

# *Corso di Progetto di Strutture*

*POTENZA, a.a. 2009 – 2010*

## **Serbatoi e tubi**



**Dott. Ing. Marco VONA**

*DiSGG, Università di Basilicata*

*Centro di Competenza Regionale sul Rischio Sismico (CRiS)*

*marco.vona@unibas.it*





## I COEFFICIENTI ELASTICI PER I TUBI LUNGH

2

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

Per condizioni di vincolo più complesse è utile conoscere i valori dello *spostamento* e della *rotazione* dovuta a una coppia  $M = 1$  o ad un taglio  $Q = 1$  applicati al bordo libero

Tali grandezze sono chiamate **coefficienti elastici** del bordo

Per una tubo lungo e coppia  $M = 1$  in corrispondenza di  $x = 0$  si ha:  $Q = 0$  e inoltre

$$\begin{cases} 1 = -2D\alpha^2\delta \\ 0 = C + S \end{cases} \quad M = 1$$

Da cui si ottiene, poiché :

$$\bar{w} = \bar{w}' = 0$$



## I COEFFICIENTI ELASTICI PER I TUBI LUNGH

3

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

Ricordando che

$$M = Dw'' = D \left\{ \bar{w}'' + 2\alpha^2 [-Sc + Cs + S_1c_1 - C_1s_1] \right\}$$

$$Q = Dw''' = D \left\{ \bar{w}''' + 2\alpha^3 [(C+S)c + (-C+S)s + (-C_1+S_1)c_1 + (-C_1-S_1)s_1] \right\}$$

**Spostamento** dovuto ad una coppia unitaria

$$w_m = w(0) = C = \frac{1}{2\alpha^2 D}$$

**Rotazione** dovuta ad una coppia unitaria

$$\varphi_m = \varphi(0) = -\alpha(-C + S) = \frac{1}{\alpha D}$$

**COEFFICIENTI**

**ELASTICI**



## I COEFFICIENTI ELASTICI PER I TUBI LUNGH

4

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

Taglio  $Q = 1$  ( $M = 0$ )

$$\begin{cases} 0 = S \\ 1 = -2D\alpha^2(C + S) \end{cases}$$

$$Q = 1$$



Da cui si ottiene  $C = \frac{1}{2\alpha^2 D}$

E quindi gli spostamenti  $w_q = w(0) = C = \frac{1}{2D\alpha^3}$

E le rotazioni  $\varphi_q = \varphi(0) = -\alpha(-C + S) = \frac{1}{2\alpha^2 D}$

È da osservare che, in accordo al **teorema di reciprocità**:

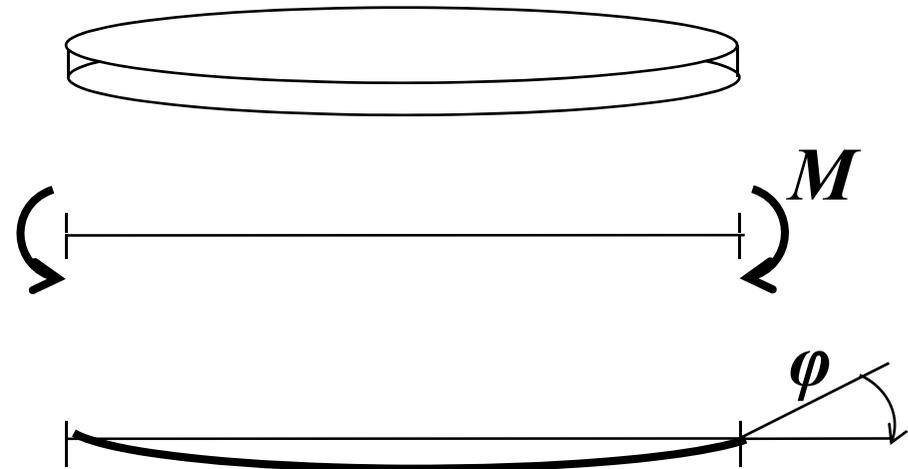
$$w_m = \varphi_q$$

In genere i tubi sono chiusi nella parte terminale con una **piastra circolare**

Determiniamo i coefficienti elastici per tale piastra

**Rotazione dovuta ad una coppia ripartita sul contorno**

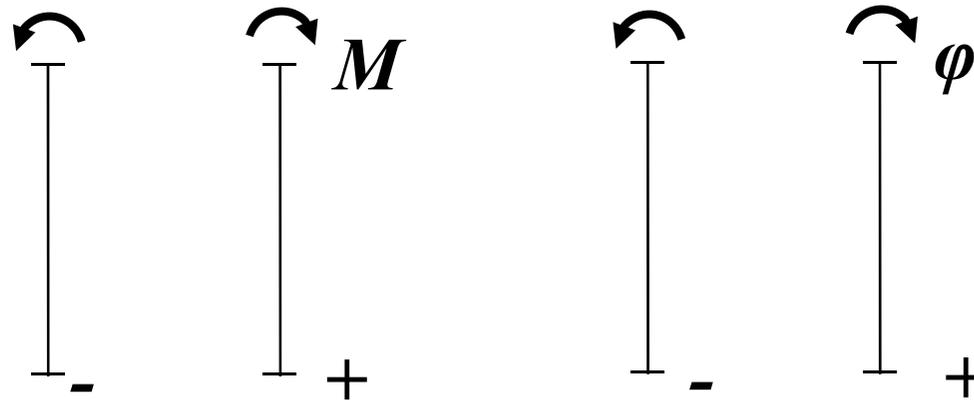
$$\varphi = -\frac{M}{D(1+\nu)} r$$



Considerando versi positivi come nella teoria delle piastre circolari

## I COEFFICIENTI ELASTICI DELLA PIASTRA

Nella teoria dei tubi si adotta comunemente la stessa convenzione della teoria delle piastra per i momenti (  $M$  ) ma opposta per il verso delle rotazioni (  $\varphi$  )



Pertanto adottando la convenzione utilizzata nella teoria dei tubi la rotazione dovuta ad una coppia unitaria è pari a:

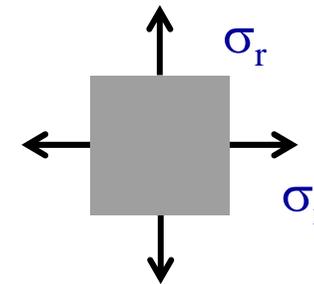
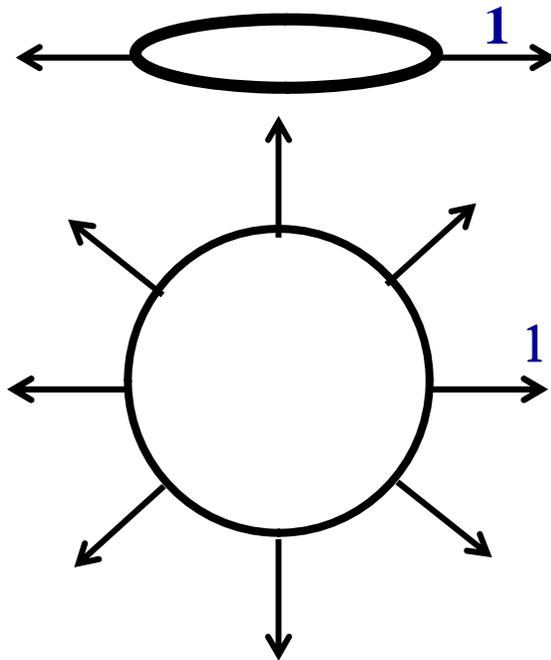
$$\varphi_m = \frac{R}{D(1 + \nu)}$$

Lo spostamento radiale  $w$  dovuto alla coppia unitaria è nullo

$$w_m = 0$$

## I COEFFICIENTI ELASTICI DELLA PIASTRA

Quando invece la piastra è soggetta a forze radiali distribuite uniformemente sul contorno, ogni punto è soggetto ad uno stato di tensione biassiale



In cui  $\sigma_r$  è la tensione radiale

$$\sigma_r = \frac{1}{s}$$



## I COEFFICIENTI ELASTICI DELLA PIASTRA

8

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

La deformazione radiale vale

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_r) = \frac{1 - \nu}{E s}$$

E, di conseguenza, lo spostamento radiale al bordo:

$$w_q = \frac{R(1 - \nu)}{E s}$$

Tale spostamento può, in generale, essere trascurato rispetto al **coefficiente elastico del tubo** poiché rappresenta un comportamento a membrana (per la piastra)

