t = 10EI, \quad EI_p = EI$$

$$l_t = 2l, \quad l_p = l$$

$$q = \frac{Ql^2}{EI}$$

Se trascuriamo la deformabilità assiale, e consideriamo per esempio 3 elementi finiti hermitiani, uno per elemento strutturale, i gradi di libertà sono U_1, U_2, U_3 ;

Analisi non lineare approssimata



$$(\mathbf{K}_E - \mathbf{QK}_G)\mathbf{U} = \mathbf{QP}_0$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{Q}\ell^2}{\mathbf{EI}}$$

il Sistema ammette soluzione per un determinato vettore dei gradi di libertà $[U_1, U_2, U_3]$ dove U_2 ed U_3 sono le rotazioni dei nodi. In pratica si ottiene che $[U_1, U_2, U_3]$ sono funzioni **non lineari** del carico adimensionalizzato $\mathbf{q}$

Analisi non lineare approssimata

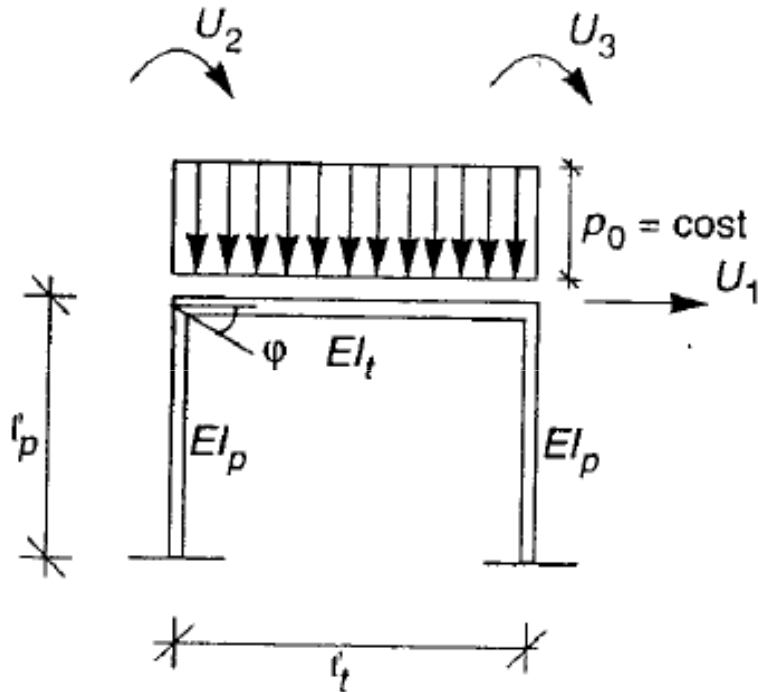
Per esempio se si trascura la deformabilità assiale della trave si ha che la soluzione del problema dell'equilibrio

$$(\mathbf{K}_E - \mathbf{Q}\mathbf{K}_G)\mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{P}_0$$

implica che

$$1) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 = 0 \\ \mathbf{U}_3 = \varphi \\ \mathbf{U}_2 = -\varphi \end{bmatrix}$$

2) φ funzione non lineare di q



Analisi non lineare approssimata

Tuttavia il risultato ottenuto usando 3 EF non è attendibile → **Occorre considerarne almeno 2 per pilastro e 4 per la trave**

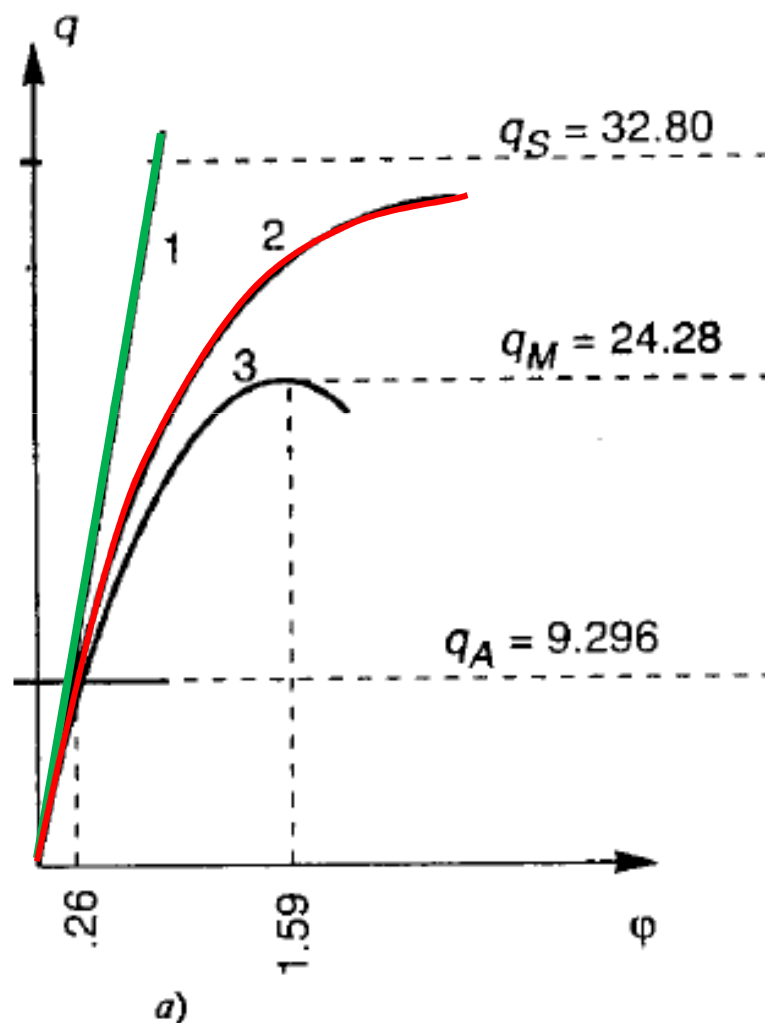
Si ha che la configurazione fondamentale è maggiormente inflessa rispetto al caso con 3 soli EF

