

# Strutture intelaiate

- vincoli obliqui
- vincoli cedevoli:
  - cedimenti elastici
  - cedimenti anelastici
- strutture labili
  - internamente
  - esternamente
  - cerniere interne

## Vincoli obliqui

Una trasformazione di variabili formalmente analoga a quella usata per tener conto di conci rigidi d'estremità può essere impiegata per tener conto di vincoli che agiscono con direzione diversa dagli assi di riferimento esterni della struttura (vincoli obliqui).

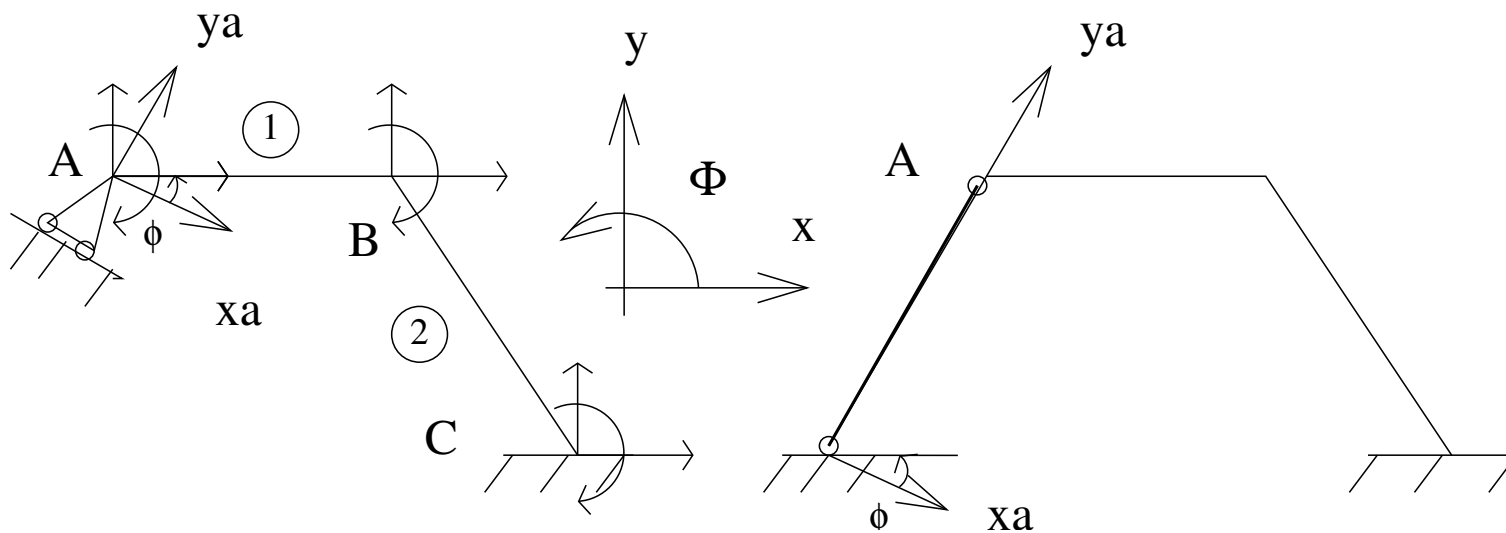


Figure 1: Vincoli obliqui: biella equivalente

Una procedura standard prevede di sostituire al vincolo obliquo una biella equivalente di rigidezza pari a  $C$  sufficientemente elevata (al limite infinita) e rigidezza flessionale nulla. Si osservi peraltro che questo modo di procedere comporta un aumento dei gradi di libert  della struttura e che l'introduzione di coefficienti di rigidezza elevati puo' indurre problemi nella risoluzione del sistema di equazioni di equilibrio.

Una procedura piu' vantaggiosa é quella di operare una **trasformazione di riferimento locale del sistema di riferimento nel nodo A.**

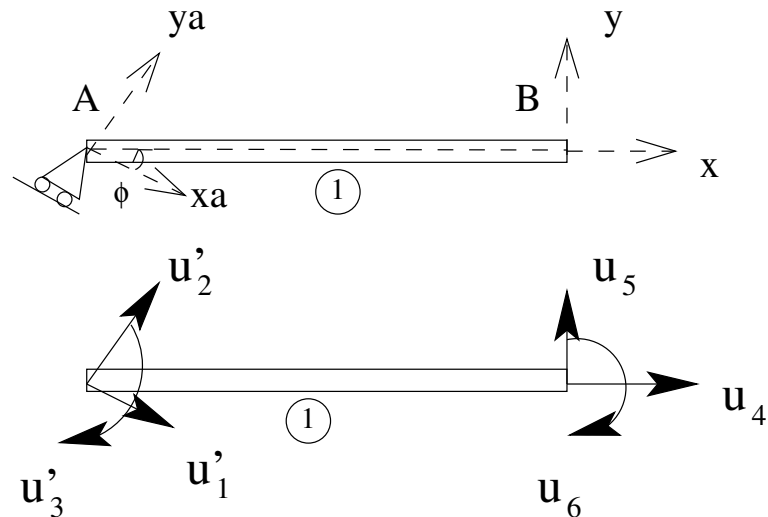


Figure 2: Vincoli obliqui

La matrice  $T$  di trasformazione che esprime la rigidezza dell'elemento trave orizzontale nel riferimento  $(x_a, y_a)$  in A e  $(x, y)$  in B é composta dalla matrice di rotazione  $T$  in A e dalla matrice identita'  $I$  in B.

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Il vettore degli spostamenti generalizzati dopo la trasformazione  $U'^e$  ed il vettore delle omologhe componenti di sforzo  $S'^e$  sono correlati ai vettori  $U^e, S^e$  precedenti alla trasformazione dalle relazioni

$$U'^e = TU^e \quad (2)$$

$$S^e = T^T S'^e \Leftrightarrow S'^e = TS^e \quad (3)$$

e la matrice di rigidezza dopo la trasformazione risulta data da

$$K'^e = T^T K^e T \quad (4)$$

Analogamente si opera quando il vincolo obliquo si trova nell'altro estremo. Per ogni elemento, la soluzione  $U^e$  viene ottenuta nel riferimento  $(x, y)$ , per ottenere la soluzione  $U'^e$  nel riferimento originale  $(x_a, y_a)$  si riutilizzano le eq. (2).

## Vincoli cedevoli: cedimenti elastici

Occorre considerare il vincolo cedevole elasticamente come parte della struttura  
 $\Rightarrow$  aumentano i gradi di libert  della struttura vincolata elasticamente rispetto a quelli della struttura vincolata rigidamente

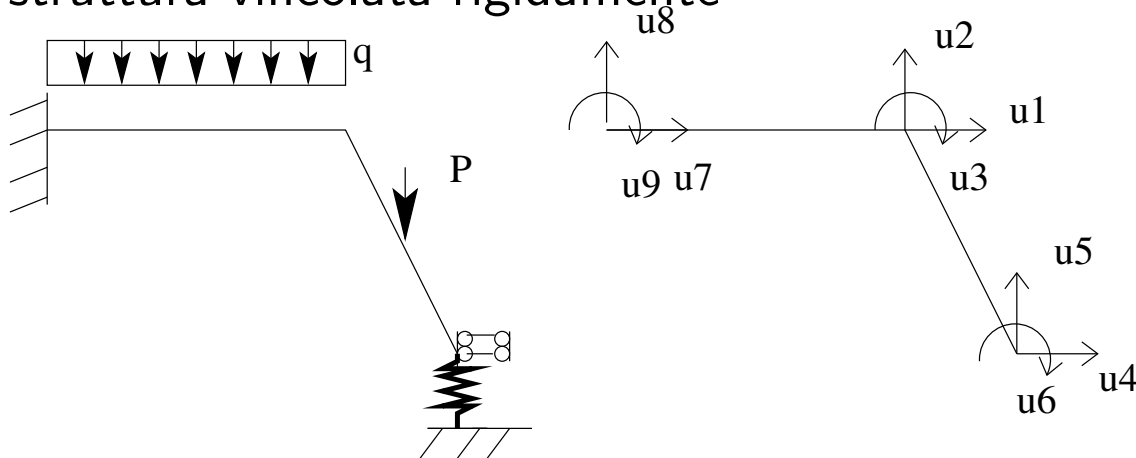


Figure 3: Cedimento elastico

Gradi di libert :  $u_1, u_2, u_3, u_5$   
 dove  $u_5$  rappresenta il cedimento elastico.  
 La matrice di rigidezza della struttura vincolata risulta:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{35} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{55} + k \end{pmatrix} \quad (5)$$

## Osservazioni

- Il minore di  $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$$

rappresenta la matrice di rigidezza della struttura vincolata rigidamente ( $k=\infty$  ovvero  $10^4 - 10^5$  maggiore degli altri coefficienti di rigidezza)

- Si ricorda che la matrice di rigidezza della molla :

$$k_m = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \quad (6)$$

- Anche il vettore dei termini noti risulta “ampliato” per contenere la componente di carico esterno relativo alla variabile  $u_5$
- L’ultima riga di  $K$  contiene i coefficienti della equazione di equilibrio alla traslazione verticale in  $B$ :

$$K_{51} u_1 + K_{52} u_2 + K_{53} u_3 + K_{55} u_5 + k u_5 = F_5 \quad (7)$$

dove  $k u_5$  é l'azione che la molla trasmette al resto della struttura.