La rotazione ovviamente è nulla

$$\varphi_q = 0$$

## I COEFFICIENTI ELASTICI DEGLI ANELLI ISOLATI

9

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

Per una coppia unitaria si ha ( $M = 1$ ):

$$\varphi_m = \frac{R^2}{EJ} \quad w_m = 0$$

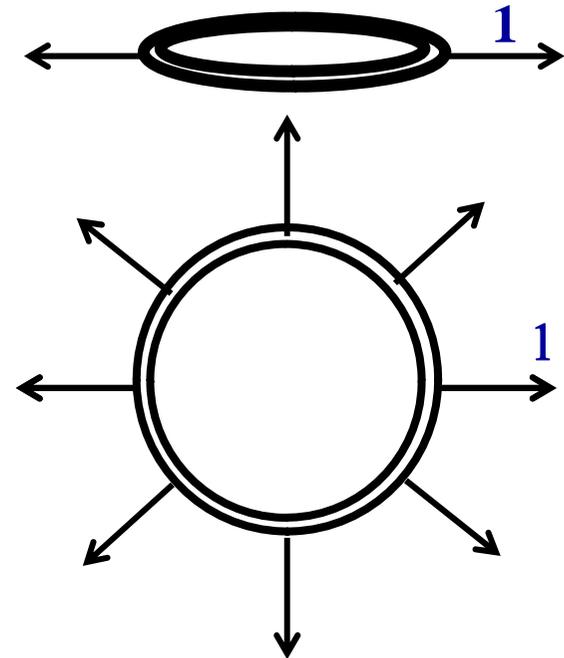
Mentre per la **forza radiale unitaria** si ha:

$$1 = \frac{N}{R} \quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{R}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{R}{EA}$$

$$w_q = \varepsilon R = \frac{R^2}{EA} \quad \varphi_q = 0$$

La **rotazione ovviamente è nulla**





## RIEPILOGO DEI COEFFICIENTI ELASTICI

10

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

Nella tabella sono riepilogati i **coefficienti elastici** dei casi visti

	$\varphi_m$	$w_m = \varphi_q$	$w_q$
Tubo lungo	$\varphi_m = \frac{1}{\alpha D}$	$w_m = \frac{1}{2\alpha^2 D}$	$w_q = \frac{1}{2D\alpha^3}$
Piastra circolare	$\varphi_m = \frac{R}{D(1+\nu)}$	0	$w_q = \frac{R(1-\nu)}{Es}$
Anello isolato	$\varphi_m = \frac{R^2}{EJ}$	0	$w_q = \frac{R^2}{EA}$



## METODO DEI COEFFICIENTI ELASTICI: APPLICAZIONI

11

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

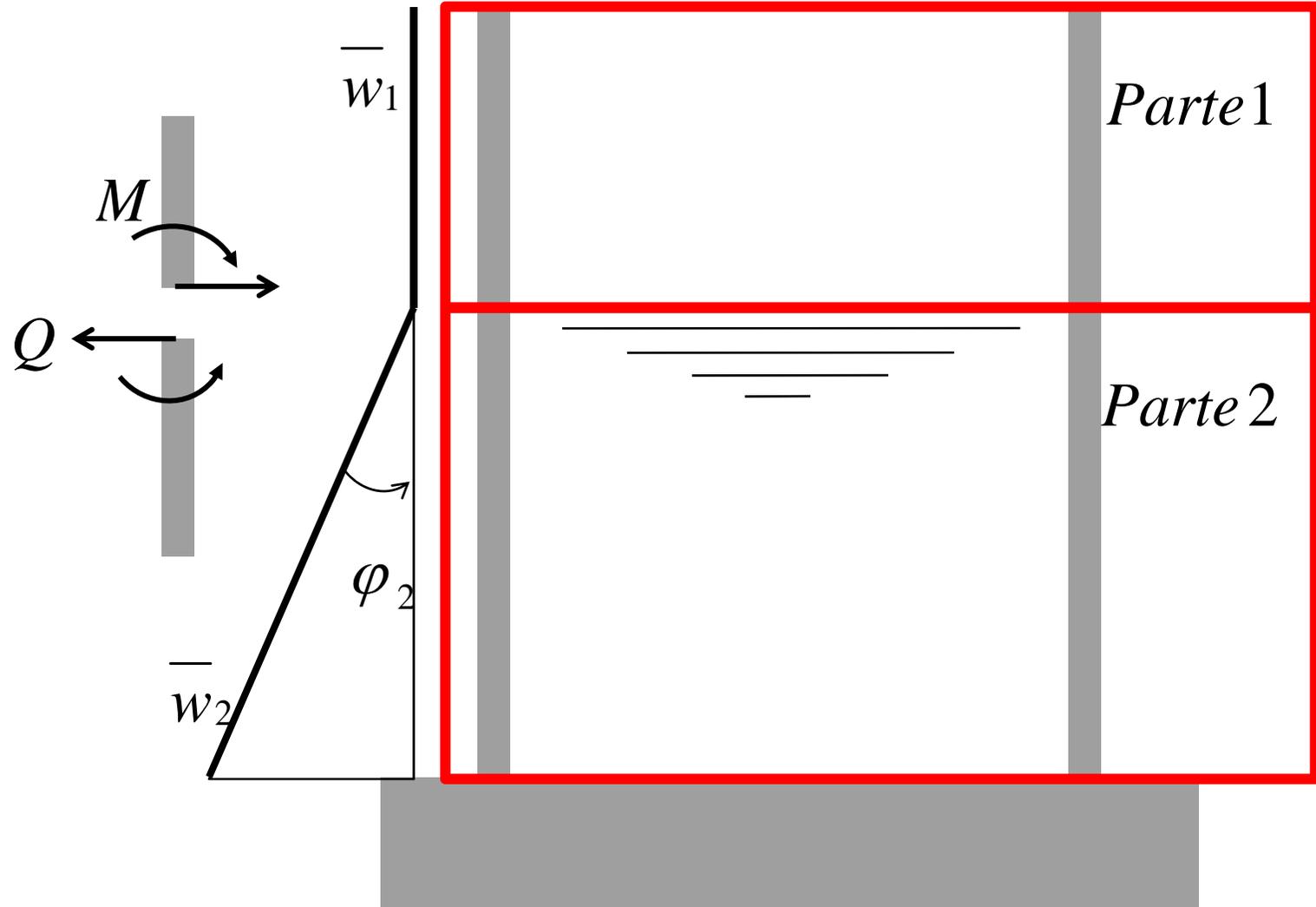
PROGETTO DI STRUTTURE

In genere il procedimento consiste nell'utilizzare sistematicamente dei coefficienti elastici nello studio dei tubi (e di altre strutture a simmetria centrale) soggetti a condizioni di vincolo complesse

Consideriamo innanzitutto un serbatoio solo in parte pieno e supponiamo che sia la parte vuota sia quella piena possano essere considerati come tubi lunghi

L'obiettivo è in genere quello di determinare le sollecitazioni (  $M$  e  $Q$  ) in alcune sezioni particolari quali ad esempio quelle in corrispondenza del pelo libero del fluido

## Serbatoio parzialmente riempito di liquido



## Serbatoio parzialmente riempito di liquido

L'obiettivo è quello di determinare le sollecitazioni ( $M$  e  $Q$ ) nella sezione corrispondente al pelo libero del liquido

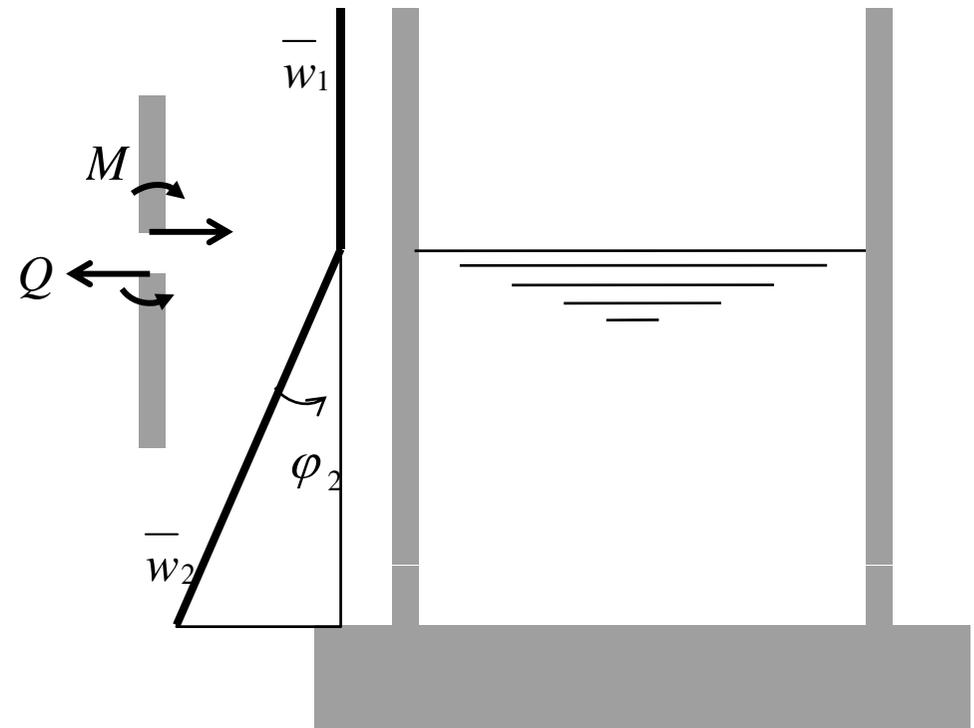
In assenza di sollecitazioni ( $M$  e  $Q$ ) lo spostamento e la rotazione in  $S$  hanno i seguenti valori