Esistono dei valori per cui la matrice dei coefficienti associata al sistema omogeneo diviene singolare
I primi 2 valori sono i seguenti

$$q_S = 32.80, \quad q_A = 9.296$$

Dove q_S configura un modo simmetrico mentre q_A un modo antisimmetrico

Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



1: Piccoli spostamenti

2: 4EF trave+2EFpilastro

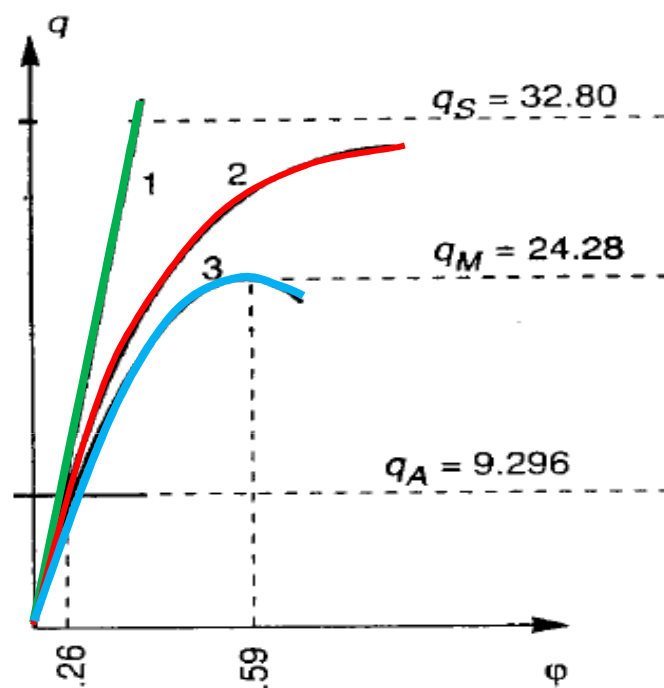
$$q_S = 32.80, \quad q_A = 9.296$$

L'ampiezza della
configurazione fondamentale
simmetrica cresce e diviene
illimitata per $q_S=32.80$

Ma ben prima si perde
l'unicità della risposta dato
che ho un punto di
biforcazione per $q_A=9.296$

Per $q=q_A$ il telaio ha perso
rigidezza nei confronti dello
sbandamento laterale

Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi

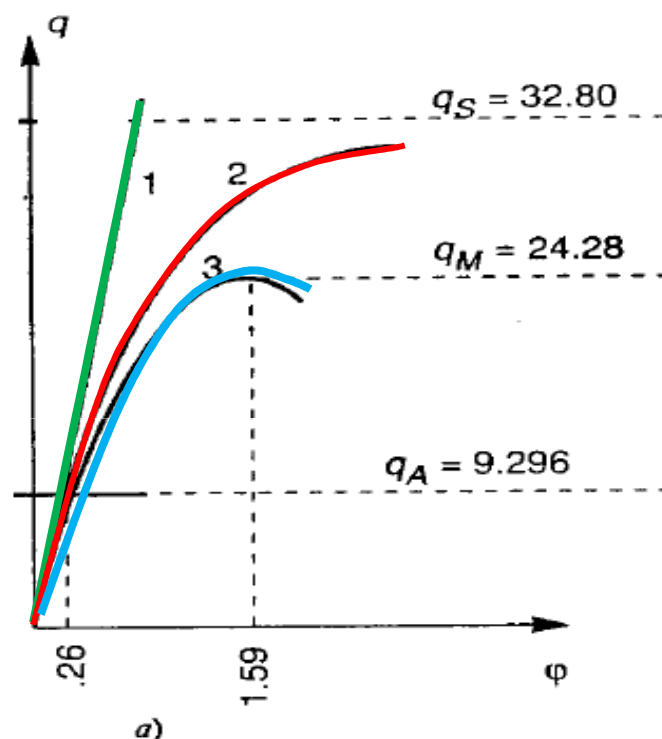


- 1: Piccoli spostamenti**
- 2: analisi non lineare
approssimata 4EF
trave+2EFpilastro**
- 3: calcolo non lineare**

Un calcolo non lineare rigoroso conduce invece alla risposta 3 in figura, che vede un picco $q_M = 24.28$ inferiore al valore $q_S = 32.80$

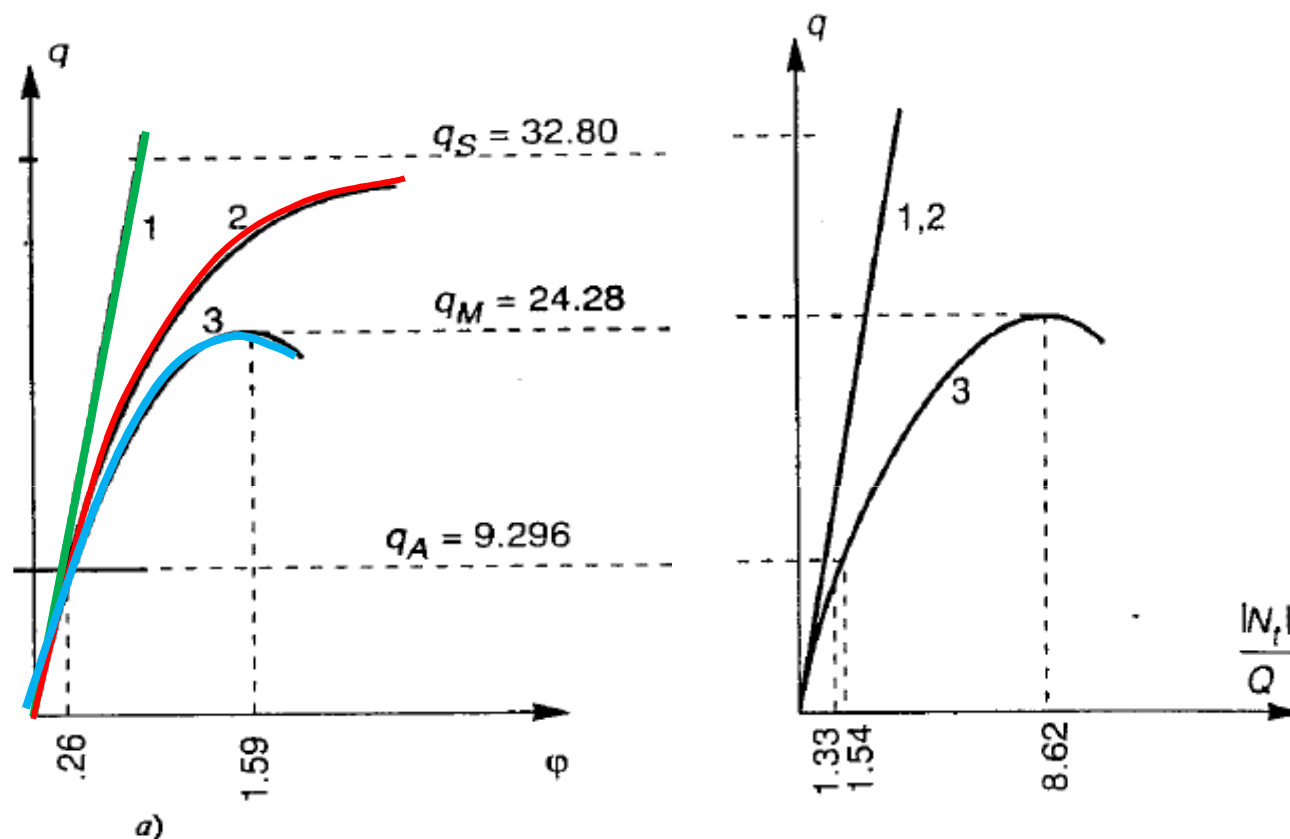
Per $q = q_S$ la rigidezza della configurazione fondamentale svanisce e si ha instabilità a scatto

Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



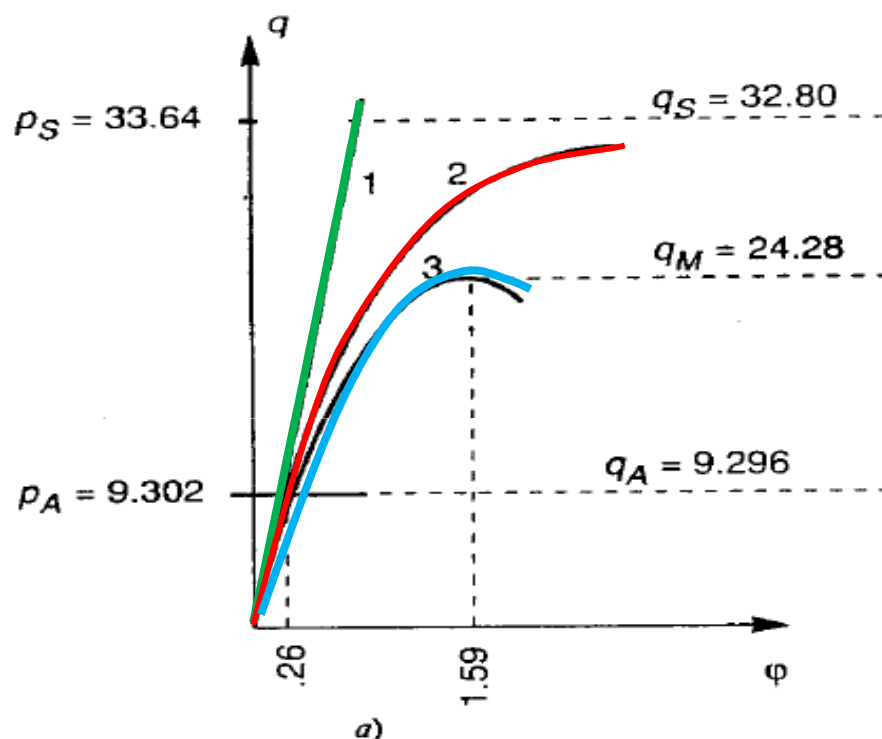
Tuttavia in questo caso specifico, la perdita di rigidità nei confronti dello sbandamento laterale si perde ben prima del picco. Ed in questo ambito la non linearità non ha grandi implicazioni → non abbiamo commesso un errore elevato nel considerare N_t funzione lineare del carico.

Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



Errore commesso sul calcolo di N_t in corrispondenza del carico di biforcazione P_A considerando N_t funzione lineare di Q rispetto al caso in cui N_t è funzione non-lineare di Q è di circa il $14\% = |1.33 - 1.54| / 1.54$

Telaio inflesso confronto tra tipi di analisi



Se avessi trascurato del tutto la deformabilità assiale di trave e pilastri avrei fatto un'analisi come quella vista per il telaio incastrato ed incernierato alla base ed avrei trovato

$$q_S = 33.64 \quad q_A = 9.302$$

che comportano un errore trascurabile dell'ordine del 0,1 %

Considerazioni sul calcolo del carico critico di telai simmetrici non controventati

Quindi nel caso del telaio esaminato possiamo osservare che l'evento critico è lo sbandamento laterale

- 1) Il problema è, a rigore, non lineare in quanto la deformabilità assiale e la non trascurabilità degli spostamenti rende N_t funzione non lineare dei carichi (N_p è lineare in Q per equilibrio verticale)**
- 2) Se si suppone che N_t sia una funzione lineare dei carichi il calcolo è ancora non lineare ma risulta semplificato e si commette un errore sul valore di N_t di circa il 14%**
- 3) Se si trascura del tutto la deformabilità assiale si considera solo N_p e non N_t e si studia il telaio in cui riporto i carichi ai nodi dei pilastri; commetto un errore del 0.1% nel valutare q_A**

Considerazioni sul calcolo del carico critico di telai simmetrici non controventati

Per esempio, nel telaio in esame un'analisi agli autovalori che consideri solo i pilastri e trascuri lo sforzo normale nelle travi porta ai valori del rapporto tra il carico critico p_A e quello q_A calcolato con un'analisi non lineare semplificata che assume N_t proporzionale ai carichi illustrati in tabella al variare dei rapporti tra la rigidezza della trave e quella dei pilastri

Rapporto q_A/p_A per telai incastrati al piede					
l_t/l_p	1	2	3	4	5
EI_t/EI_p					
20.	1.	1.	.999	.998	.993
10.	1.	.999	.996	.986	.957
5.	1.	.997	.981	.930	.638*
2.	.998	.978	.899	.654*	.380*
1.	.996	.941	.790	.462*	.263*
0.5	.986	.892	.650*	.309*	.171 ₅₁

Considerazioni sul calcolo del carico critico di telai simmetrici non controventati

Quindi in conclusione l'errore che si commette nel considerare il problema della stabilità di telai non controventati come Euleriano è trascurabile rispetto ad un'analisi non lineare a condizione che il ruolo della compressione nelle travi sia trascurabile. Occorre che la rigidezza flessionale della trave sia maggiore od almeno comparabile con quella dei pilastri.

Tale approssimazione non vale quando le travi sono molto deformabili e diventano gli elementi strutturali deboli nei confronti della perdita di stabilità.

Capacità portante di telai elasto-plastici

Un telaio simmetrico non controventato soggetto a soli carichi verticali si comporta in modo simile ad un'asta compressa : la deformata simmetrica svolge il ruolo di configurazione fondamentale

Il telaio mantiene integra la rigidezza fino a che si raggiunge il primo punto di biforcazione , quando un modo di sbandamento diventa possibile

Capacità portante di telai elasto-plastici

Se compaiono anche carichi trasversali allora il telaio si comporta come un'asta presso-inflessa

La configurazione di equilibrio presenta fin dall'inizio uno spostamento orizzontale e partecipa del modo critico

Gli spostamenti crescono più che linearmente col carico fino a diventare teoricamente illimitati in corrispondenza del primo carico critico

Ma questo valore dello spostamento non può essere avvicinato dato che si esauriscono ben prima le risorse elastiche del materiale