## Vincoli cedevoli: cedimenti anelastici

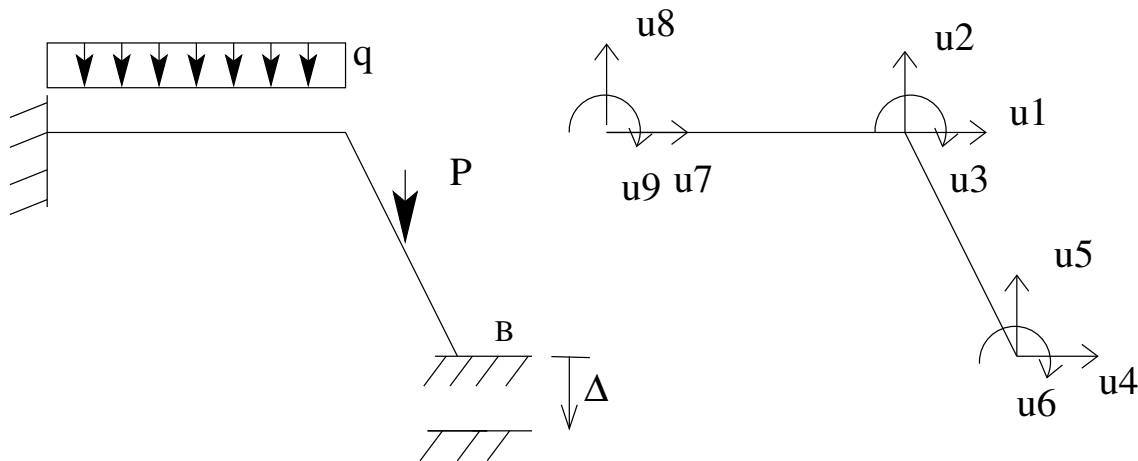


Figure 4: Cedimento anelastico  $u_5 = -\Delta$

### Metodo “esatto”

Si sostituisca al cedimento elastico della molla il cedimento anelastico  $\Delta$  tale che  $u_5 = -\Delta$ .

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale in  $B$  risulta

$$K_{51} U_1 + K_{52} U_2 + K_{53} U_3 + K_{55} U_5 = R_5 \quad (8)$$

dove

$$u_5 = -\Delta \Rightarrow K_{51} u_1 + K_{52} u_2 + K_{53} u_3 = R_5 + K_{55} \Delta$$

$R_5$ : la reazione del vincolo in  $B$ , dovrà tener conto dei carichi nodali equivalenti e dei carichi eventualmente direttamente applicati in  $B$ .

## Metodo approssimato

Si impone la condizione di congruenza esterna  $u_5 = -\Delta$  nel modo seguente:

$$K_{51} u_1 + K_{52} u_2 + K_{53} u_3 + K_{55} u_5 + C u_5 = R_5 + C(-\Delta) . \quad (9)$$

Se la costante  $C$  é  $10^4 - 10^5$  volte maggiore degli altri coefficienti di rigidezza dell'eq. 9  $\Rightarrow$  l'eq. 9 implica  $u_5 \approx -\Delta$ , cioè il rispetto dell'equazione di congruenza ed in soluzione é equivalente alla eq. 8.

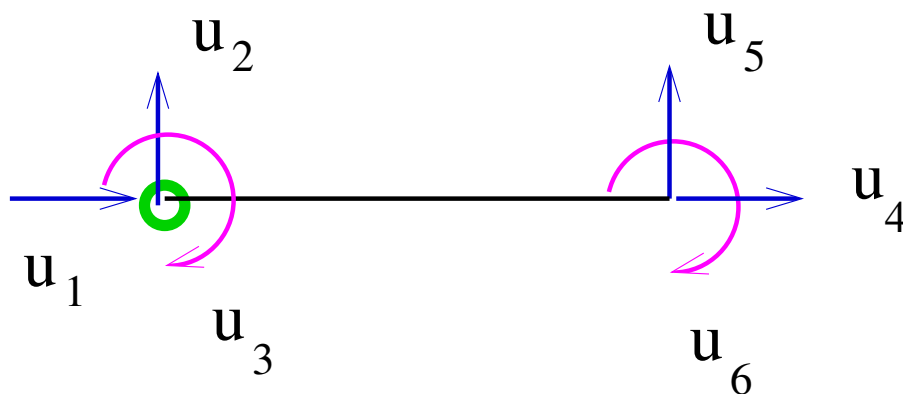
Le reazioni vincolari vengono poi calcolate secondo lo schema  $R = K_{0L}U_L + K_{00}U_0$  dove  $U_L$  e  $U_0$  rappresentano i gradi di libertà liberi ed assegnati rispettivamente. Questa operazione é pero' puramente formale ed in genere non viene eseguita direttamente ma a livello dei singoli elementi.

Questo metodo approssimato é facilmente estendibile ad una qualunque struttura. Basta considerare la struttura come se le componenti di movimento fossero libere e modificare i coefficienti relativi agli spostamenti assegnati sulla diagonale principale aggiungendovi delle costanti molto grandi (alcuni ordini di grandezza maggiori degli altri coefficienti di rigidezza) e modificare i corrispondenti termini noti. Il programma SAP procede in tale modo. é ovviamente possibile peraltro risolvere esattamente il sistema delle equazioni di equilibrio della struttura in cui alcuni degli spostamenti sono assegnati mentre sono incognite le omologhe reazioni vincolari.

Si osservi che anche nel caso di cedimenti anelastici, occorre considerare una struttura avente un numero di incognite dato dalla somma degli spostamenti liberi e di quelli assegnati.

## Elemento incernierato

Si consideri il caso di un elemento trave dotato di un nodo cerniera per cui non sia trascurabile la deformabilità assiale.

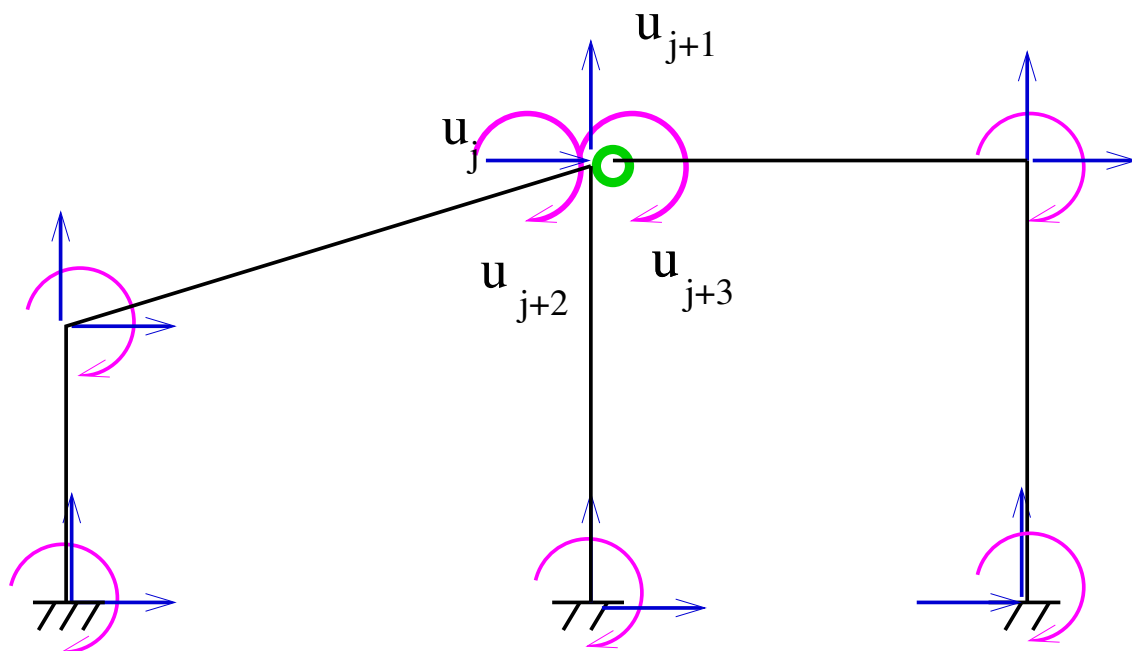


In tal caso, la matrice di rigidezza elementare nel riferimento globale diventa

$$k^e = \begin{pmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 \\ 0 & -3EI/L^2 & 0 & 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L \end{pmatrix}$$

## Elemento incernierato

In alternativa, é possibile operare secondo il “codice di svincolo ”: si aggiunge un grado di libertà alla struttura che impone l'indipendenza della rotazione dell'estremitá con cerniera dalla rotazione del nodo cui si connette



Il codice di svincolo introduce un grado di libertà aggiuntivo nella matrice topologica

Questo metodo, oltre che per la sconnessione alla rotazione, puo' essere utilizzato per una sconnessione qualunque

# Strutture labili

Strutture labili internamente od esternamente soggette a carichi generici sono staticamente impossibili.

Se il vettore dei termini noti risulta nel rango della matrice di rigidezza  $K$ , l'equilibrio risulta possibile.

Con solutori di tipo “standard”, non é possibile in genere risolvere queste strutture.

Di seguito si considerano alcuni metodi operativi.

## Strutture labili internamente

Nelle strutture labili internamente, la soluzione é determinabile a meno di una o piu' componenti di movimento.

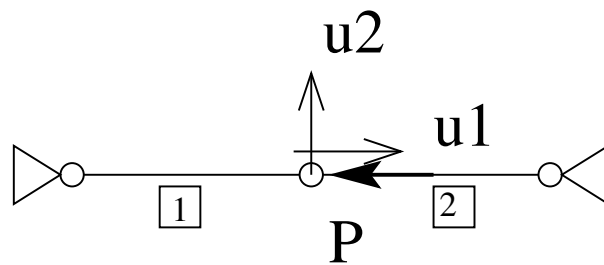


Figure 5: Struttura labile internamente

Nel caso della figura 5, il sistema risolvete diventa

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

dove  $k_i = \frac{E_i A_i}{l_i}$  con  $i = 1, 2$ .

Si hanno due procedure alternative:

- Si eliminano i gradi di libert  ecce enti durante l'assemblaggio (SAP)

$$(k_1 + k_2)u_1 = -P \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{-P}{k_1 + k_2} \quad (11)$$

- Si vincola artificialmente la struttura.

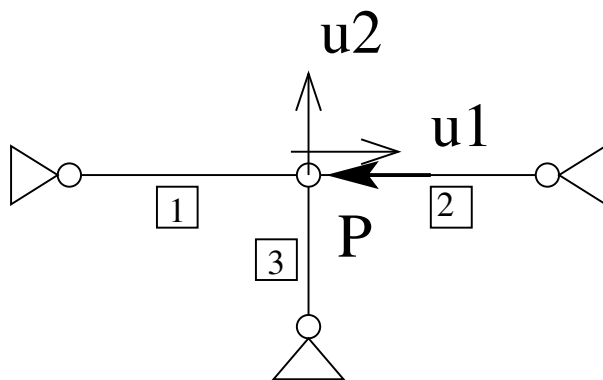


Figure 6: La struttura vincolata.