### Parte superiore

$$\bar{w}_1 = 0 \quad \bar{\varphi}_1 = 0$$

### Parte inferiore

$$\bar{w}_2 = 0 \quad \bar{\varphi}_2 = -\frac{\gamma R^2}{E_s}$$

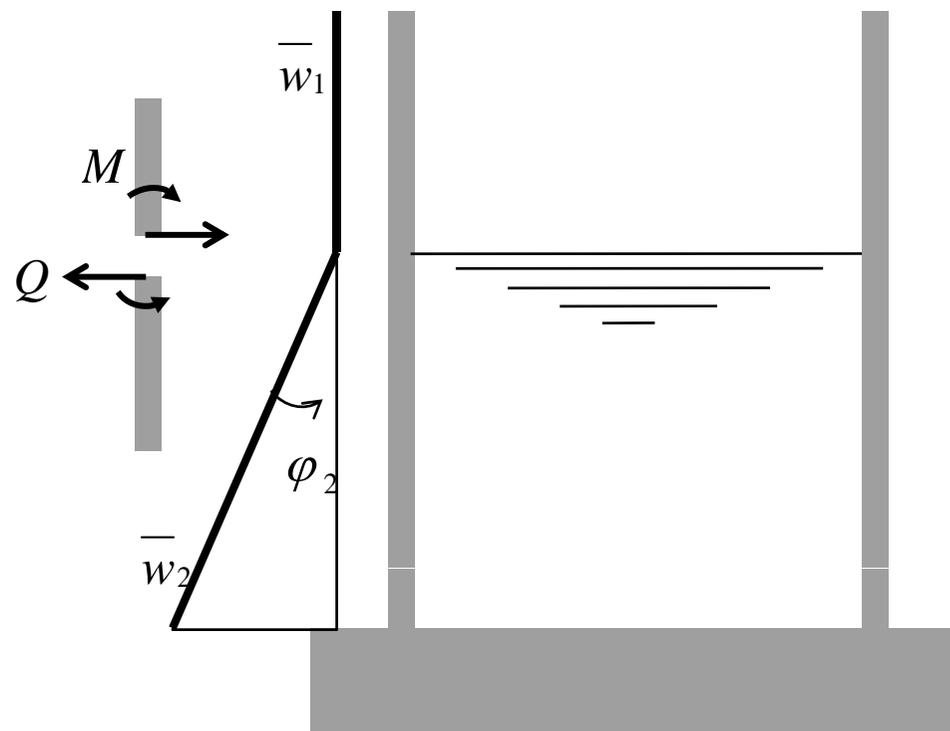


## Serbatoio parzialmente riempito di liquido

Considerando anche  $M$  e  $Q$  e utilizzando i coefficienti elastici si ottengono le espressioni degli spostamenti e delle rotazioni nella sezione  $S$

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0 - M\varphi_m + Q\varphi_q \\ w_1 = 0 + Mw_m - Qw_q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2 = -\frac{\gamma R^2}{Es} + M\varphi_m + Q\varphi_q \\ w_2 = 0 + Mw_m + Qw_q \end{cases}$$



## Serbatoio parzialmente riempito di liquido

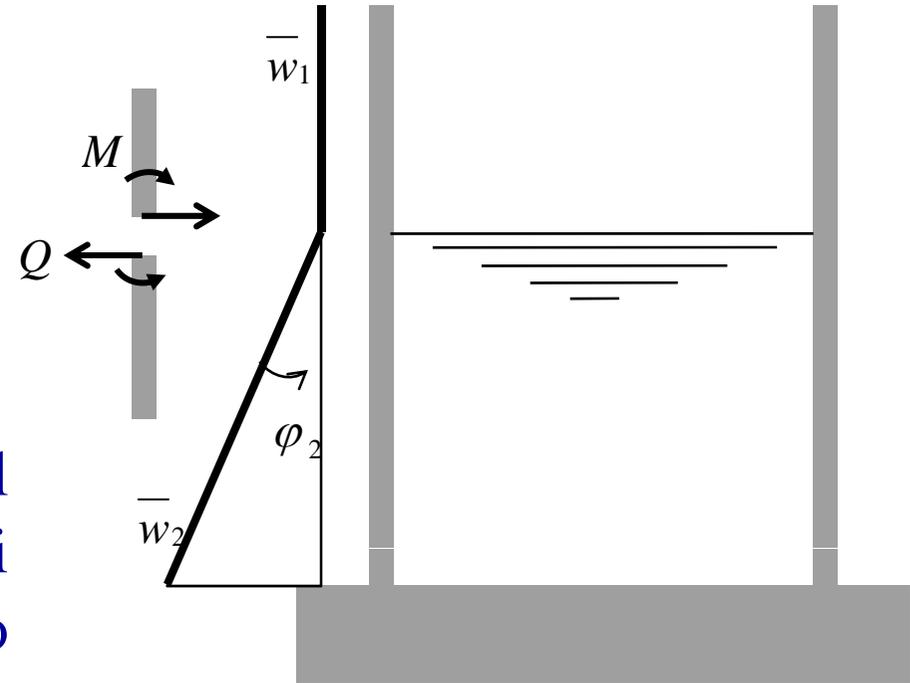
Considerando le equazioni di congruenza nella sezione  $S$  :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad w_1 = w_2$$

Si ottiene:

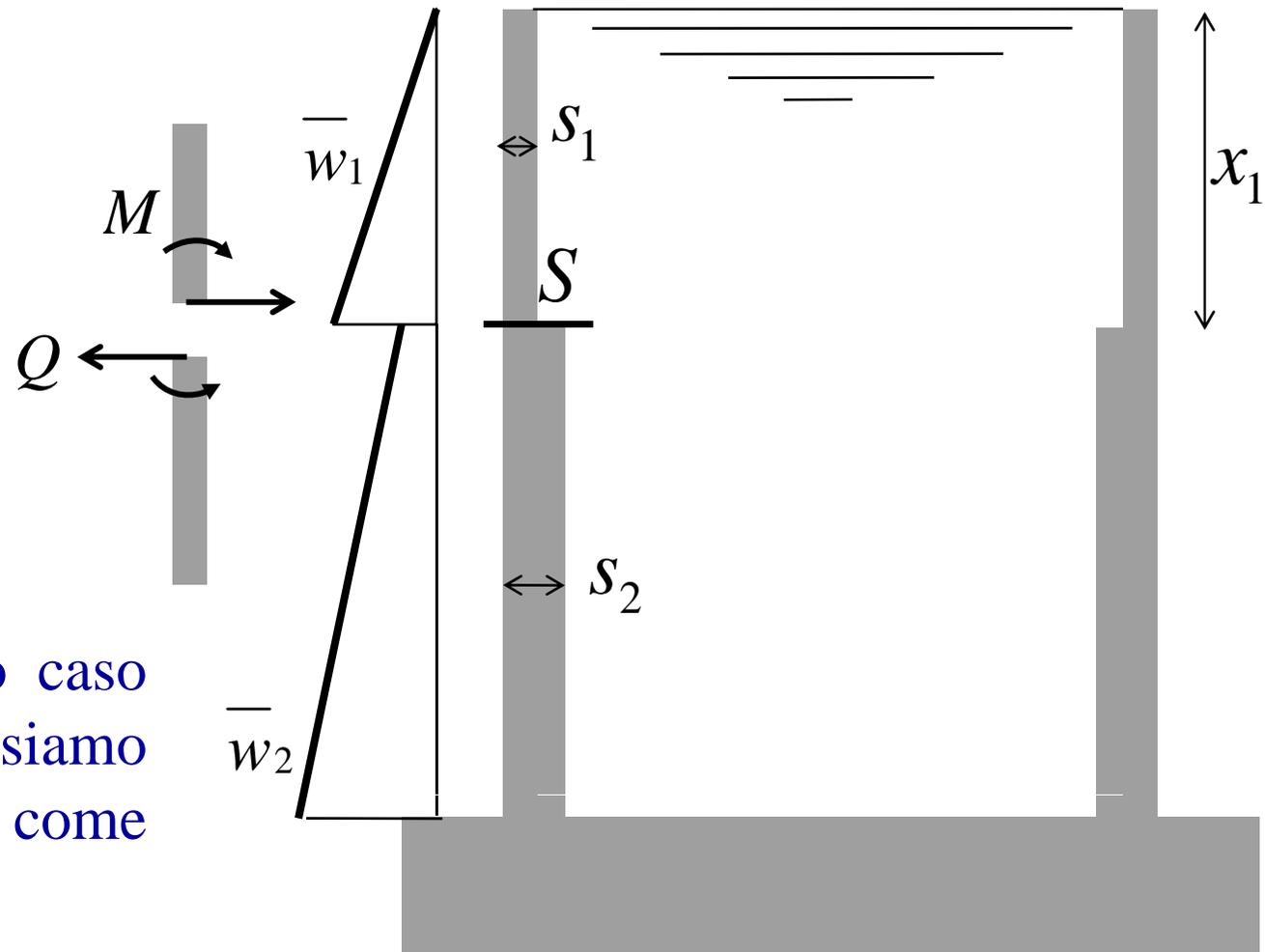
$$Q = 0 \qquad M = \frac{\gamma R^2}{2Es \varphi_m}$$

In tal modo le due sezioni del serbatoio possono essere studiate indipendentemente considerando la sezione  $S$  come bordo libero al quale applicare le sollecitazioni  $M$  e  $Q$



## Serbatoio interamente riempito con variazione di sezione

Anche in questo caso si vogliono determinare le sollecitazioni ( $M$  e  $Q$ ) nella sezione corrispondente alla variazione di spessore  $s$



Anche in questo caso le **due parti** possiamo considerarle come **tubi lunghi**

## Serbatoio interamente riempito con variazione di sezione

In assenza di sollecitazioni (  $M$  e  $Q$  ), lo spostamento e la rotazione in  $S$  valgono :