Capacità portante di telai elasto-plastici

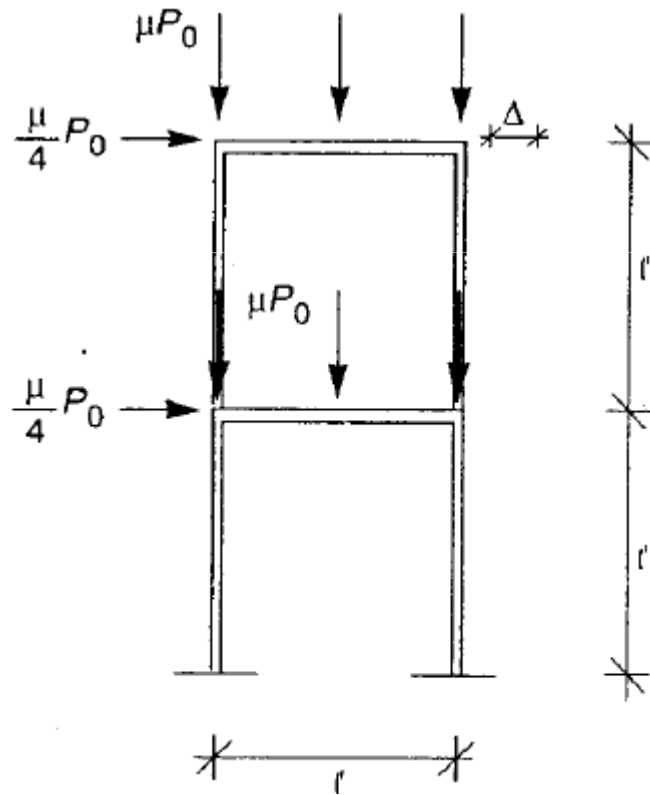
Nei telai elasto-plastici l'instabilità deriva da un'interazione tra stabilità e plasticità :

Alla perdita di rigidezza indotta dalla presenza di spostamento non trascurabili si aggiunge la perdita di rigidezza dovuta al diffondersi della plasticizzazione

La struttura collassa sotto carichi inferiori a quelli previsti da un'analisi limite condotta nell'ipotesi di piccoli spostamenti

Esempio

Con riferimento al telaio in figura è possibile eseguire un'analisi elasto-plastica in piccoli spostamenti

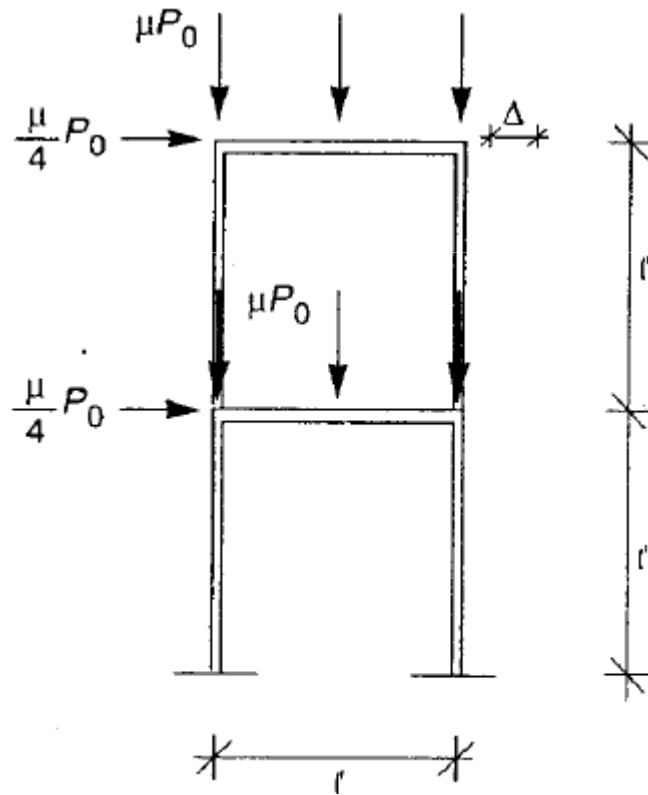


Gli elementi strutturali hanno
tutti egual lunghezza, rigidezza
e momento limite M_0
In particolare si assuma che