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 = \frac{-P}{k_1 + k_2} \\ u_2 = 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$



## Struttura labile internamente

Esempio di struttura iperstatica ma avente un nodo labile, il 5.

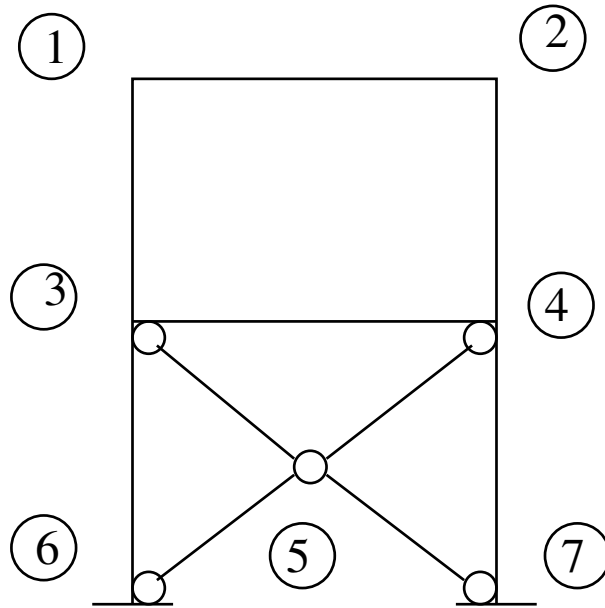


Figure 7: Esempio di struttura labile internamente.

Il telaio in questione non é risolubile con un solutore ordinario, poiché la matrice  $K$  della struttura assemblata risulta semi-definita positiva, ovvero  $U^t K U = 0$  in corrispondenza di un valore non nullo della rotazione al nodo 5,  $\varphi_5$ .

Si procede in due modi alternativi:

- si elimina la rotazione  $\varphi_5$  in fase di assemblaggio, ovvero si pone  $\varphi_5 = 0$ .
- si introduce un'arbitraria molla flessionale in corrispondenza del nodo 5.

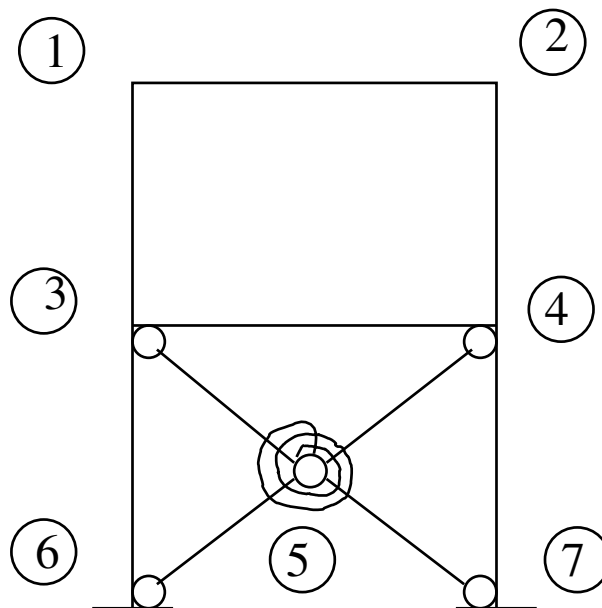


Figure 8: Molla flessionale nel nodo 5.

## Strutture labili esternamente

Nel caso di strutture labili esternamente ma con carichi in equilibrio, la soluzione in termini di spostamenti é determinabile a meno di un moto rigido.

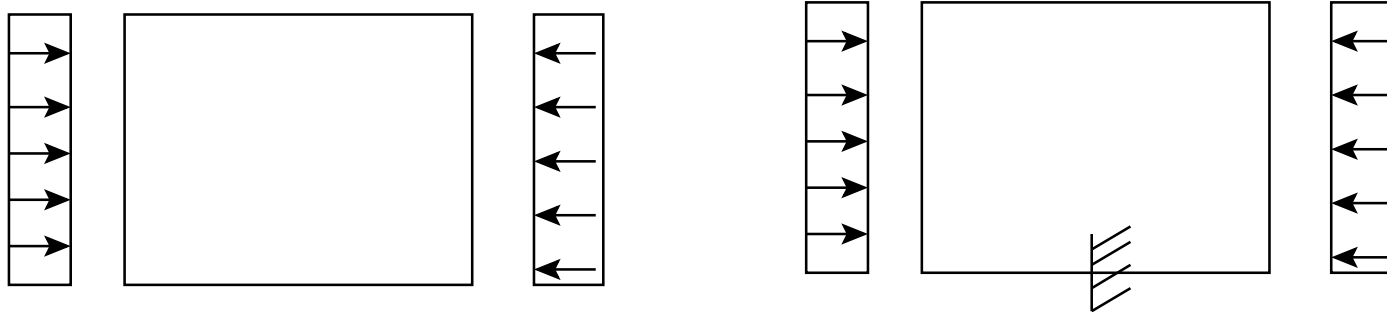


Figure 9: a) Struttura labile esternamente; b) eliminazione dei gradi di labilita' esterna con un vincolo

## Strutture labili esternamente

Un altro caso di struttura labile esternamente é rappresentato dal cassone galleggiante in equilibrio sotto la spinta idrostatica dell'acqua. In tal caso si vincola in modo isostatico la struttura, le reazioni vincolari saranno nulle se i carichi sono autoequilibrati.

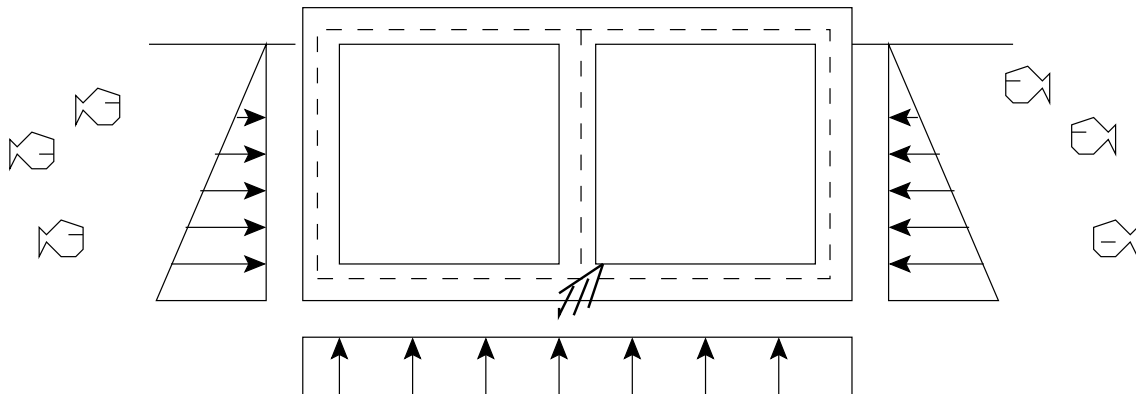


Figure 10:

# Travi con concetti terminali di rigidità infinita

Nelle strutture intelaiate, i nodi di connessione tra travi e pilastri hanno dimensione finita, soprattutto in caso di strutture in c.a. con travi in altezza. Nel calcolo delle sollecitazioni, la struttura è usualmente schematizzata mediante gli assi baricentrici delle varie aste, cosicché i nodi corrispondono alle intersezioni degli assi e le lunghezze delle aste vengono valutate con riferimento alla distanza tra i nodi stessi. Inoltre, se le travi sono prismatiche, si suppone momento di inerzia  $J$  costante su tutto l'asse, mentre in realtà l'ideale prosecuzione della trave all'interno del pilastro ha una rigidità estremamente più elevata che in campata.

Rispetto ai valori calcolati nell'ipotesi di momento di inerzia costante, se si tiene conto della maggiore inerzia dell'attacco trave-pilastro, aumentano nelle travi i momenti flettenti negativi e quindi diminuiscono quelli positivi.

Da: Pozzati II Vol.