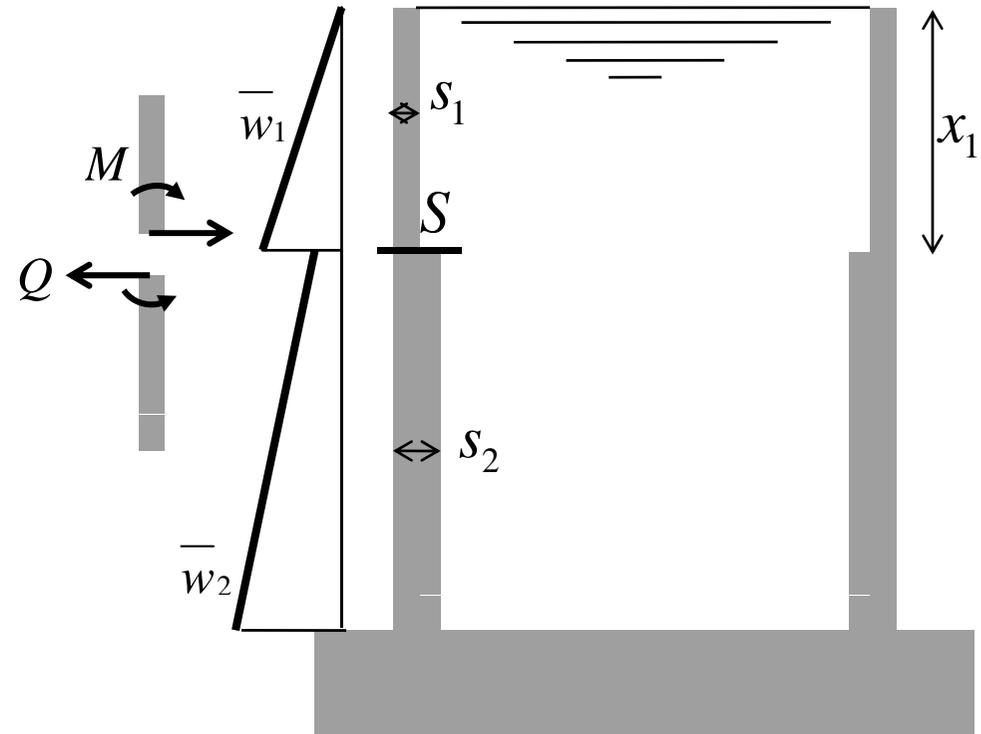
### Parte superiore

$$\bar{w}_1 = \frac{\gamma x_1 R^2}{Es_1} \quad \bar{\varphi}_1 = -\frac{\gamma R^2}{Es_1}$$

### Parte inferiore

$$\bar{w}_2 = \frac{\gamma x_1 R^2}{Es_2}$$

$$\bar{\varphi}_2 = -\frac{\gamma R^2}{Es_2}$$



## Serbatoio interamente riempito con variazione di sezione

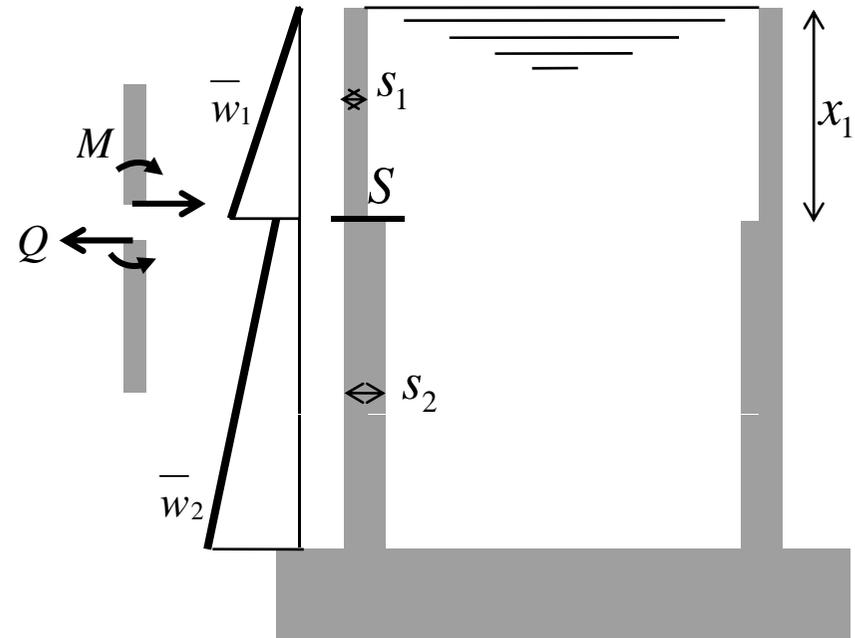
In presenza di sollecitazioni (  $M$  e  $Q$  ), lo spostamento e la rotazione in  $S$  valgono :

### Parte superiore

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = -\frac{\gamma R^2}{Es_1} - M\varphi_{m1} + Q\varphi_{q1} \\ w_1 = \frac{\gamma \cdot x_1 R^2}{Es_1} + Mw_{m1} - Qw_{q1} \end{array} \right.$$

### Parte inferiore

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = -\frac{\gamma R^2}{Es_2} + M\varphi_{m2} + Q\varphi_{q2} \\ w_2 = \frac{\gamma \cdot x_1 R^2}{Es_2} + Mw_{m2} + Qw_{q2} \end{array} \right.$$



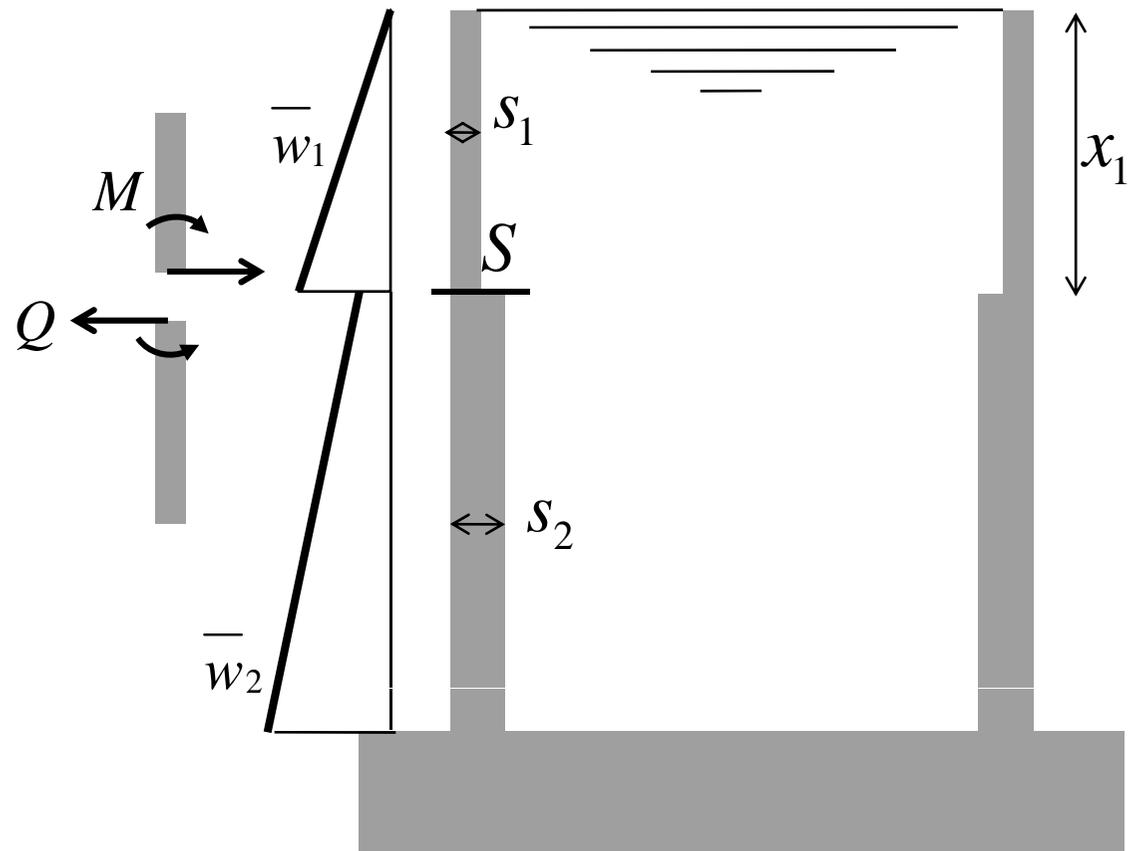
## Serbatoio interamente riempito con variazione di sezione

Anche in questo caso imponendo le equazioni di congruenza

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$w_1 = w_2$$

Si determinano le sollecitazioni  $M$  e  $Q$



## Serbatoio coperto da piastra circolare e riempito

Indichiamo con  $p$  le grandezze relative alla piastra e con  $s$  le grandezze relative al serbatoio