$$M_0 = \frac{7}{60} \frac{EI}{\ell}$$

Si trascura inoltre l'interazione
tra M ed N ai fini del calcolo

Esempio

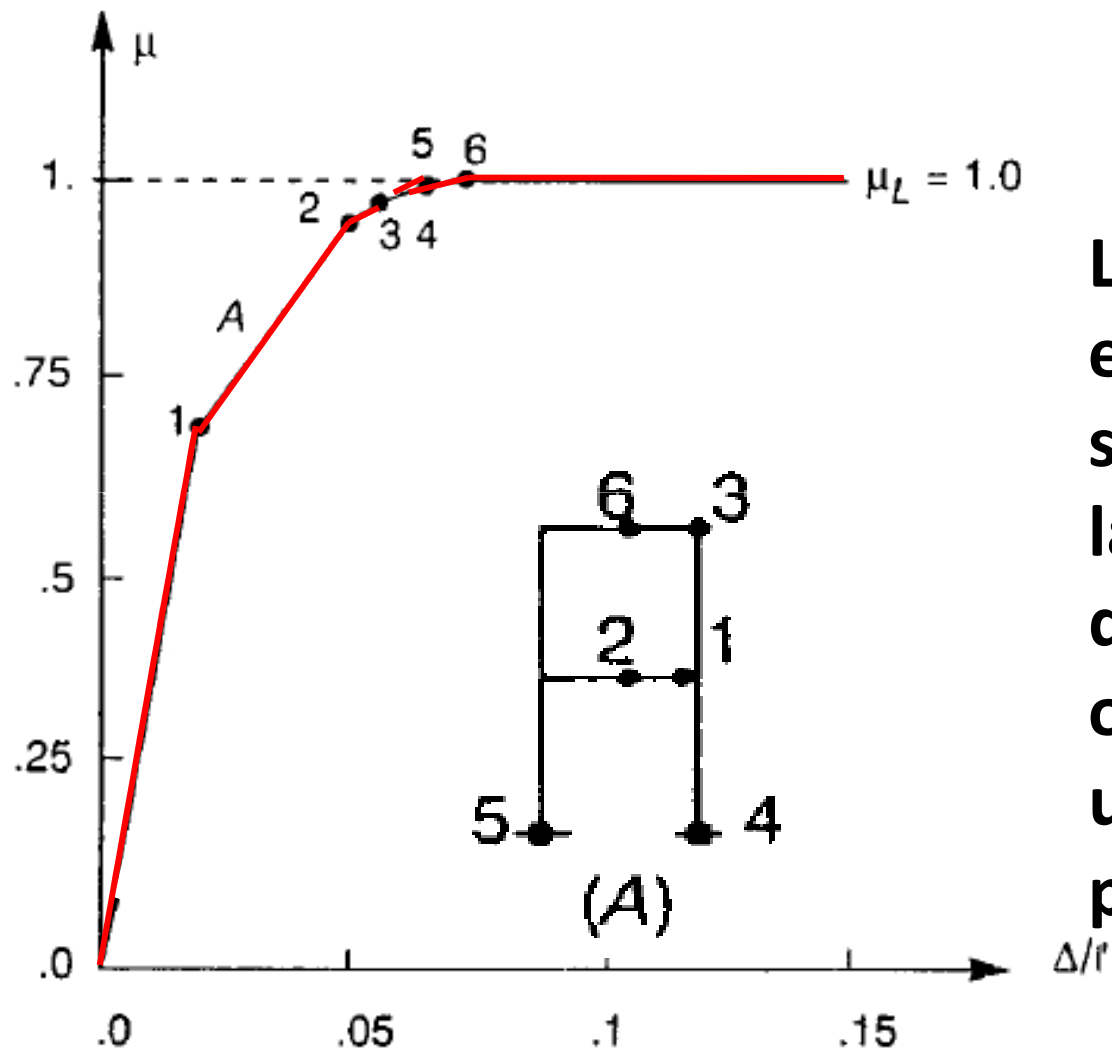


Come valore del carico base assumiamo

$$P_0 = \frac{2 EI}{3 \ell^2} = \frac{40 M_0}{7 \ell}$$

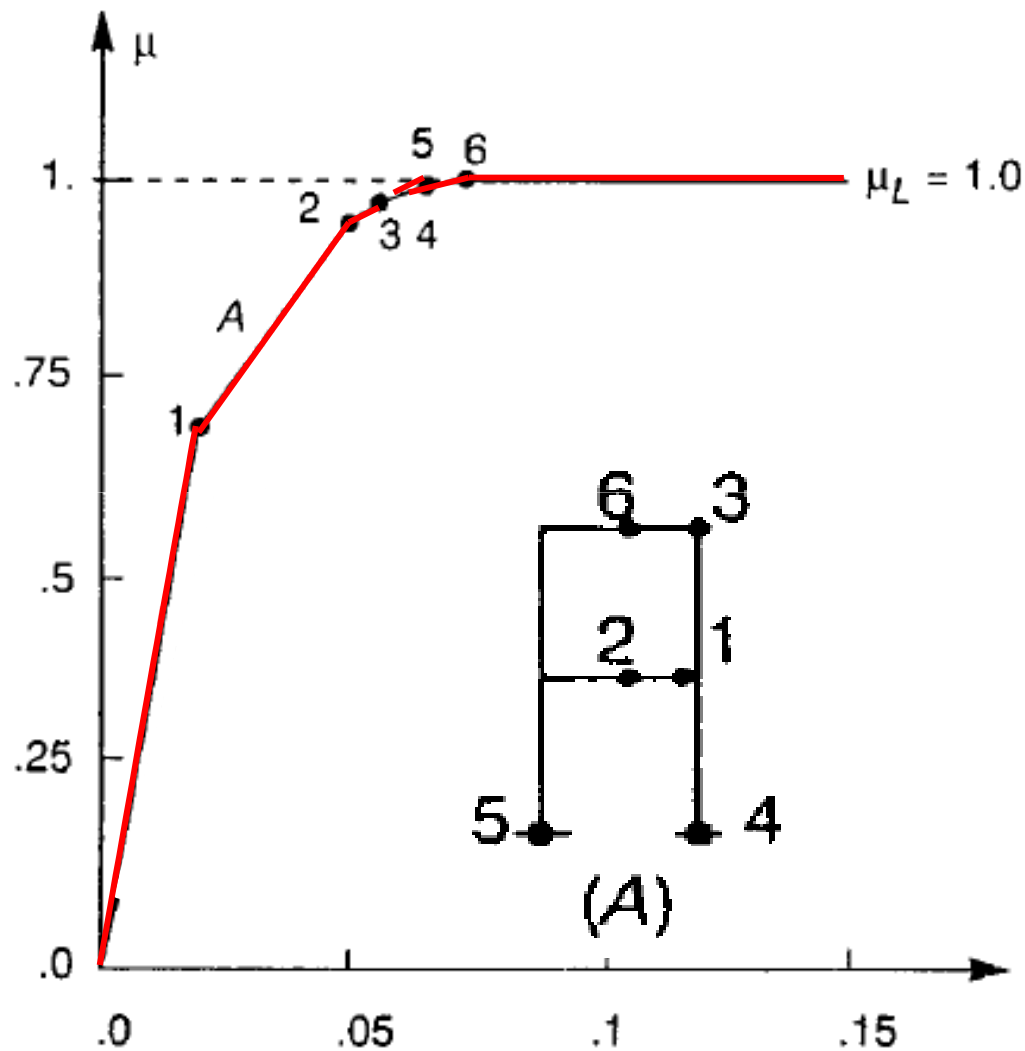
Il moltiplicatore del carico si indica con μ

Esempio



La relazione tra il carico e lo spostamento in sommità è una spezzata, la cui pendenza diminuisce bruscamente ogni volta che introduco una nuova cerniera plastica