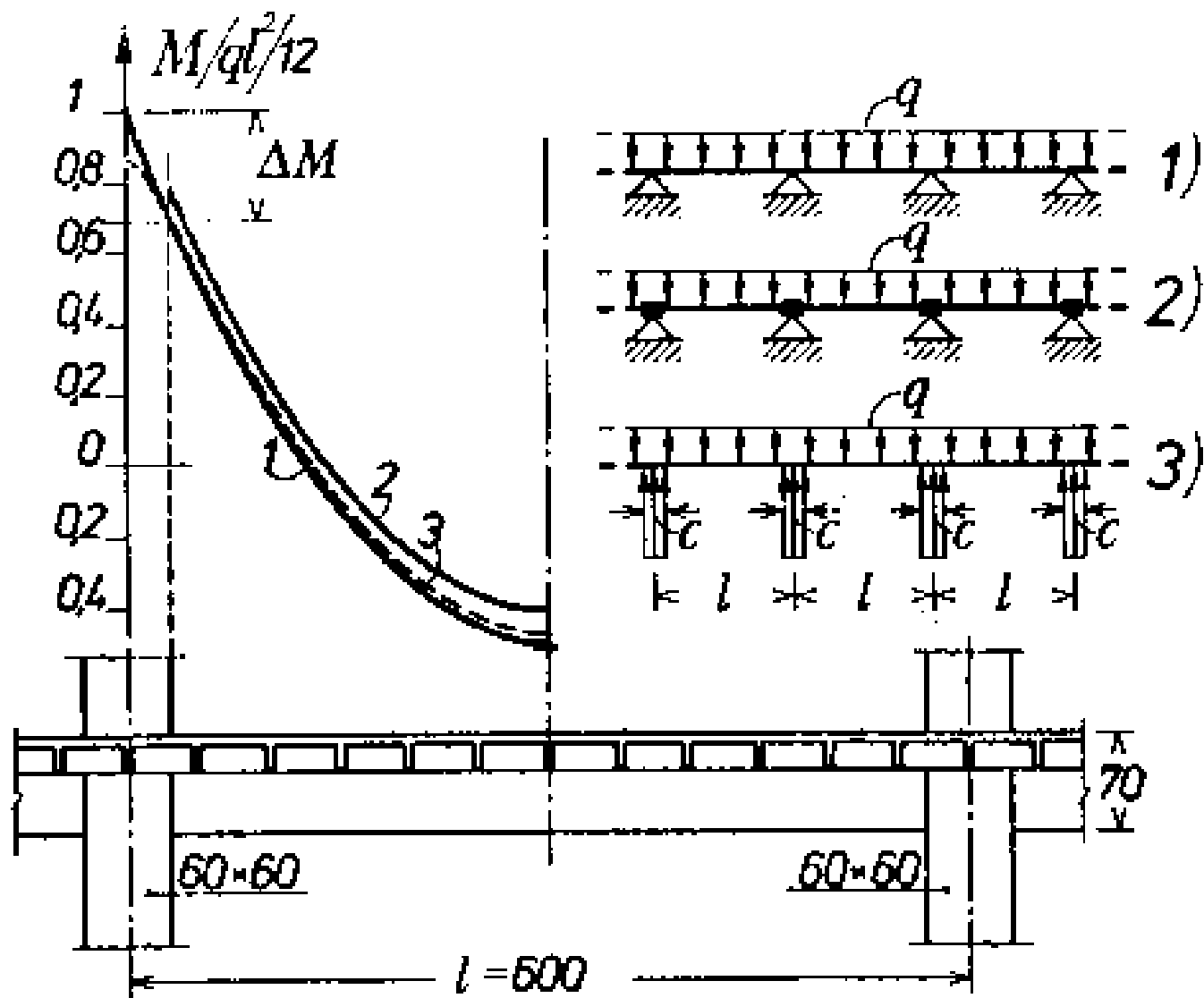


Figure 11: Da Pozzati II vol. p 263-264

Per le travi sottoposte a carichi verticali, le ipotesi approssimative sui vincoli trave pilastro portano alle conseguenze schematizzate in figura

**caso 2)** se si modella il pilastro attraverso un blocco rigido, il momento flettente a filo pilastro vale

$$M_2 = -0.81 \frac{ql^2}{12} \approx -0.0675ql^2$$

**caso 1)** Trascurando l'influenza dell'irrigidimento (caso 1) di figura 11), a filo pilastro si ottiene:

$$M_1 = -0.71 \frac{ql^2}{12} \approx -0.0596ql^2$$

che rappresenta un valore inferiore del 12% a quello del caso 2).

**caso 3)** Pensando invece la reazione uniformemente distribuita (caso 3) figura 11), il momento flettente massimo, che si realizza in corrispondenza dell'appoggio vale

$$M_3 = -0.855 \frac{ql^2}{12} = -0.07125ql^2$$

**reazioni concentrate**  $M_3^c = -\frac{ql^2}{12} = -0.0833ql^2$

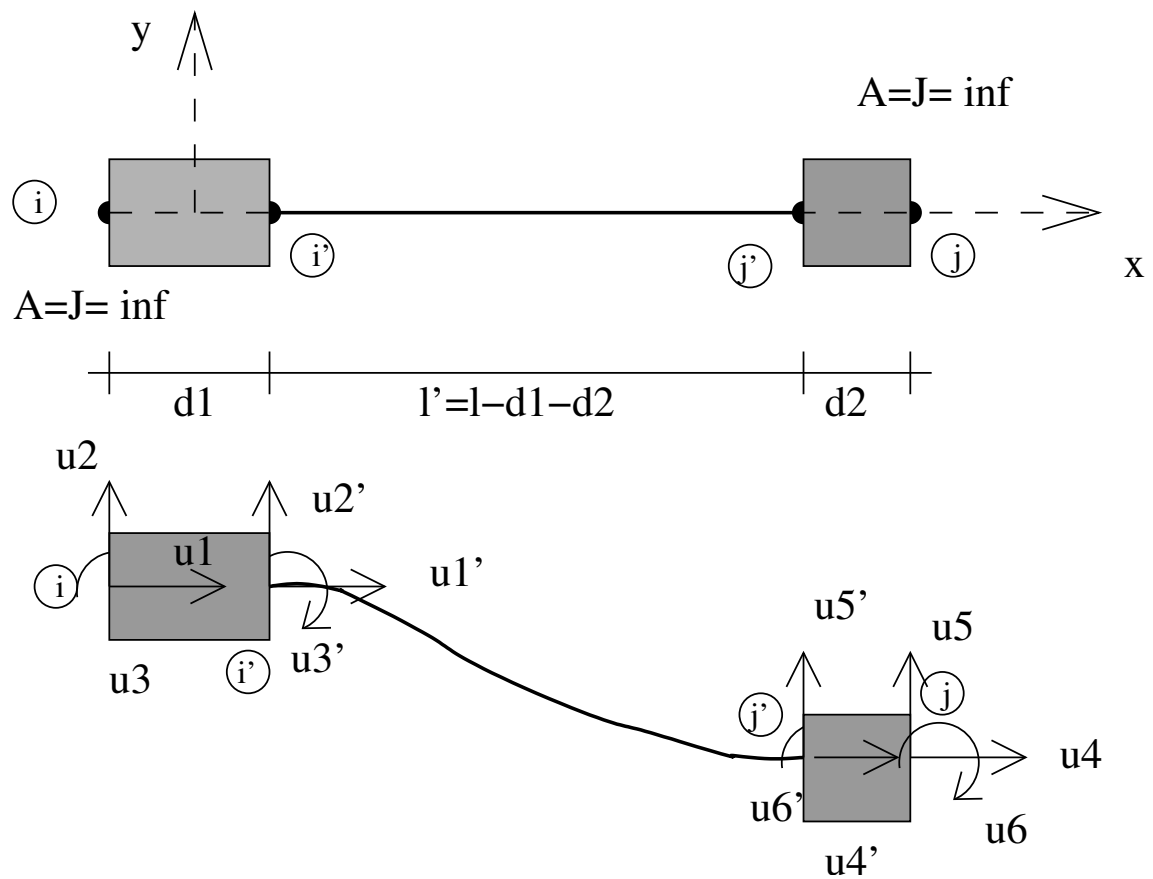


Figure 12: Nodi rigidi

Tenendo conto delle precisazioni precedenti, una soluzione approssimata si può comunque ottenere in generale assumendo infinitamente rigidi i tratti terminali delle aste. Detto  $u'^T = [u'_1 \ u'_2 \ \cdots \ u'_6]$  il vettore delle componenti di movimento in  $i'$  e  $j'$ , si ha:

$$k'^e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l'} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l'^3} & -\frac{6EJ}{l'^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l'^3} & -\frac{6EJ}{l'^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l'^2} & \frac{4EJ}{l'} & 0 & \frac{6EJ}{l'^2} & \frac{2EJ}{l'} \\ -\frac{EA}{l'} & 0 & 0 & \frac{EA}{l'} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l'^3} & \frac{6EJ}{l'^2} & 0 & \frac{12EJ}{l'^3} & \frac{6EJ}{l'^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l'^2} & \frac{2EJ}{l'} & 0 & \frac{6EJ}{l'^2} & \frac{4EJ}{l'} \end{pmatrix} \quad (13)$$



Per ottenere la matrice di rigidezza della trave tenendo conto dei concetti rigidi basta eseguire una traslazione di assi da  $i$  a  $i'$  e da  $j$  a  $j'$ . Con le convenzioni adottate risulta:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \\ u'_2 &= u_2 - d_1 u_3 \\ u'_3 &= u_3 \end{aligned} \quad (14)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u'_i = T_i u_i \quad (15)$$

Le azioni di estremità' risultano invece

$$\begin{aligned} S_1 &= S'_1 \\ S_2 &= S'_2 \\ S_3 &= S'_3 - d_1 S'_2 \end{aligned} \Leftrightarrow S_i = T_i^T S'_i \quad (16)$$

Si osservi che la matrice  $T_i$  che esprime la traslazione del sistema di riferimento da  $i$  a  $i'$  non é ortogonale,  $T_i^T \neq T_i^{-1}$  al contrario della matrice di rotazione  $R$ .

Procedendo in modo analogo anche all'estremità destra, si ha

$u'_j = T_j u_j$  e  $S_j = T_j^T S'_j$  dove:

$$u_j^T = [u_4 \ u_5 \ u_6] \text{ e } T_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto

$$T = \begin{pmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T_j \end{pmatrix} \quad (17)$$

si può scrivere

$$u' = T u, \quad S = T^T S'$$

ricordando che  $S' = k^{e'} u' - S'_{eq}$  si ha

$$S = T^T (k^{e'} u' - S'_{eq}) = T^T k^{e'} T u - S_{eq} = k^e u - S_{eq} \quad (18)$$

$$\text{dove } k^e := T^T k'_e T$$

il vettore dei carichi nodali equivalenti in  $i$  e  $j$  risulta correlato ai carichi nodali equivalenti in  $i'$  e  $j'$  dalla relazione  $S_{eq} = T S'_{eq}$ .

Risultati perfettamente analoghi possono essere ottenuti, anche se in maniera meno efficiente, decomponendo la generica asta in un'asta deformabile e due aste di estremità con caratteristiche inerziali elevate ( $E, J \rightarrow \infty$ ). Il vantaggio è che non occorre modificare i programmi standard. Uno svantaggio è che oltre ad aumentare il numero di incognite nodali, introduce coefficienti di rigidezza  $k_{ij}$  molto maggiori degli altri, aumentando l'errore numerico nella soluzione del sistema delle equazioni di equilibrio.

## Aste eccentriche

é frequente anche il caso di aste eccentriche, in cui le linee d'asse delle aste concorrenti in un nodo non si intersechino in un punto (figura 13). Anche in questo caso, é possibile introdurre aste di raccordo di rigidezza molto elevata. Risulta peraltro agevole operare un cambiamento di sistema di riferimento ai due nodi di estremita'.