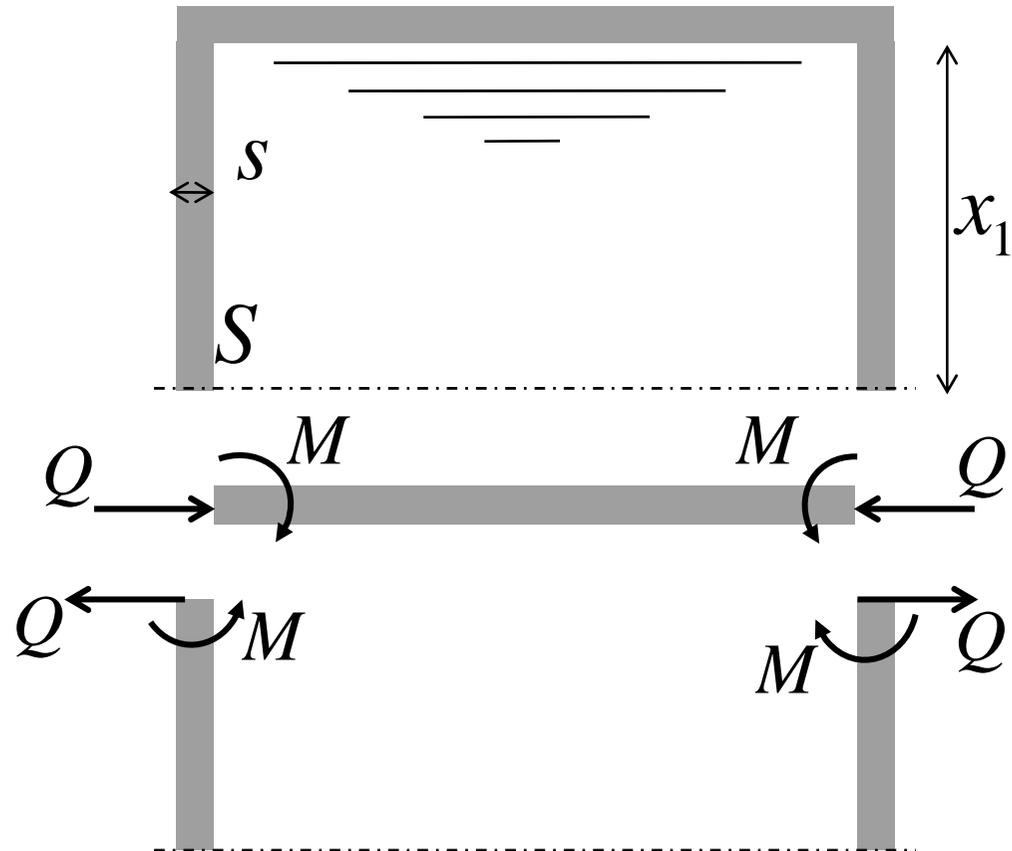
Si ha sulla piastra

$$\bar{w}_p = \bar{\varphi}_p = 0$$

Sul serbatoio

$$\bar{w}_s = 0$$

$$\bar{\varphi}_s = -\frac{\gamma R^2}{Es}$$



## Serbatoio coperto da piastra circolare e riempito

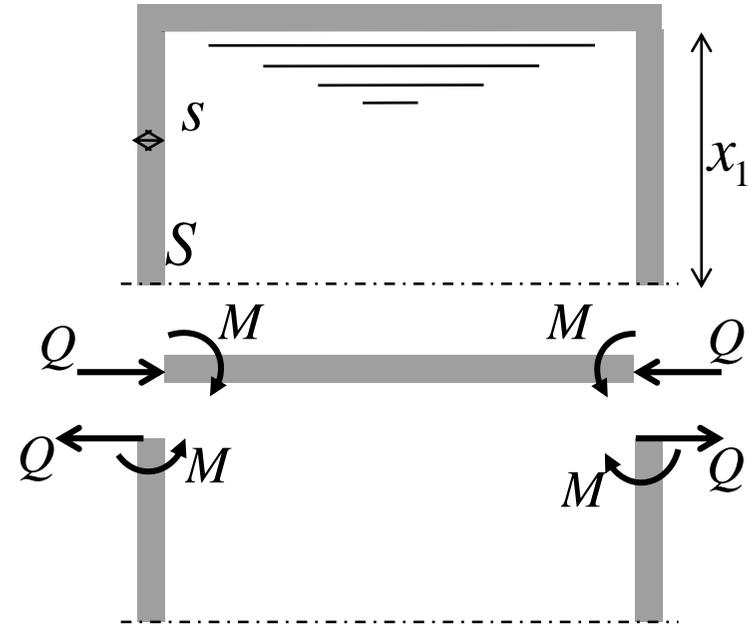
In presenza di sollecitazioni (  $M$  e  $Q$  ), lo spostamento e la rotazione in  $S$  valgono :

### Piastra

$$\begin{cases} \varphi_p = -M \varphi_{mp} \\ w_p = -Q w_{qp} \end{cases}$$

### Serbatoio

$$\begin{cases} \varphi_s = -\frac{\gamma R^2}{E s s} + M \varphi_{ms} + Q \varphi_{qs} \\ w_s = M w_{ms} + Q w_{qs} \end{cases}$$



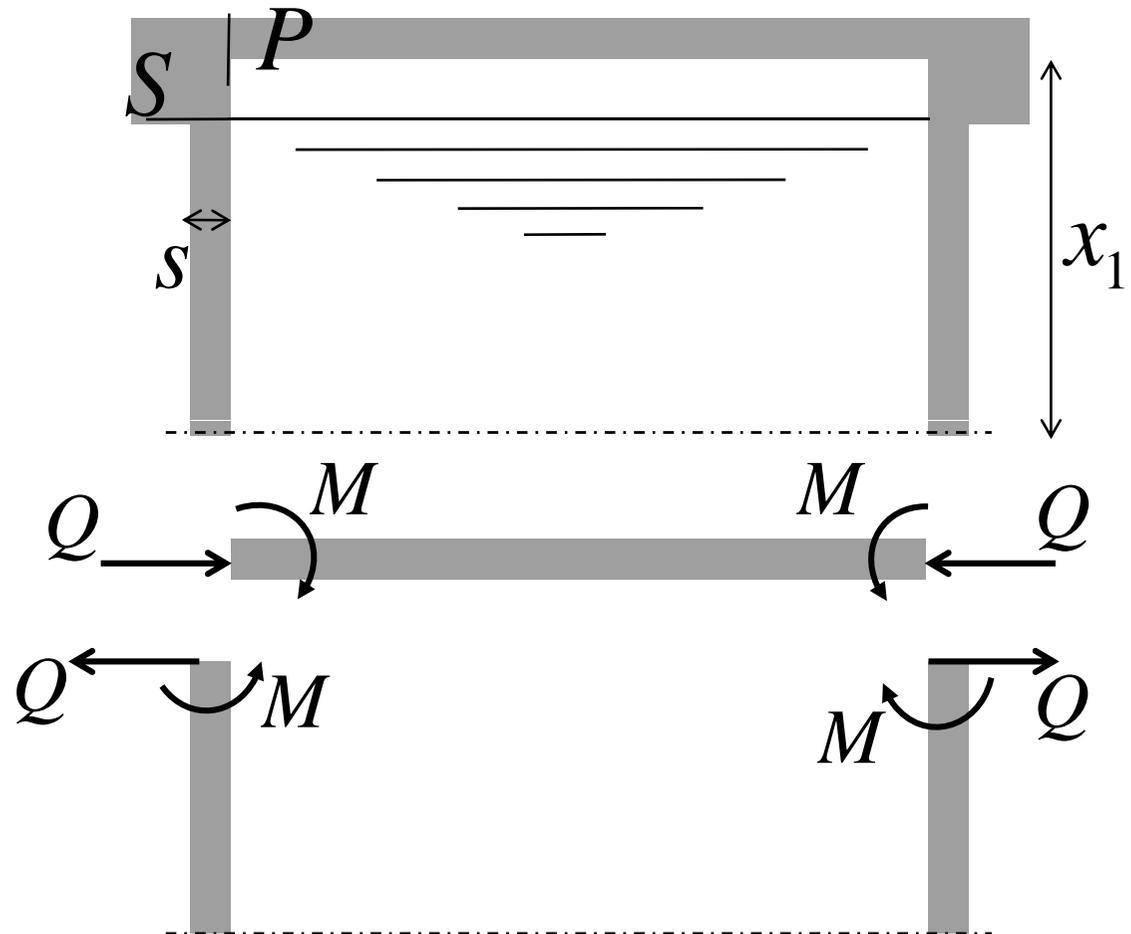
Si determinano quindi le sollecitazioni  $M$  e  $Q$

## Serbatoio coperto da piastra circolare con anello perimetrale

Consideriamo il caso più complesso di un serbatoio lungo coperto da una piastra circolare munita di anello di irrigidimento

Il serbatoio sia riempito di liquido fino alla quota di intradosso dell'anello

Anche in questo caso si vogliono determinare le sollecitazioni ( $M$  e  $Q$ ) nelle sezioni  $P$  ed  $S$  e nella sezione baricentrica dell'anello





## METODO DEI COEFFICIENTI ELASTICI: APPLICAZIONI

23

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

### Serbatoio coperto da piastra circolare con anello perimetrale

Dall'equilibrio dell'anello si ricava

$$\begin{cases} -Q_p R_r + Q_a R_a + Q_s R_s = 0 \\ -(M_p + Q_p t_p) R_p + M_a R_a + (M_s + Q_s t_s) R_s = 0 \end{cases}$$

Le caratteristiche di deformazione nel punto  $P$  della piastra sono:

$$\varphi_P = -M \varphi_{mP}; w_P = -Q w_{qP}$$

Quindi nel punto  $A$  baricentro dell'anello rigidamente collegato a  $P$

$$\varphi_P = -M \varphi_{mP}; w_P = -Q w_{qP}$$



## I SERBATOI IN C.A.P.

24

M. VONA

a.a. 2009 – 2010

PROGETTO DI STRUTTURE

Nei serbatoi in c.a. ordinario ovviamente il maggiore pericolo è rappresentato dalla possibilità di fessurazione del calcestruzzo dovuta alla trazione degli anelli

Tale problema può essere facilmente risolto ricorrendo alla precompressione. In linea di principio, essa consiste nell'applicare delle pressioni, con direzione dall'esterno all'interno, uguali o maggiori delle pressioni dovute al liquido contenuto

In tali condizioni il serbatoio pieno è scarico se la pressione applicata uguaglia quella interna del liquido mentre è soggetto ad una forza residua se questa è inferiore

Ovviamente, la condizione di carico più sfavorevole per un serbatoio in c.a.p. è quella di serbatoio vuoto



### Serbatoio a vuoto

In tal caso, agisce sulla parete l'intera pressione di precompressione che non è equilibrata dall'effetto, antagonista, del liquido contenuto all'interno

È anche evidente che il massimo sforzo si ha all'atto dell'applicazione della precompressione (e cioè prima che si siano verificate le cadute di tensione)