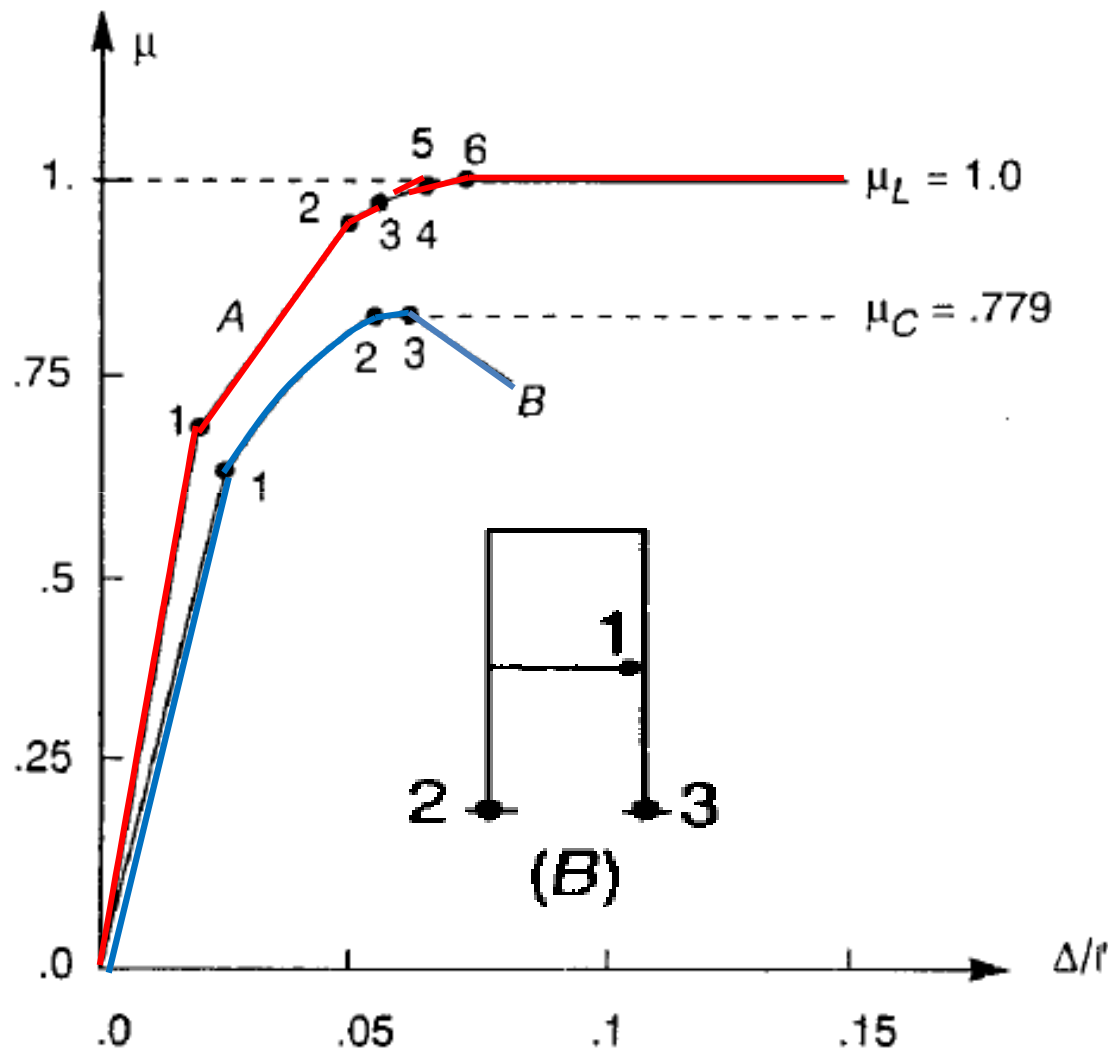
Esempio



Nell'intervallo tra l'attivazione di una cerniera plastica e quella successiva il diagramma è lineare in quanto viene ignorato l'effetto della compressione sulla rigidezza delle membrature

Quando $\mu=1$ si raggiunge il carico di collasso
Si forma il cinematismo A in figura

Esempio



Si ripeta ora l'analisi considerando l'effetto della compressione sulla rigidezza delle membrature

Il moltiplicatore di collasso è ora $\mu_c = 0.779$ in corrispondenza della configurazione B con 3 cerniere plastiche (oss: non è un cinematismo)

Capacità portante di telai elasto-plastici sotto carichi verticali

Consideriamo un'analisi di stabilità dapprima Euleriana per cui riportiamo tutti i carichi ai nodi

Ai fini del calcolo del carico critico, si possono considerare solo i carichi verticali

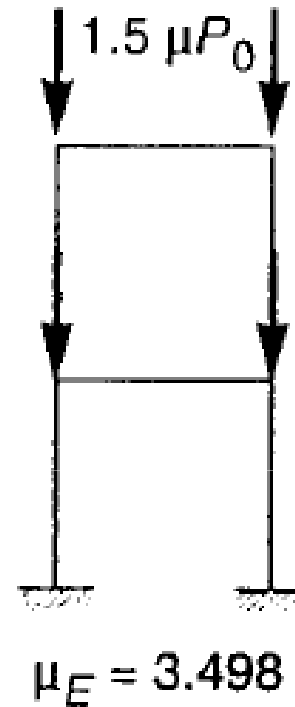
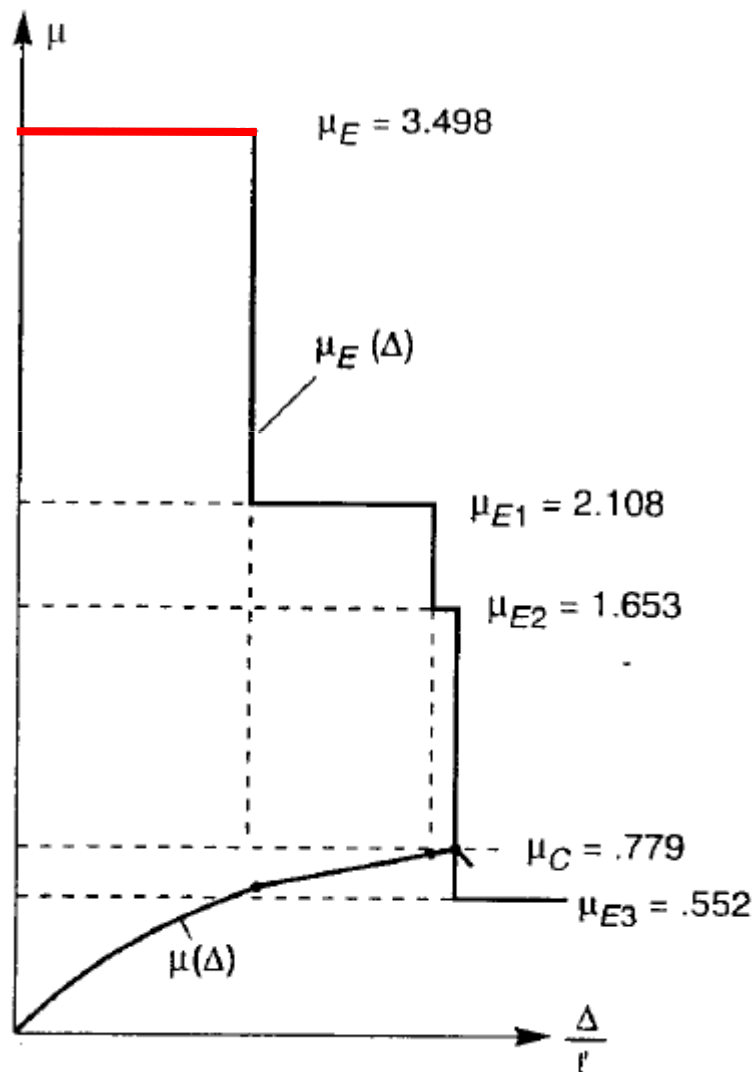
Per esempio, schematizzando ogni membratura con un unico EF Hermitiano si ottiene come carico critico Euleriano