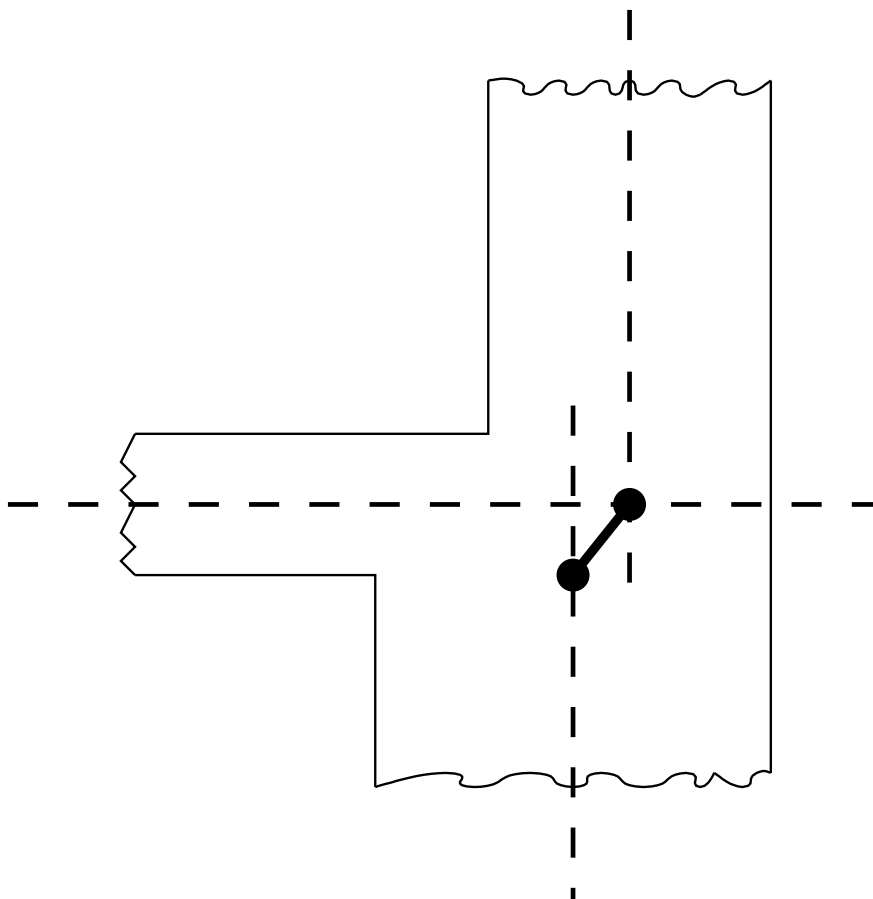


Figure 13: Aste eccentriche

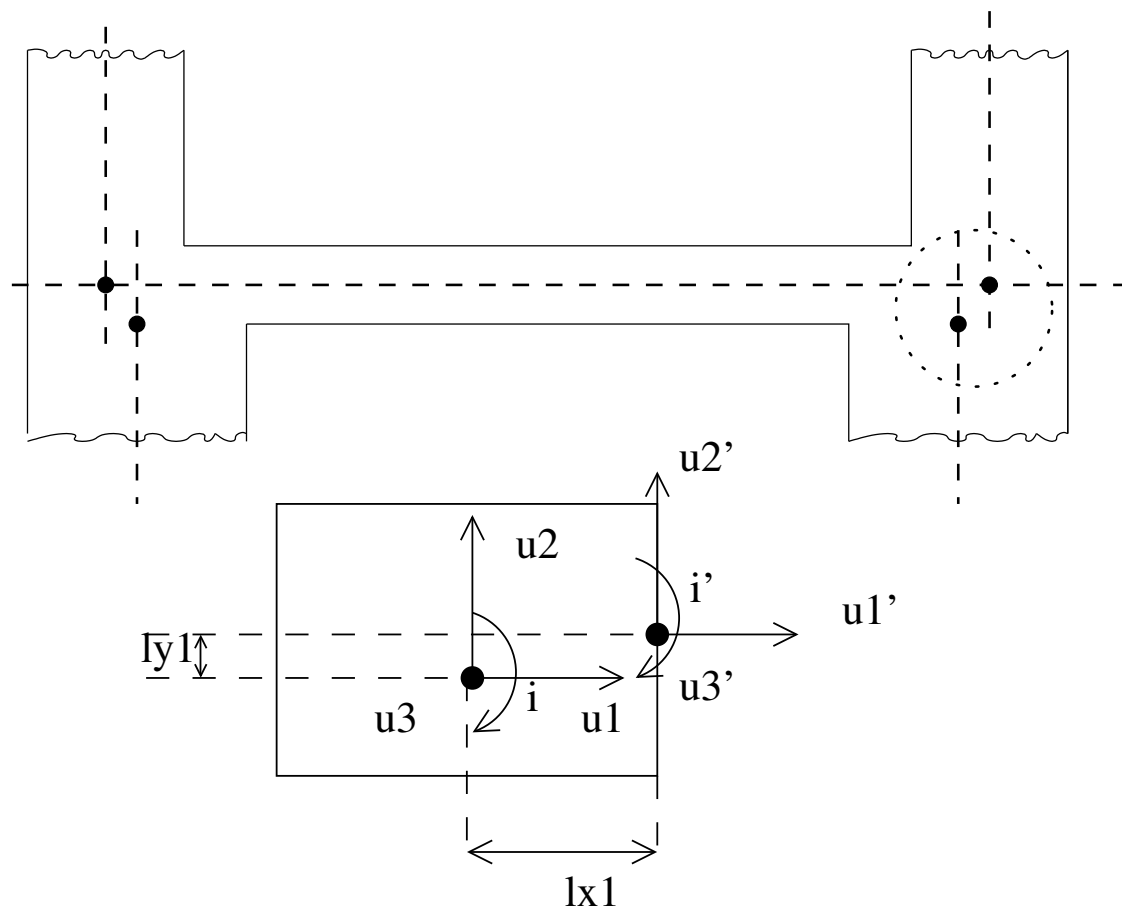


Figure 14: Aste eccentriche

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l_{y1} \\ 0 & 1 & -l_{x1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

ovvero in notazione compatta

$$u'_i = T_i u_i; \quad S_i = T_i^T S'_i \quad (20)$$

Operando in modo analogo al precedente si ottiene  
 $k^e = T^T k^{e'} T$

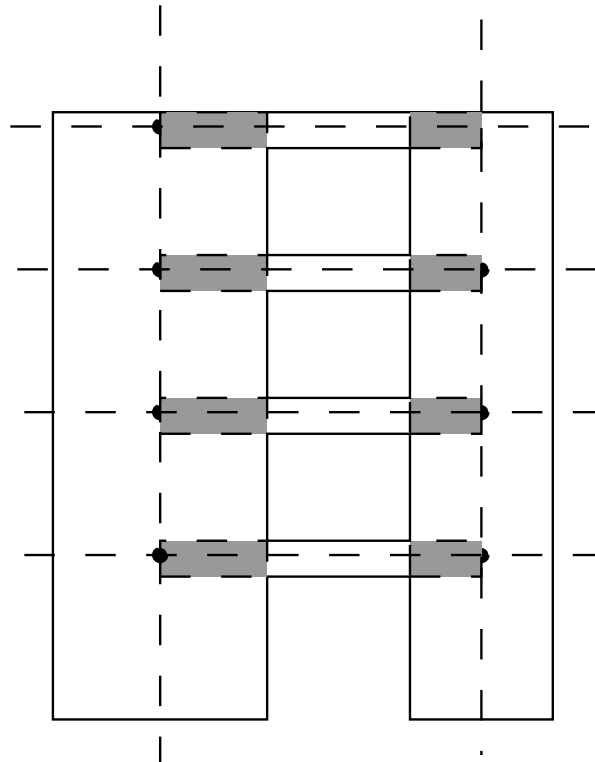


Figure 15: La linea tratteggiata indica la linea d'asse del telaio equivalente, la zona scura indica i conci rigidi terminali sia per le travi che per i pilastri. Aste con conci terminali di rigidità infinita vengono impiegate per rappresentare mediante telai equivalenti delle pareti di controvento, forate o meno. La figura 15 illustra sinteticamente il concetto. Un altro metodo di analisi di pareti forate è il metodo di Rosman-Beck, dove la parete viene schematizzata come mensola equivalente. La schematizzazione a telaio equivalente fornisce dei risultati validi in prima approssimazione. Si osservi che in questi casi, non trattandosi di travi snelle, occorre tenere conto della deformabilità a taglio degli elementi strutturali (sia travi che pilastri)

## Collegamenti semi-rigidi

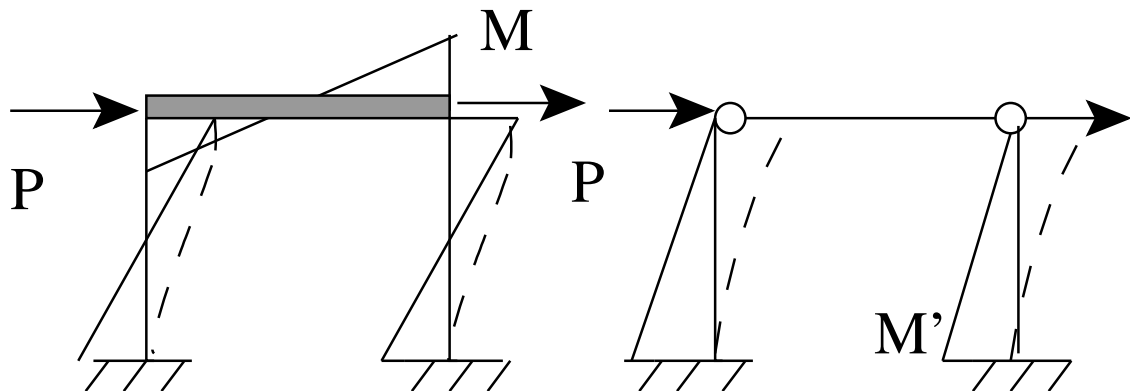


Figure 16: a)  $M = \frac{Pl}{2}$  e lo spostamento  $u = \frac{Pl^3}{12EJ}$ ; b)  $M' = Pl$  e lo spostamento vale  $\frac{Pl^3}{3EJ}$