In tale fase si svolge perciò un vero e proprio collaudo statico del serbatoio

Per ottenere in tutte le sezioni una pressione residua costante si applica un carico di precompressione pari a:

$$\bar{p} = -(p + \Delta p)$$

Ovviamente si ha:  $\Delta p = \eta \cdot p_1$

In cui  $\eta = 0.1$  e

$p_1 =$  pressione alla base del serbatoio

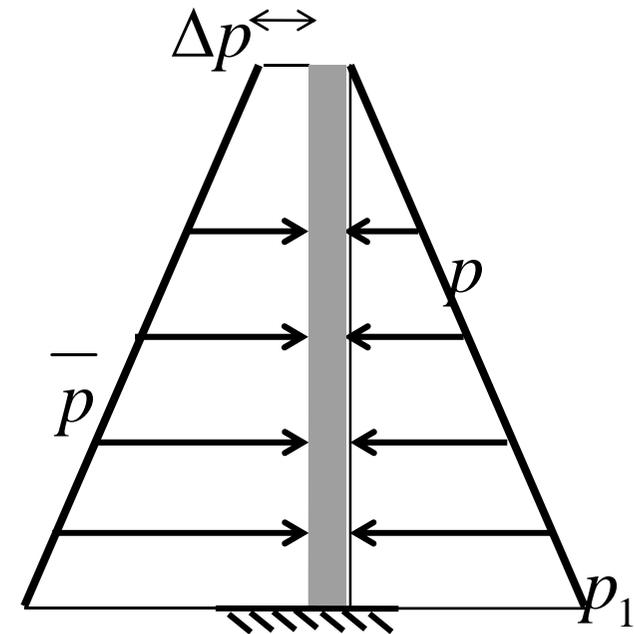
Il valore della precompressione sarà

$$Z = \bar{p}R$$

Il quantitativo di armature sarà

$$A_{s,p} = \bar{p}R / \sigma_{sp}$$

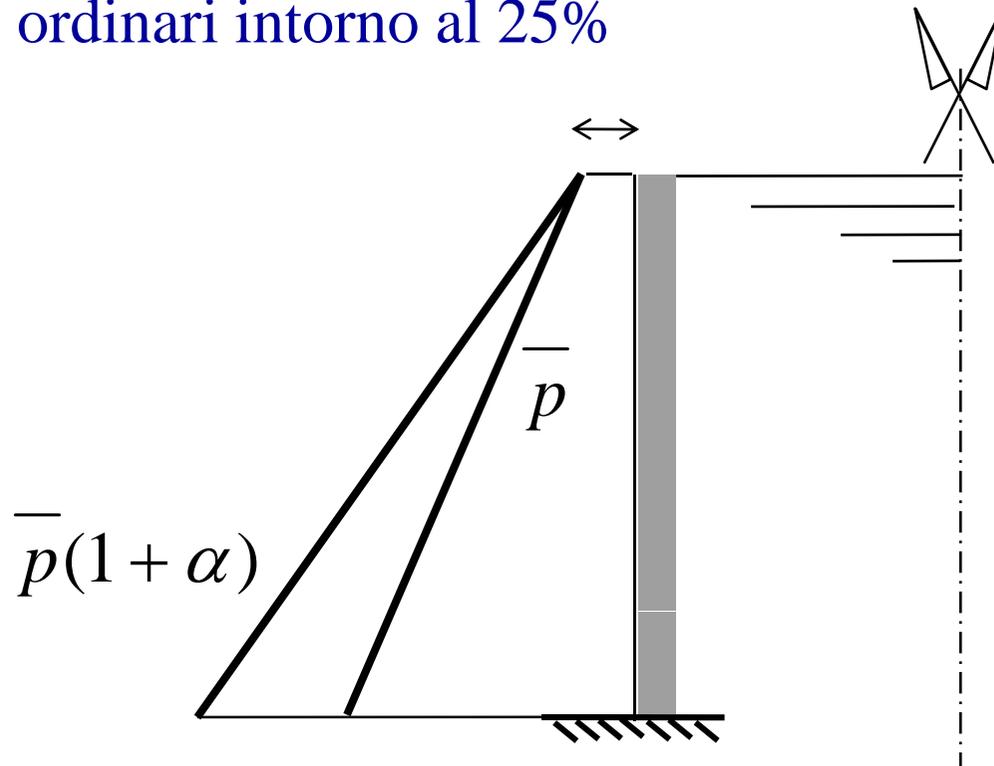
Tutto ciò è valido a cadute di tensione lente esaurite



Le verifiche del serbatoio dovranno essere eseguite prima delle cadute lente e quindi sotto l'azione di una pressione

$$\bar{p}' = \bar{p}(1 + \alpha)$$

Essendo  $\alpha$  il coefficiente di caduta di tensione valutabile nei casi ordinari intorno al 25%



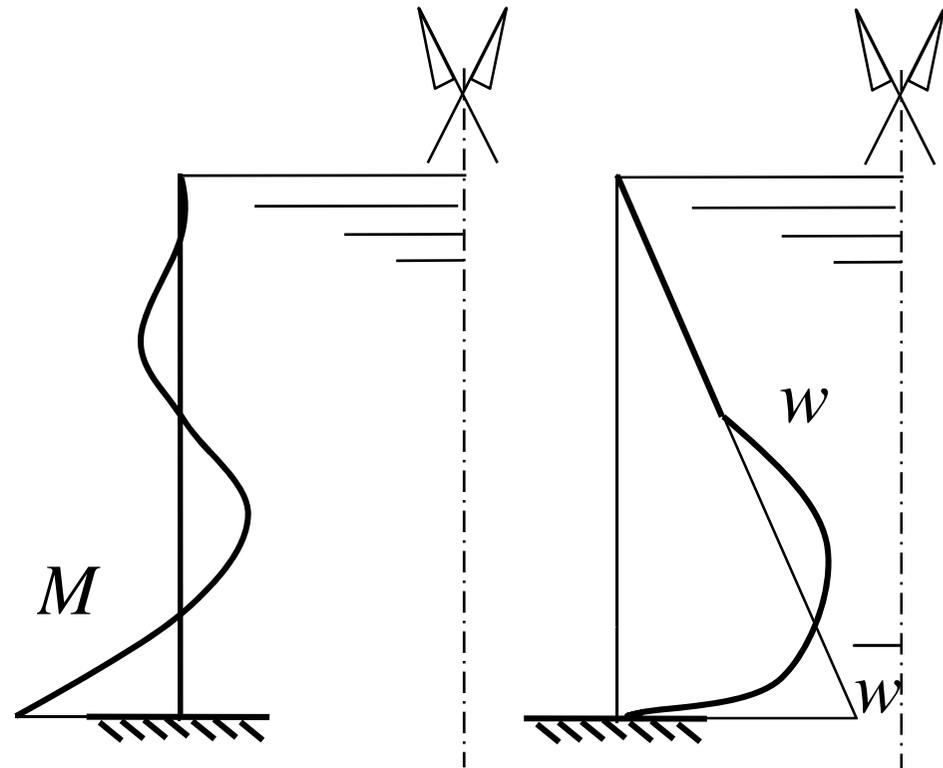
## Il momento flettente della striscia

Per assorbire il momento flettente della striscia verticale del tubo si può prevedere anche una precompressione assiale ( $V$ ) realizzata con cavi verticali equidistanti. In tal modo si esclude ogni sollecitazione di trazione anche nel senso delle generatrici

Per annullare la trazione al lembo esterno del serbatoio vuoto deve essere:

$$\frac{V}{s} - \frac{6M}{s^2} = 0$$

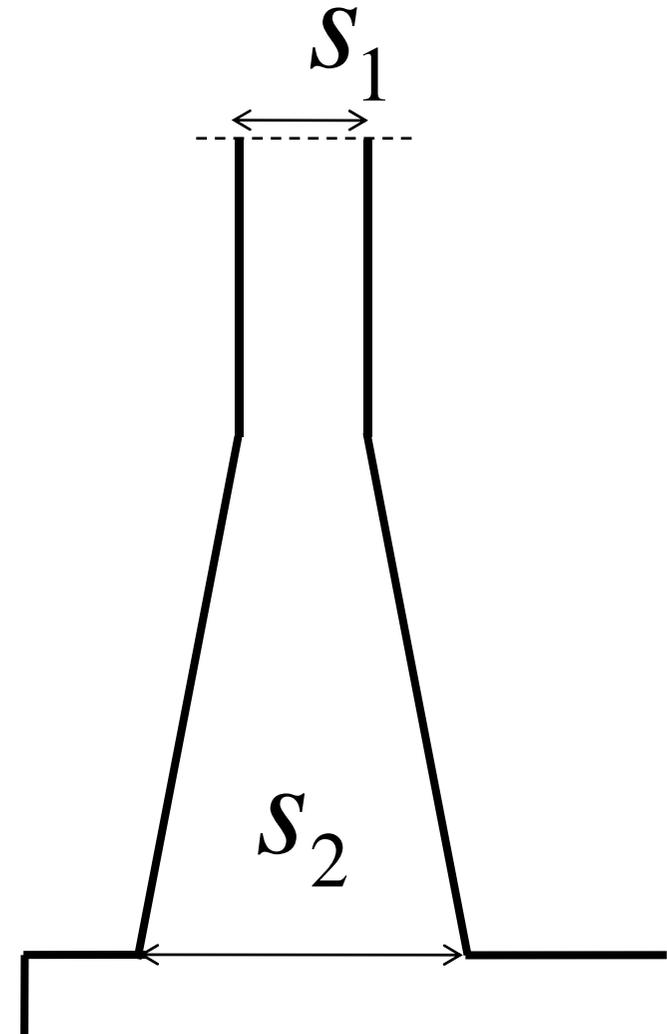
ovvero 
$$V = \frac{6M}{s}$$



Si può verificare spesso che la tensione di compressione massima sia superiore alla tensione massima di calcolo sul calcestruzzo