Il valore

$$\mu_E = 3.498$$

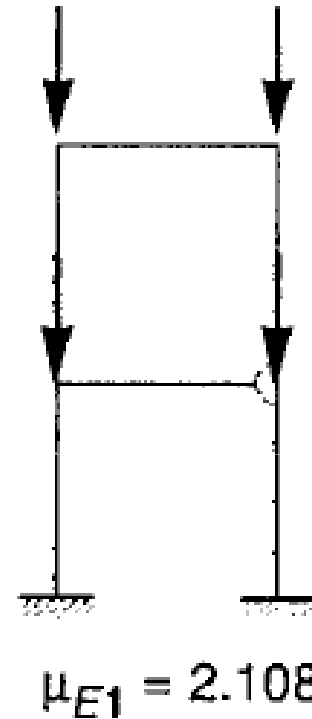
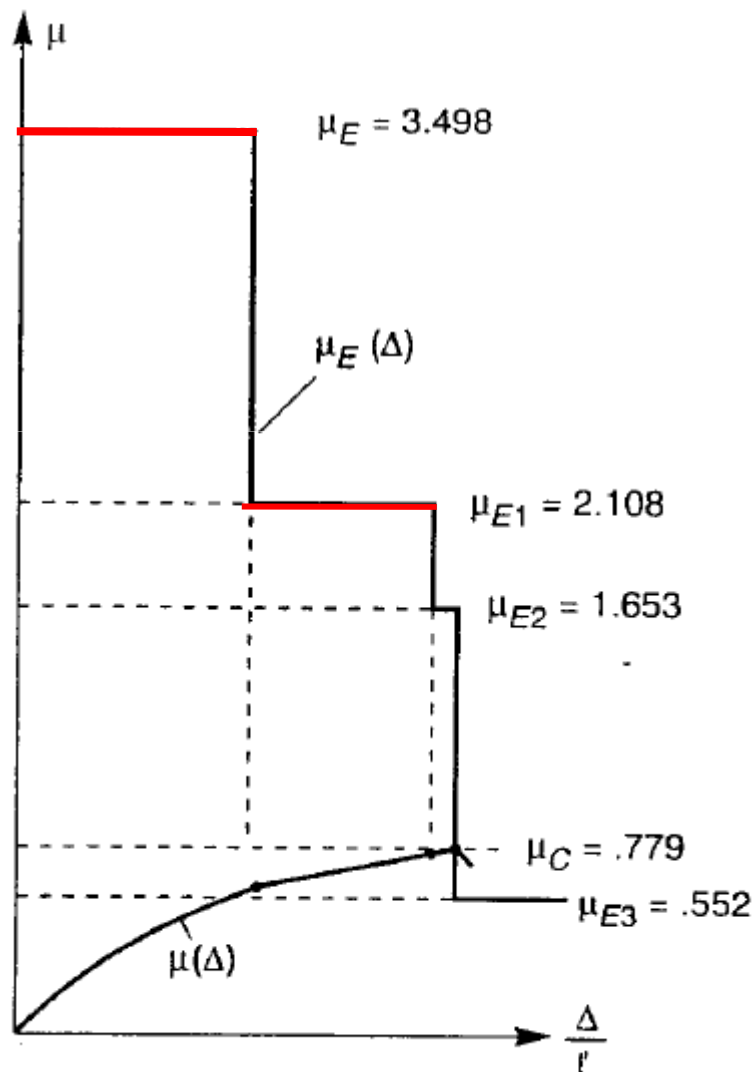
Che si mantiene costante finché non si esauriscono le risorse elastiche del telaio

Se considerassimo solo i carichi verticali



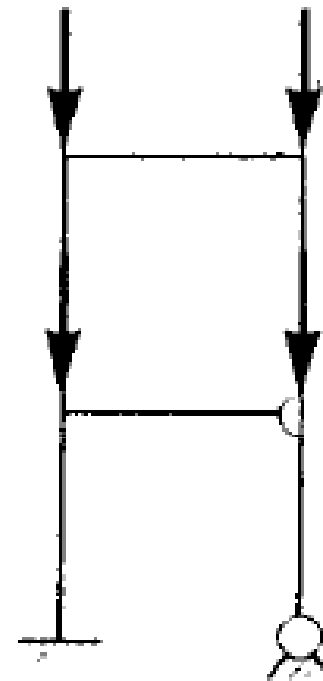
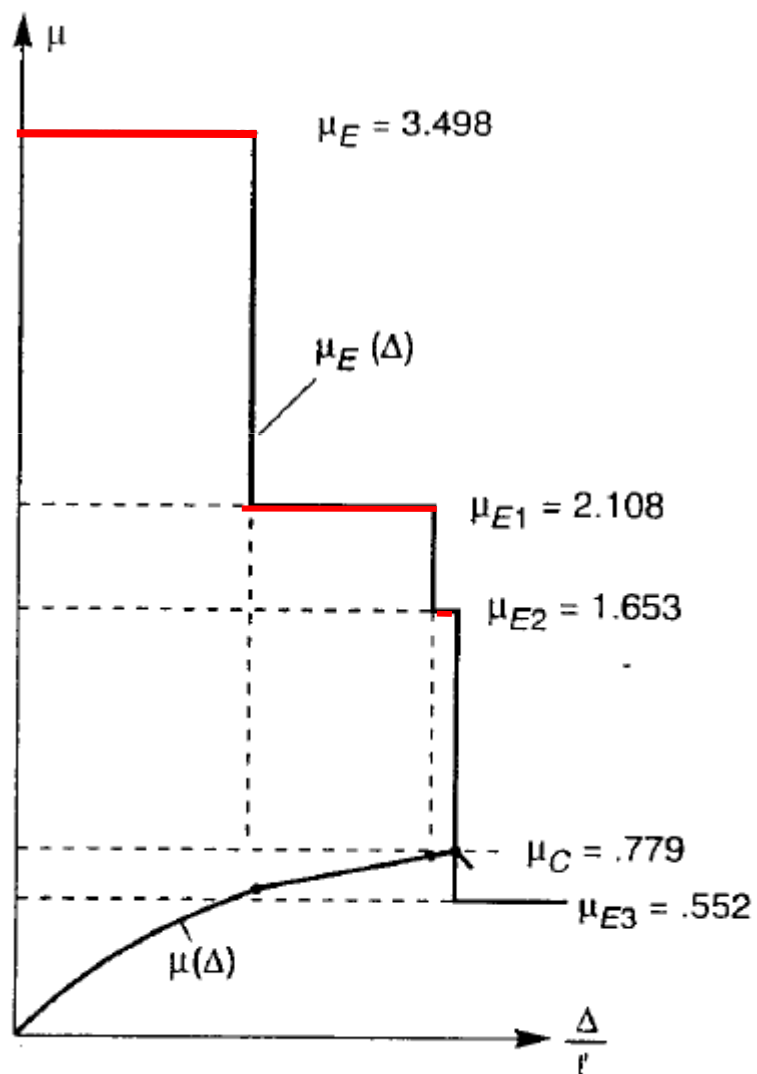
Le cerniere plastiche riducono tuttavia la rigidezza nei confronti del modo di sbandamento laterale diminuendo il carico critico