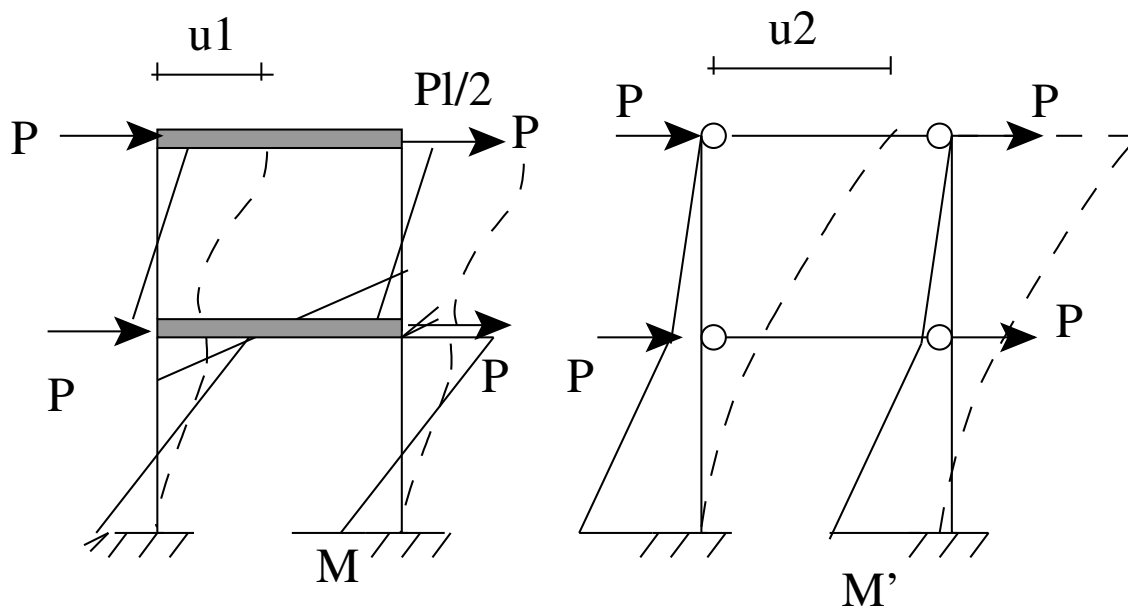
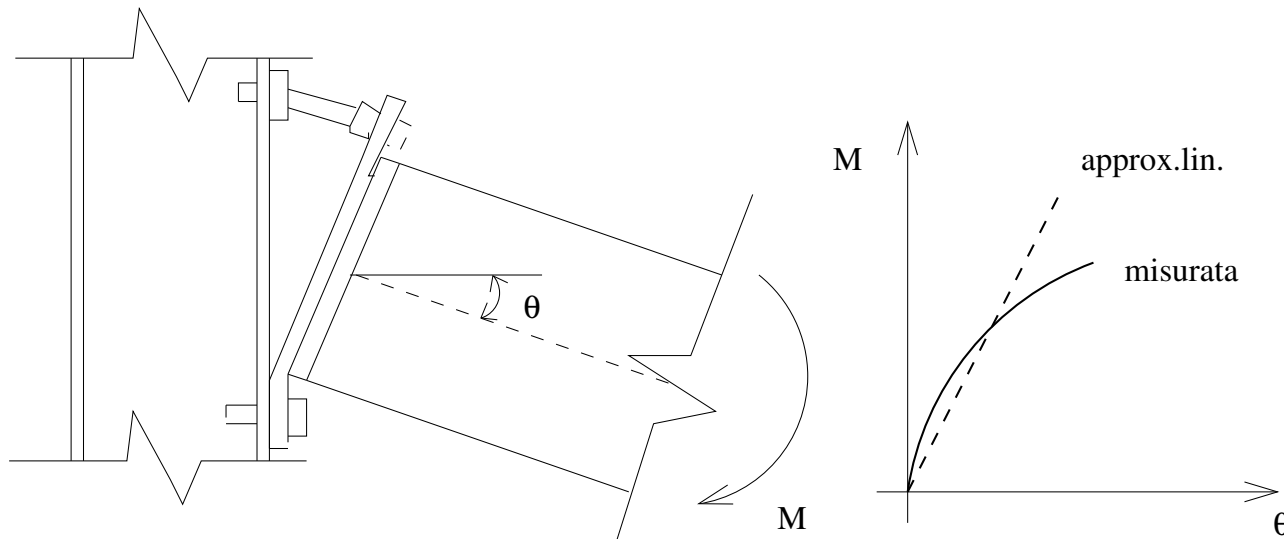


Figure 17: a) Lo spostamento  $u_1 = \frac{2Pl^3}{3EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ}$ ; b) spostamento  $u_2 = \frac{P(2l)^3}{3EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ}$

## Collegamenti semi-rigidi

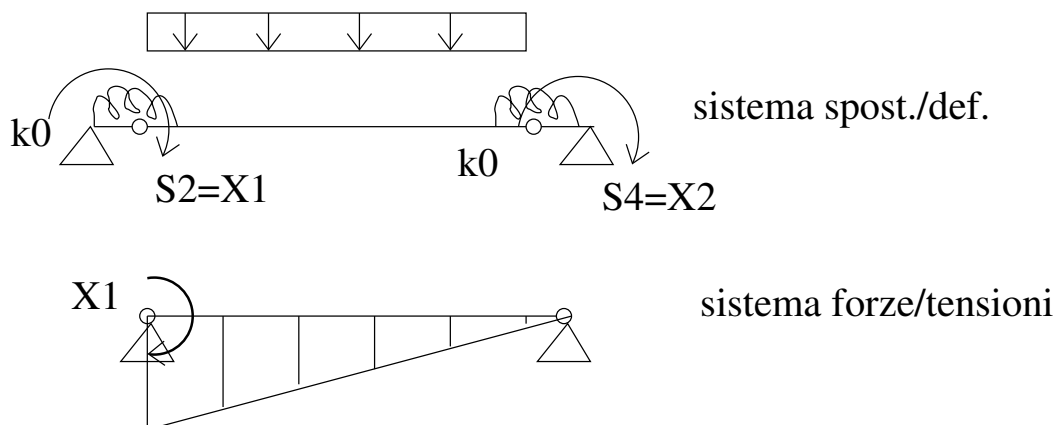
Spesso i nodi delle strutture intelaiate metalliche vengono realizzati in modo da non comportarsi come nodi incastro, poiché non garantiscono l'uguaglianza della rotazione di tutte le aste afferenti al nodo. Pertanto, il diagramma dei momenti e gli spostamenti possono risultare diversi da quelli ottenuti nell'ipotesi di nodi rigidi





Sul SAP per esempio si aggiungono molle *torsionali* di rigidezza  $K$

Si può tenere conto di questo effetto modificando la matrice di rigidezza della trave ed il vettore dei carichi nodali equivalenti procedendo in modo analogo a quello visto per le travi di sezione variabile si determina la matrice di flessibilità via PLV



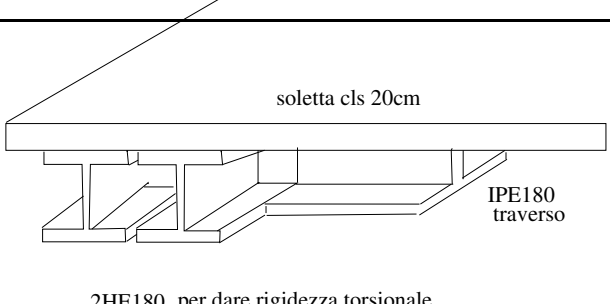
Si considera un concio terminale deformabile alle estremità'

Travi a sezione costante, la matrice di flessibilità' é:

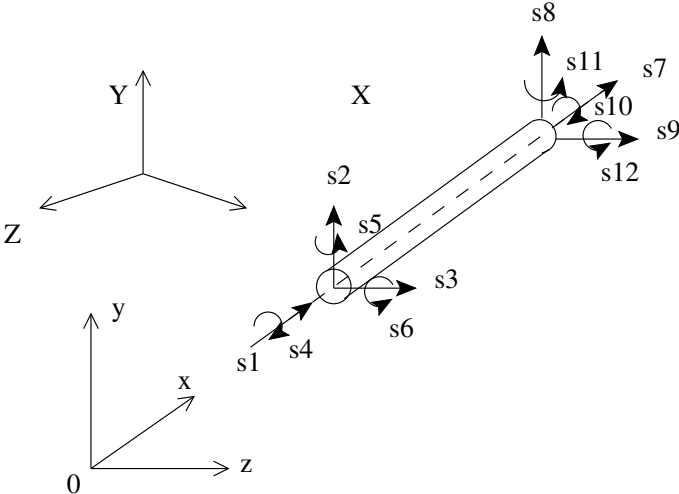
$$F = \begin{pmatrix} \frac{l}{3EJ} + \frac{1}{k_0} & \frac{-l}{6EJ} \\ \frac{-l}{6EJ} & \frac{l}{3EJ} + \frac{1}{k_0} \end{pmatrix}$$

La matrice di rigidezza é l'inversa di quella di rotazione

# Beam in 3D

<p>Le strutture reali sono 3D; es: solai</p>	
----------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------

Si consideri una trave ad asse rettilineo di sezione costante, capace di resistere a forze assiali, momenti flettenti attorno ai due assi principali nel piano della sua sezione trasversale e momenti torcenti attorno al suo asse baricentrico. Le forze agenti sono (Theory of Matrix Structural Analysis, JS Przemieniecki)

<ul style="list-style-type: none"> <li>● forze assiali <math>s_1, s_7</math></li> <li>● forze taglianti <math>s_2, s_3, s_8, s_9</math></li> <li>● momenti flettenti: <math>s_5, s_6, s_{11}, s_{12}</math></li> <li>● momenti torcenti (torque): <math>s_4, s_{10}</math></li> </ul>	
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------

Si osservi che in figura, le rotazioni sono antiorarie e non orarie come avevamo supposto finora. La matrice di rigidezza é  $12 \times 12$ .