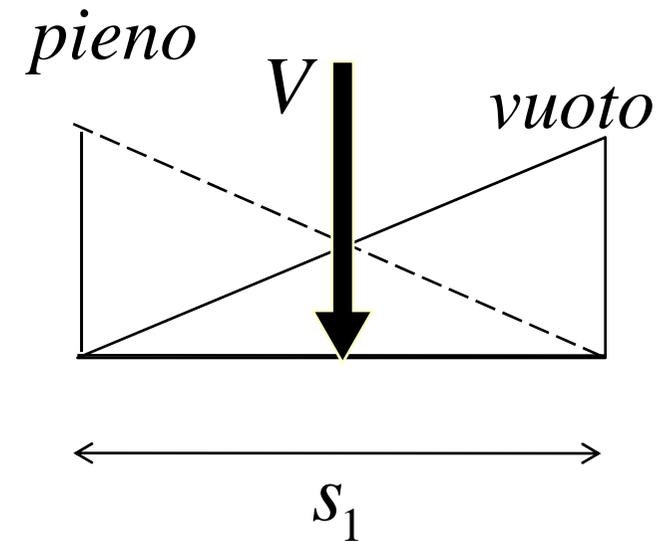
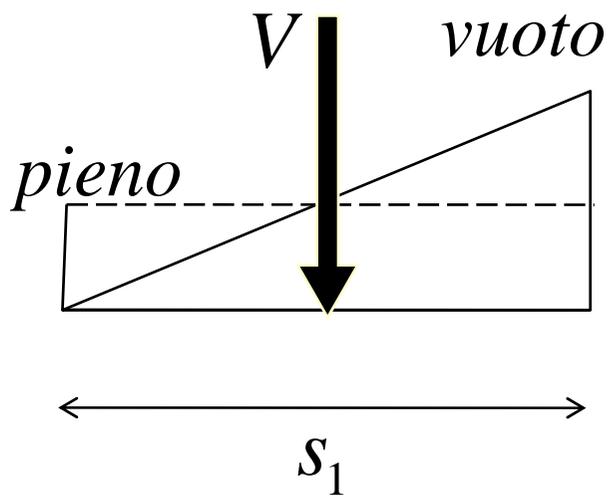
A tale inconveniente si può ovviare ringrossando le sezioni nella parte inferiore

Gli incrementi di sollecitazione dovuti a tale incremento di sezione può essere trascurato in rapporto all'incremento della resistenza



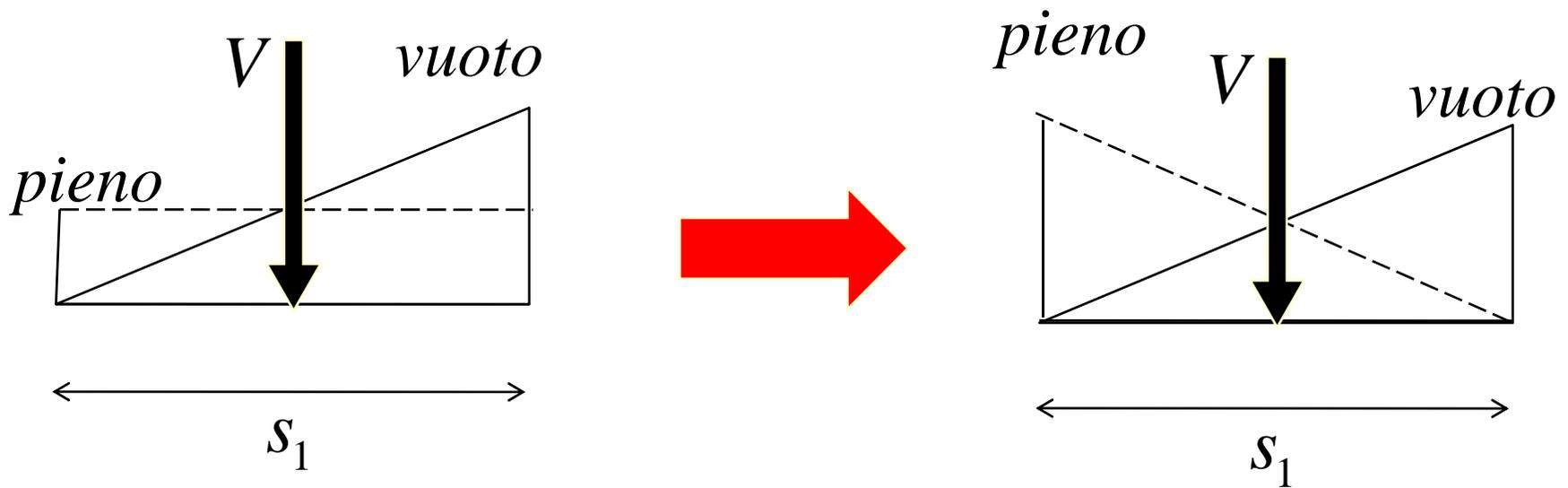
## Diagrammi delle tensioni

Si può ottenere una riduzione delle tensioni e della risultante disponendo in modo asimmetrico il cavo di precompressione al piede del serbatoio



## Diagrammi delle tensioni con cavi eccentrici

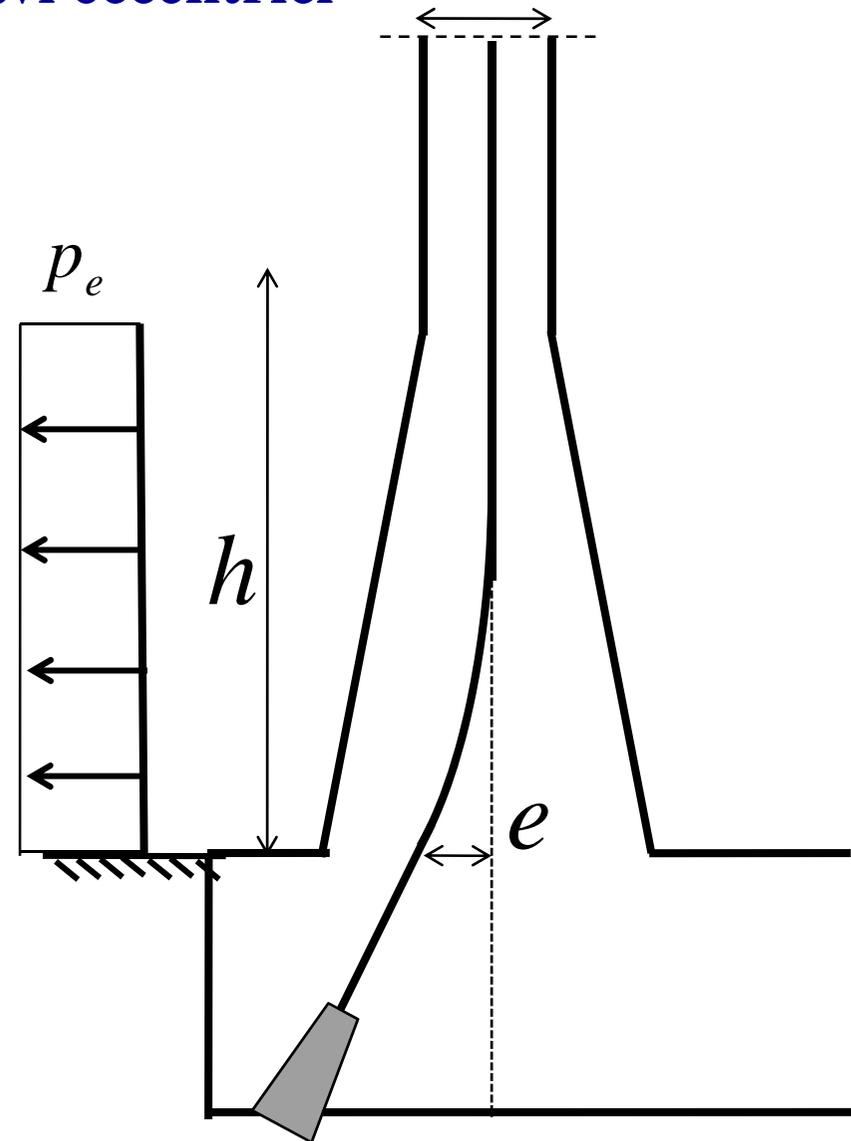
In questo caso però i cavi di precompressione non sono più concordanti e occorre considerare delle variazioni di sollecitazione dovute alla precompressione