Se considerassimo solo i carichi verticali



**Si forma quindi la prima
cerniera plastica
Il carico critico euleriano si
abbassa**

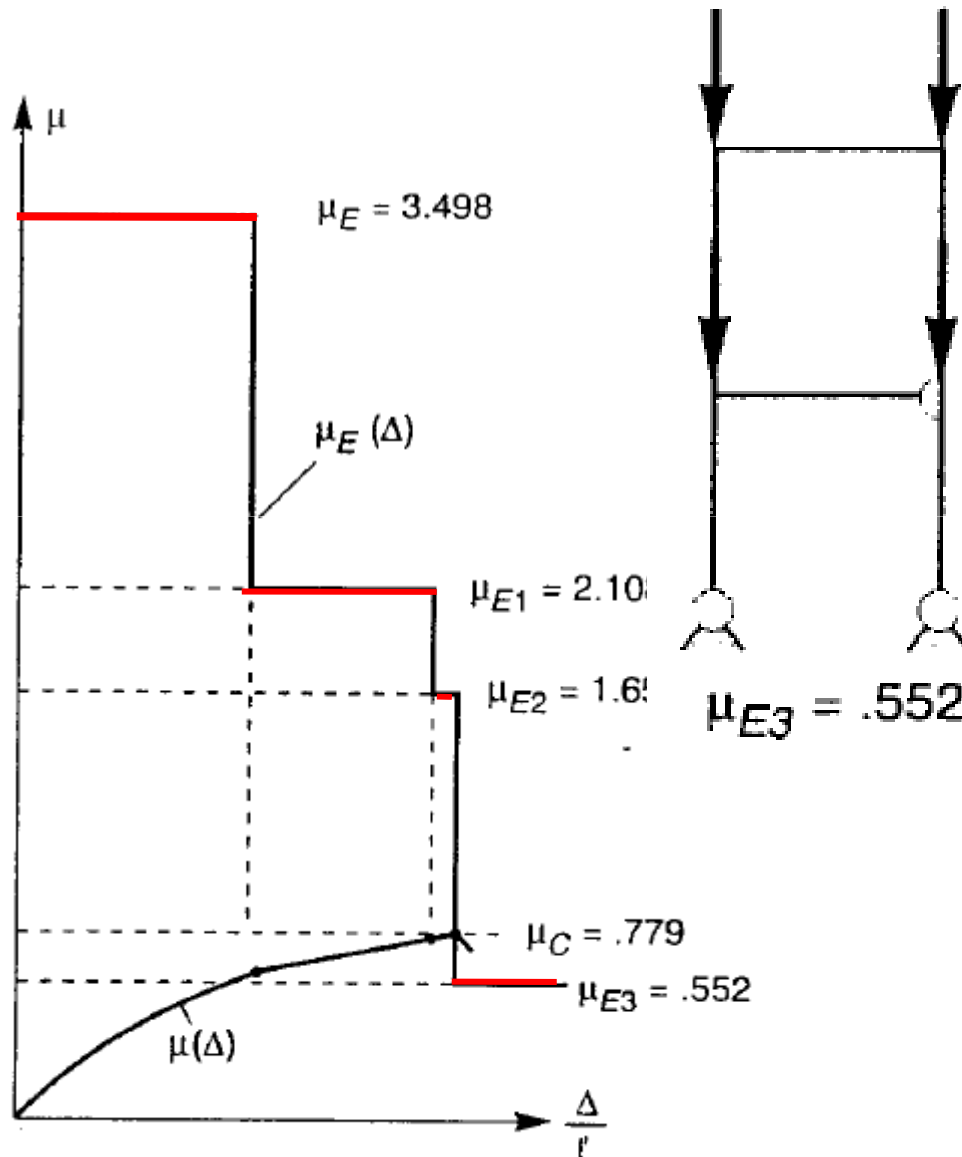
Se considerassimo solo i carichi verticali



$$\mu_{E2} = 1.653$$

seconda cerniera plastica

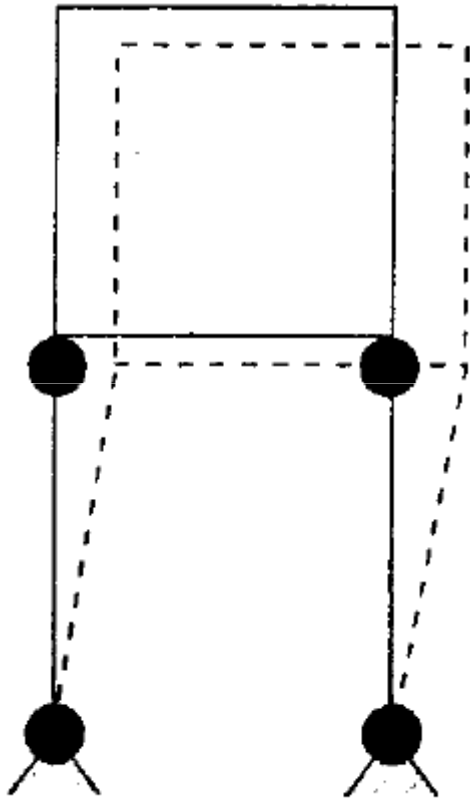
Se considerassimo solo i carichi verticali



**terza
cerniera
plastica**

Si osservi che $\mu_{E3}=0.552$ è molto < di $\mu=0.779$ che si raggiunge subito prima della terza cerniera plastica : quando questa si attiva il carico critico si porta bruscamente al di sotto di tale del valore corrente ed il telaio collassa per instabilità

Capacità portante di telai elasto-plastici



Nella realtà un cinematismo vero e proprio si forma in fase post-collasso (vedi figura) ma non coincide con quello previsto dal calcolo a rottura

Ciò è indicativo dei limiti delle analisi limite

Vuol dire che occorre fare un'analisi che combini la non linearità geometrica e quella materiale

Metodo approssimato per il calcolo del carico di collasso di telai elastoplastici

Formula di Rankine-Merchant per la stima del carico di collasso dei telai come

$$\mu_R = \mu_L \frac{1}{1 + \frac{\mu_L}{\mu_E}}$$

Dove

μ_L carico di collasso rigido-plastico

μ_E carico critico Euleriano del telaio

La formula di R-M penalizza il carico di collasso dell'analisi limite tramite un coefficiente riduttivo <1

Metodo approssimato per il calcolo del carico di collasso di telai elastoplastici

Nel telaio del caso precedente, la formula di RM fornisce un valore $\mu_R=0.778$ molto vicino al valore ottenuto dal calcolo non lineare

Tuttavia la formula fornisce una ragionevole stima del carico ultimo solo quando l'atto di moto rigido-plastico è abbastanza simile alla deformata critica (ergo antisimmetrica)

Funziona bene quando il meccanismo prevede cerniere plastiche ai piedi di pilastri e nelle travi come in figura