Se gli assi coincidono con gli assi principali della sezione, la matrice di rigidezza si puo' ricavare da una sottomatrice  $2 \times 2$  e da una  $4 \times 4$ . é noto dalla Teoria ingegneristica della trave che le forze  $S_1$  ed  $S_7$  dipendono solo dallo spostamento nella direzione corrispondente.

Inoltre, i momenti torcenti  $S_4$  ed  $S_{10}$  dipendono solo dalla rotazione corrispondente della sezione.

Per una scelta generica di piani di flessione, le forze di taglio ed i momenti flettenti nel piano  $xy$  dipendono non solo dai corrispondenti spostamenti ma anche da quelli corrispondenti alle forze del piano  $xz$ . Solo se i piani  $xy$  e  $xz$  intersecano la sezione trasversale negli assi principali della sezione stessa, le azioni flettenti e taglienti nei 2 piani possono essere considerate indipendentemente le une dalle altre.

I coefficienti di rigidezza relativi alle azioni torcenti e taglienti saranno ottenuti attraverso le relazioni differenziali che esprimono gli spostamenti della trave ottenuti nella teoria ingegneristica della trave.

## Elemento trave soggetto a momento torcente e deformabile a taglio

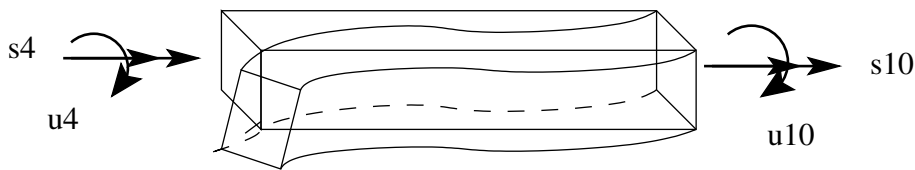
Allo scopo di riderivare la matrice di rigidezza della trave di sezione costante nello spazio si considera che **la trave sia deformabile a taglio (trave di Timoshenko)**.

I coefficienti di rigidezza verranno derivati a partire dalle equazioni di equilibrio della teoria elementare della trave. Si assume che gli assi  $z$  e  $y$  siano principali per la sezione trasversale e che l'asse  $x$  sia l'asse baricentrico. Allora, tutte le forze possono essere separate in 5 gruppi:

- forze assiali
- momenti torcenti
- forze di taglio
- momenti flettenti

# Coefficiente di rigidezza torsionale

Si consideri una trave di sezione qualunque, soggetta a momento torcente  $M_t = S_4$  applicato alle basi estreme.



L'equazione differenziale che lega  $M_t$  all'angolo unitario di torsione  $\theta'$  diventa

$$M_t = -G J_t \frac{d\theta}{dx} = -G J_t \theta'$$

dove:

- $J_t = \frac{J_0}{q}$
- fattore di torsione  $q = \frac{J_0}{J_0 + \int_A \frac{\partial \omega_t}{\partial y} x - \frac{\partial \omega_t}{\partial x} y}$
- $\omega_t$  rappresenta la funzione di ingobbamento
- $J_0$  é il momento di inerzia polare della sezione rispetto al baricentro  $G$  assunto come origine degli assi

Nel caso in esame, l'angolo unitario di torsione è costante in ogni sezione e pari a

$$\theta'(x) = -\frac{s_4}{GJ_t}$$

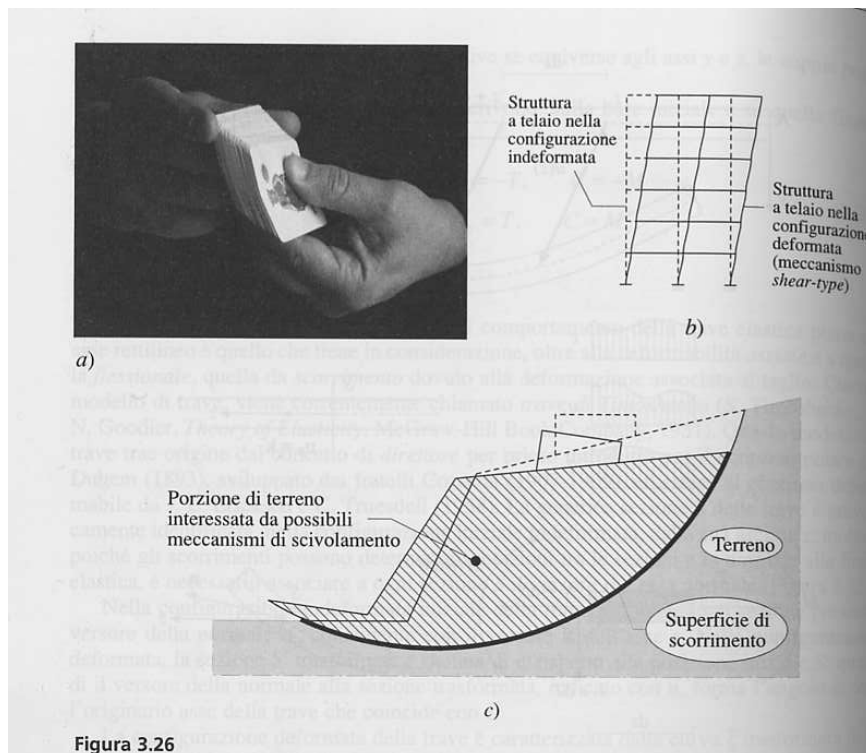
pertanto la rotazione  $\theta$  risulta una funzione lineare di  $x$

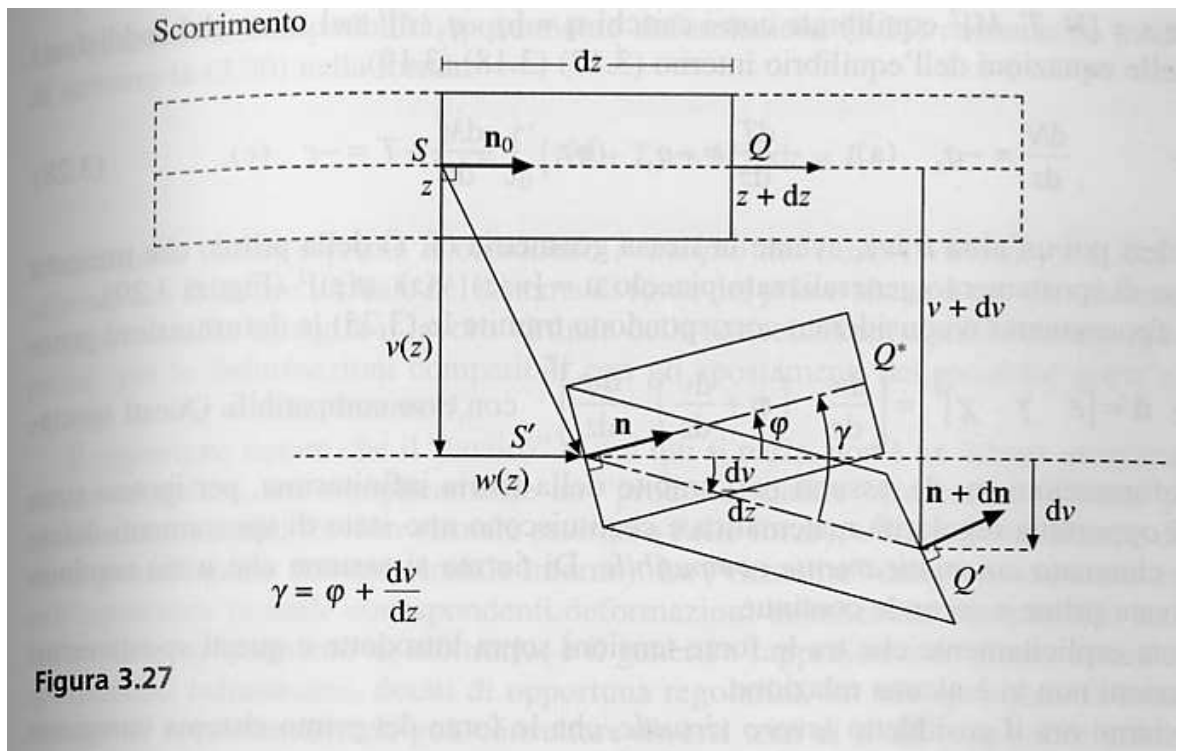
$$\theta(x) = -\frac{s_4}{GJ_t}x + c_1$$

- Se si pone  $\theta(l) = 0$ , si ottiene:  
 $c_1 = s_4 l / GJ_t \Rightarrow \theta(x) = (l - x) \frac{s_4}{GJ_t}$
- Imponendo  $\theta(0) = u_4$  si ottiene  
 $s_4 = \frac{GJ_t}{l} u_4$
- in base alla definizione di coefficiente di rigidezza,  
 $\Rightarrow \boxed{k_{44}^e = \frac{GJ_t}{l}}$
- Per equilibrio:  $s_4 = -s_{10}$  da cui  
 $k_{10\,4}^e = -\frac{GJ_t}{l}$
- Analogamente, imponendo  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(l) = u_{10}$ ,  
si ottiene:  $\boxed{k_{10\,10}^e = GJ_t/l.}$

# Deformazioni da taglio

Nella teoria di Eulero-Bernoulli, la sezione trasversale viene assunta piana e perpendicolare all'asse della trave dopo la flessione. Questa assunzione implica che le deformazioni della sezione trasversale da taglio siano trascurabili e cade in caso di travi tozze, travi parete, travi in lamellare ed in composito.