## Diagrammi delle tensioni con cavi eccentrici

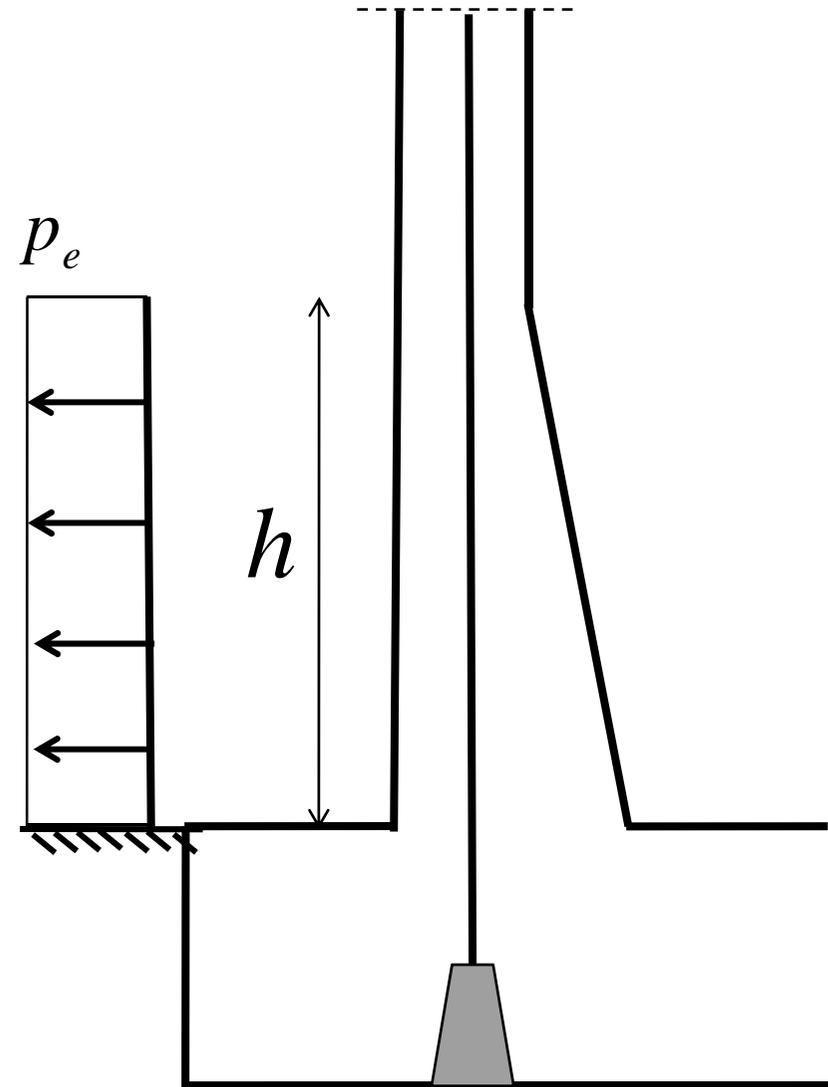
Se ad esempio viene data una forma parabolica ai cavi di precompressione nell'ultima parte degli stessi occorre correggere le sollecitazioni per effetto del carico equivalente alla precompressione

$$p_e = \frac{2eV}{h^2}$$



## Diagrammi delle tensioni con cavi eccentrici

Analogo comportamento è possibile nel caso di una disposizione del cavo più semplice (rettilenea) ma con sezione variabile asimmetrica

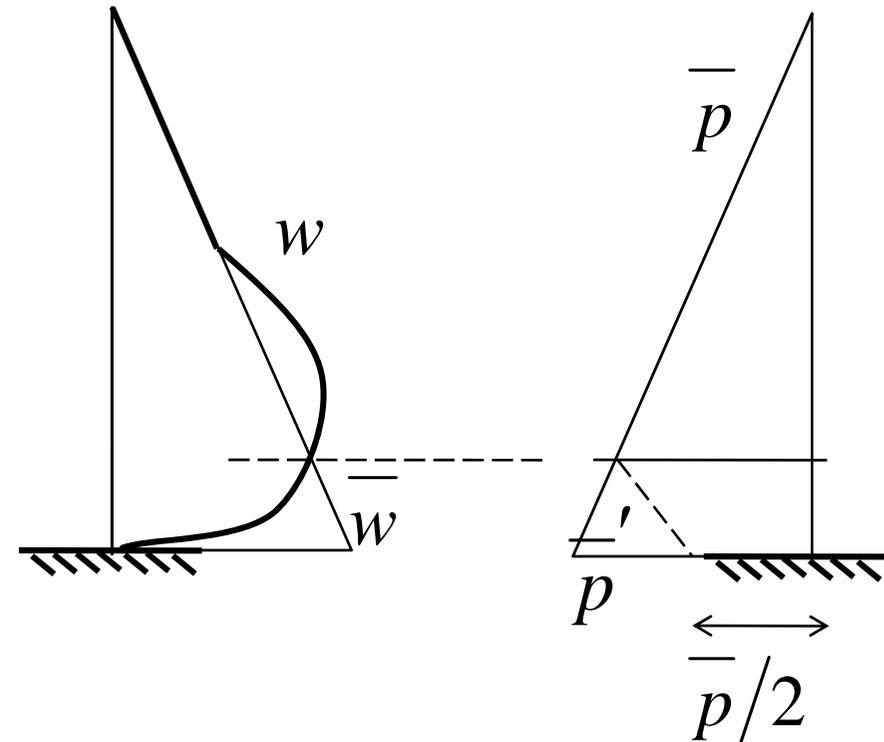


## Correzione della precompressione sugli anelli

Per comodità si è supposto di adottare una precompressione del tipo

$$\bar{p} = p + \eta p_1$$

D'altra parte è evidente che la pressione applicata agli anelli più vicini all'incastro al piede si scarica quasi interamente sulle strisce dando luogo a un effetto di precompressione molto modesto

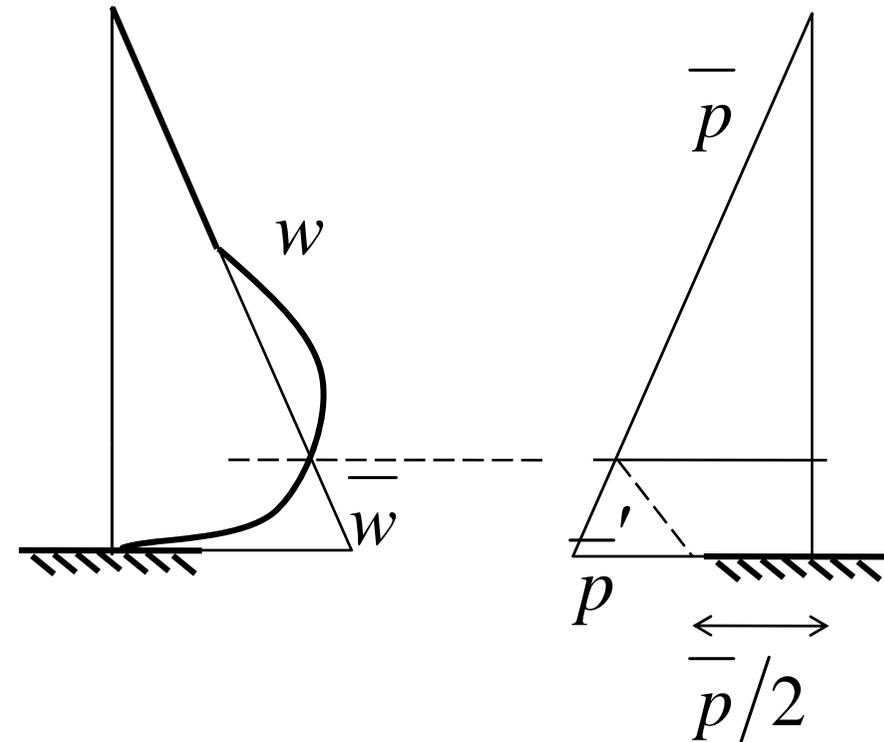


## Correzione della precompressione sugli anelli

È quindi inutile applicare agli anelli più bassi l'intera pressione che comporta l'impiego di cavi di precompressione poco o nulla sfruttati nella parte inferiore del serbatoio

La precompressione ridotta varia linearmente fino ad una sezione in cui si ha

$$\bar{w} \cong w$$





### Correzione della precompressione sugli anelli

Con questa soluzione si realizza anche una forte riduzione di  $M$  al piede

Di ciò occorre tener conto nella progettazione della precompressione verticale

Infatti il momento a serbatoio pieno può risultare dello stesso ordine di grandezza di quello a serbatoio vuoto e di segno opposto

A ciò si può ovviare adottando per la precompressione verticale una disposizione simmetrica dei cavi



### Modalità di realizzazione della precompressione

La precompressione verticale è ottenuta con cavi ancorati alla sommità ed al piede del serbatoio

Nel caso di serbatoi alti lo sforzo di precompressione viene ridotto nella parte alta con ancoraggi intermedi disposti alternativamente sulla fascia interna ed esterna della parete

La precompressione orizzontale può ottenersi con cavi contenuti all'interno di guaine disposte nel getto e ancorati alle due estremità per mezzo di appositi ancoraggi

Particolare cura va posta alla valutazione della caduta di tensione per attrito

### Modalità di realizzazione della precompressione

$$\sigma_{px} = \sigma_{p0} e^{-f(\alpha + \beta x)} \quad f = \begin{cases} 0.5 & \text{Cavo su cls liscio} \\ 0.3 & \text{Cavo in guaina metallica} \end{cases}$$

$\alpha$  Somma dei valori assoluti delle deviazioni angolari al cavo (rad)

$$\beta = 0.01 \text{ rad} / m \quad (\text{attrito rettilineo})$$

Il termine  $\beta x$  in generale è trascurabile rispetto a  $x$

La deviazione angolare  $\alpha$  tra le due sezioni di ancoraggio del cavo non potrà essere troppo grande: si adotta ordinariamente

$$\alpha = 120^\circ \quad \text{o anche} \quad \alpha = 90^\circ$$



### Modalità di realizzazione della precompressione

Inoltre, la taratura sarà eseguita alle due estremità del cavo

In tali condizioni, adottando  $f = 0.3$  si avrà alla mezzeria del cavo

$$\sigma_{px} = \sigma_{p0} e^{-0.3 \frac{60}{180} \pi} = 0.73 \sigma_{sp0}$$

Il termine  $\beta x$  in generale è trascurabile rispetto a  $x$

Ovvero una caduta di tensione del 27%



### Disposizione costruttiva degli ancoraggi

Gli ancoraggi trovano alloggiamento su degli appositi risalti

Una coppia di risalti forma quindi una

$$\sigma_{px} = \sigma_{p0} e^{-0.3 \frac{60}{180} \pi} = 0.73 \sigma_{sp0}$$

Il termine  $\beta x$  in generale è trascurabile rispetto a  $x$

Ovvero una caduta di tensione del 27%