La trave di Timoshenko è una trave deformabile a taglio per cui la rotazione totale  $\theta$  della sezione trasversale si scrive

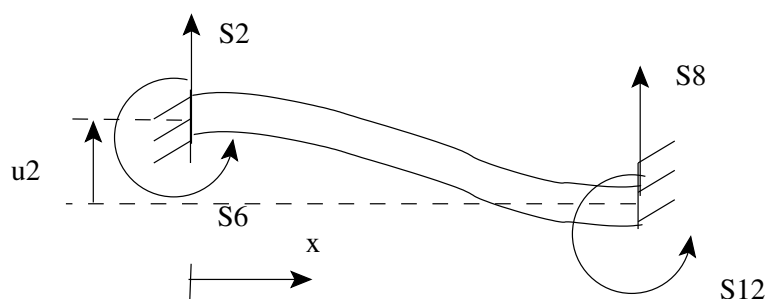
$$\theta = v'(x) + \varphi \quad (21)$$

dove:  $v'(x)$  è la rotazione della trave di Bernoulli, e  $\varphi$  è la rotazione dovuta al taglio.



# Traslazione

Utilizziamo il metodo degli spostamenti in analogia alla procedura adottata per il calcolo delle rigidezze della trave di Eulero-Bernoulli.



Si faccia avvenire la traslazione unitaria dell'estremo di sinistra, si vogliono le rigidezze che nascono nei vincoli; tutte le altre componenti di spostamento sono bloccate.

Scriviamo la traslazione trasversale

$$v = v^M + v^T \quad (22)$$

dove:  $v^M$ : traslazione dovuta alla flessione,  $v^T$  traslazione dovuta al Taglio

$$\frac{dv^T}{dx} = -\frac{T}{GA/\chi} \quad (23)$$

$$\frac{d^2v^M}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (24)$$

dove  $G$  modulo di elasticita' tangenziale e  $\chi$  é il fattore di taglio della sezione trasversale

$$M = -s_6 + s_2x, \quad T = s_2 \quad (25)$$

Integrando le equazioni differenziali (24), si ha:

$$\frac{GA}{\chi} v^T = -s_2x \quad (26)$$

$$EJ v^M = s_2 \frac{x^3}{6} - s_6 \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \quad (27)$$

da cui

$$\begin{aligned} v &= v^T + v^M = \\ &= \frac{s_2}{EJ} \frac{x^3}{6} - \frac{s_6}{EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{EJ} x + \frac{C_2}{EJ} - s_2x \frac{\chi}{GA} \\ &= \frac{s_2}{EJ} \frac{x^3}{6} - \frac{s_6}{EJ} \frac{x^2}{2} + \left( \frac{C_1}{EJ} - \frac{s_2\chi}{GA} \right) x + \frac{C_2}{EJ} \end{aligned} \quad (28)$$

$C_1$  e  $C_2$  sono costanti di integrazione e si ricavano imponendo le seguenti **condizioni al contorno**:

- $\frac{dv}{dx} = \frac{dv^T}{dx} = -\frac{s_2}{GA/\chi}$  in  $x = 0$
- $v(l) = 0$

ovvero:

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = \frac{C_1}{EJ} - \frac{s_2\chi}{GA} = -\frac{s_2\chi}{GA} \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v(l) = 0 = \frac{s_2 l^3}{6EJ} - \frac{s_6 l^2}{2EJ} - \frac{s_2 l \chi}{GA} + \frac{C_2}{EJ} \quad (29)$$

$$\Rightarrow \frac{C_2}{EJ} = -\frac{s_2 l^3}{6EJ} + \frac{s_6 l^2}{2EJ} + \frac{s_2 l \chi}{GA}$$

Sostituendo  $s_6 = s_2 * l/2$ , si ha:

$$\frac{C_2}{EJ} = -\frac{s_2 l^3}{6EJ} + \frac{s_2 l^3}{4EJ} + \frac{s_2 l \chi}{GA} =$$

$$\frac{s_2 l^3}{12EJ} \left( 1 + \frac{12\chi EJ}{l^2 GA} \right) = \frac{s_2 l^3}{12EJ} (1 + \Phi) \quad (30)$$

dove

$$\Phi = \frac{12EJ}{Gl^2 A/\chi}$$

Quindi si ottiene:

$$EJv = s_2 \frac{x^3}{6} - s_6 \frac{x^2}{2} - \frac{s_2 \Phi x l^2}{12} + (1 + \Phi) \frac{l^3 s_2}{12} \quad (31)$$

dove si è posto  $s_6 = \frac{s_2 l}{2}$  e  $\Phi := \frac{12 \chi EJ}{l^2 GA}$

Le altre forze possono essere determinate dalle equazioni di equilibrio:

$$s_8 = -s_2 \quad (32)$$

$$s_{12} = -s_6 + s_2 l \quad (33)$$

In  $x = 0$ ,  $v = u_2$ , quindi

$$u_2 = (1 + \Phi) \frac{l^3 s_2}{12 EJ} \quad (34)$$

Si ottiene

$$k_{22} = \frac{12EJ}{(1 + \Phi)l^3} \quad (35)$$

$$k_{62} = \frac{6EJ}{(1 + \Phi)l^2} \quad (36)$$

$$k_{82} = -\frac{12EJ}{(1 + \Phi)l^3} \quad (37)$$

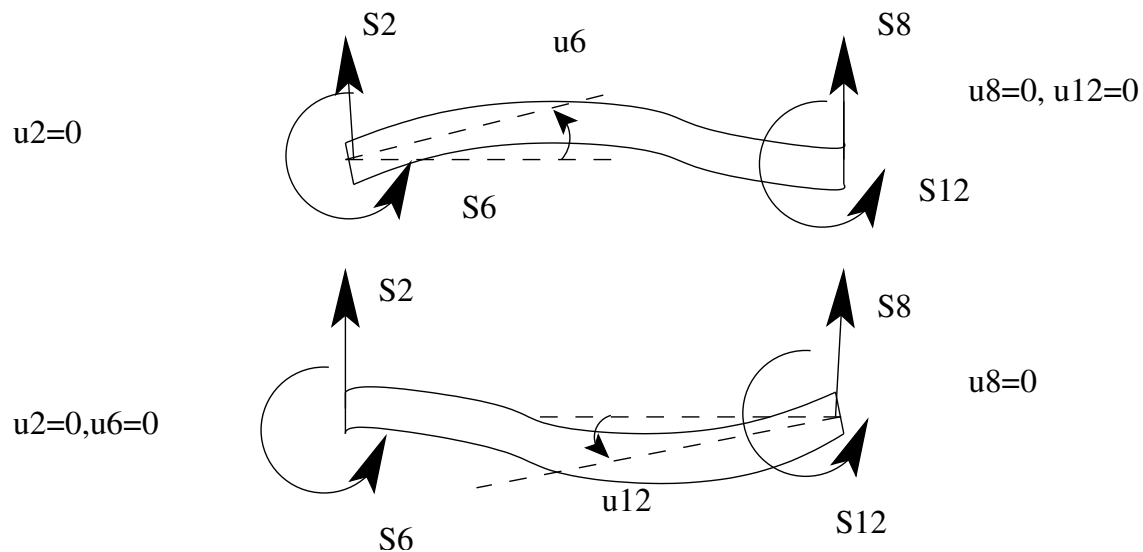
$$k_{12\ 2} = \frac{6EJ}{(1 + \Phi)l^2} \quad (38)$$

Analogamente, se si blocca  $u_2 = 0$  e si sblocca  $u_8$ :

$$k_{88} = \frac{12EJ}{(1 + \Phi)l^3} \quad (39)$$

$$k_{12\ 8} = -\frac{6EJ}{(1 + \Phi)l^2} \quad (40)$$

# Rotazione



Occorre determinare i coefficienti di rotazione associati alle rotazioni  $u_6$  e  $u_{12}$ . Analogamente al caso precedente, la freccia si valuta con l'equazione:

$$v = \frac{1}{EJ} s_2 \frac{x^3}{6} - \frac{1}{EJ} s_6 \frac{x^2}{2} + \left( \frac{1}{EJ} C_1 - s_2 \frac{\chi}{GA} \right) x + \frac{1}{EJ} C_2 \quad (41)$$

dove le costanti  $C_1$  e  $C_2$  si valutano con le condizioni al contorno:

- $u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$
- $u(l) = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{EJ} - \frac{s_2 \chi}{GA} = \frac{s_2 l^2}{6EJ} + \frac{s_6 l}{2EJ}.$

che sostituite nella equazione (41), danno:

$$EJv = \frac{s_2}{6}(x^3 - l^2x) + \frac{s_6}{2}(lx - x^2) \quad (42)$$

Inoltre , si ottiene che  $s_2 = \frac{6s_6}{(4+\Phi)l}$ .

Adesso in  $x = 0$ :

$$\frac{dv^M}{dx} = u_6 = \frac{dv}{dx} - \frac{dv^T}{dx} \quad (43)$$

da cui:

$$u_6 = \frac{s_6(1 + \Phi)l}{EJ(4 + \Phi)} \quad (44)$$

Quindi:

$$k_{66} = \frac{EJ(4 + \Phi)}{(1 + \Phi)l} \quad (45)$$

$$k_{86} = -\frac{EJ6}{(1 + \Phi)l^2} \quad (46)$$

$$k_{12\ 6} = \frac{s_{12}}{u_6} = \frac{-s_6 + s_2l}{u_6} = \frac{(2 - \Phi)EJ}{(1 + \Phi)l} \quad (47)$$

$$k_{12\ 12} = k_{6\ 6} \quad (48)$$





## Caso 3D Matrice di rotazione

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{0x} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{0y} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{0z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0x} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0y} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0x} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0y} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0x} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0y} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{pmatrix} \quad (49)$$

dove:

$$\lambda_{0x} = [l_{0x} \ m_{0x} \ n_{0x}] \quad (50)$$

$$\lambda_{0y} = [l_{0y} \ m_{0y} \ n_{0y}] \quad (51)$$

$$\lambda_{0z} = [l_{0z} \ m_{0z} \ n_{0z}] \quad (52)$$

rappresentano le matrici dei coseni direttori delle direzioni  $(x, y, z)$  nel riferimento  $(X, Y, Z)$ .