

- [3] Lord RAYLEIGH, *The theory of sounds*, vol. I, Dover, New York, 1945 (ristampa).
- [4] RITZ W., *Gesammelte Werke*, Gauthier-Villars, Parigi, 1911.
- [5] JOHNSON C., *Numerical solutions of partial differential equations by the Finite Element method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [6] KAPLAN W., *Advanced calculus*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1952.
- [7] GJELSVIK A., *The theory of thin-walled beams*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [8] MANSFIELD E.H., *The bending and stretching of plates*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [9] TIMOSHENKO S., WOJNOWSKY-KRIEGER S., *Theory of plates and shells*, 2^a ed. Mc Graw-Hill, New York, 1959.

11

Il metodo degli elementi finiti: approccio agli spostamenti

11.1 ASPETTI GENERALI

11.1.1 INTRODUZIONE

Pur permettendo una formulazione matematicamente coerente e meccanicamente ben fondata del problema strutturale, l'approccio continuo produce equazioni difficili da risolvere nel caso generale. Anche nell'ambito di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, soluzioni di problemi concreti sono disponibili solo per un certo numero di casi particolari, per lo più limitatamente al comportamento linearmente elastico del materiale. Tali soluzioni sono indubbiamente importanti, ma non esaustive dei problemi di interesse ingegneristico.

Le teorie strutturali, basate su modelli cinematici suggeriti dalla geometria di particolari mezzi continui, consentono notevoli semplificazioni. Le dimensioni lineari della sezione di una trave sono molto più piccole dello sviluppo della sua linea media: ciò suggerisce che l'andamento delle deformazioni sulla sezione possa essere ragionevolmente rappresentato in funzione di pochi parametri significativi (le deformazioni generalizzate), riconducendo in tal modo la formulazione a un problema monodimensionale. Analogamente, la piccolezza dello spessore di una piastra consente di ricondurre il problema al dominio bidimensionale definito dalla sua superficie media. Anche così semplificato il problema non è però sempre di facile soluzione. Ad esempio, quello della piastra (e quello, sotto molti aspetti analogo, dei gusci) lo è solo per particolari geometrie e condizioni di vincolo.

Il metodo di Rayleigh-Ritz ha messo in evidenza come un modello cinematico possa essere introdotto indipendentemente dalla particolare natura del mezzo. Invece che da considerazioni a priori sul comportamento della struttura, esso è dettato da criteri di convergenza. Il modello di spostamento non ha di per sé particolare significato, ma può essere arricchito con l'aggiunta di ulteriori termini, fino a consentire la rappresentazione del reale regime deformativo con la precisione voluta. Il metodo, prevalentemente applicabile nel caso lineare, riconduce il problema differenziale a uno algebrico, decisamente più facile da risolvere.

Anche questo metodo è però soggetto a forti limitazioni operative. Un'adeguata rappresentazione del comportamento richiede spesso un numero notevole di termini. Ci si riconduce quindi a sistemi di grandi dimensioni, la cui soluzione può essere ottenuta solo numericamente. D'altra parte, la scelta delle funzioni approssimanti dipende in modo essenziale dalla geometria del problema e dalle condizioni al contorno; tali funzioni devono essere definite caso per caso e ciò rende la procedura difficilmente automatizzabile.

Il metodo degli elementi finiti recepisce il carattere astratto del modello di spostamento del procedimento di Rayleigh-Ritz, riconducendolo però a una formulazione di estrema versatilità, applicabile in un contesto molto generale. Si suddivide la struttura in un certo numero di porzioni, dette appunto *elementi finiti* (Figura 11.1) e si stabilisce il modello di spostamento individualmente per ognuno di essi. Su questa base viene definito il comportamento di ogni singolo elemento e quello dell'intera struttura viene poi ricostruito *assemblando* gli elementi di cui è composta, che si immaginano connessi tra di loro e con il supporto esterno solo in determinati punti, detti *nodi*. È quindi sufficiente determinare le proprietà di alcuni elementi fondamentali (in Figura 11.1, rettangoli e triangoli) che si ripetono più volte nella struttura e possono essere utilizzati anche con riferimento a strutture diverse per forma e condizioni di vincolo e di carico. Il calcolo delle proprietà degli elementi e il loro assemblaggio richiedono operazioni di natura ripetitiva, affidabili quasi per intero a programmi di calcolo.

È questa, a grandi linee, l'idea alla base dell'*approccio agli spostamenti* del metodo degli elementi finiti. Essa è suggerita da alcuni sistemi strutturali, quali travi reticolari o telai, che si presentano direttamente come assemblaggi di un numero finito di costituenti. L'idea di sostituire l'assemblaggio fisico con una suddivisione astratta del mezzo continuo sembra essere stata avanzata per la prima volta da Edward Study nel 1903 [1] e successivamente riproposta da altri autori [2] in epoche in cui mezzi di calcolo automatico non erano ancora disponibili alla pratica ingegneristica. Essa ha quindi suscitato limitato interesse a causa del notevole onere computazionale che la sua applicazione comportava.

In effetti, al metodo degli elementi finiti viene convenzionalmente attribuita una data di nascita precisa: il 1956, anno di pubblicazione di un lavoro di Turner, Clough, Martin e Topp [3]. L'importanza di questo lavoro non può essere compresa se non in relazione a un evento accaduto solo due anni prima, quando è stato reso disponibile il primo linguaggio simbolico, battezzato col nome di FORTRAN (FORmula TRANslator language). Ciò ha segnato una svolta nell'utilizzo pratico dei mezzi di calcolo. Se prima essi erano riservati a specialisti in grado di operare con gli strumenti logici dettati dalla macchina, l'avvento dei linguaggi simbolici ha consentito a un gran numero di utenti di interloquire con il calcolatore attraverso un simbolismo matematico sostanzialmente standard. Gli strumenti di calcolo sono da allora divenuti supporti quotidiani di ogni attività tecnica (e non solo tecnica) e, in questo contesto, il lavoro sopra citato si è configurato come la prima proposta di un procedimento effettivamente capace di

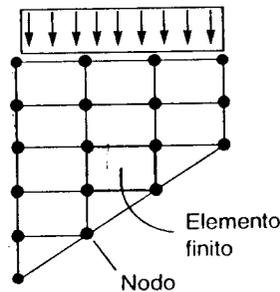


Figura 11.1

fornire la soluzione di un gran numero di problemi prima insolubili. Da allora, il metodo ha conosciuto uno sviluppo estremamente rapido e una popolarità esponenzialmente crescente. Esso è oggi considerato un importante settore della meccanica delle strutture, cui sono dedicati molti testi specifici [4-8].

Il metodo degli elementi finiti e il suo straordinario successo sono quindi legati alla disponibilità di potenti mezzi di calcolo. Più che su di un rinnovamento dei fondamenti meccanici del problema strutturale, esso si basa su di una loro riorganizzazione che li adatta alle esigenze dell'automatizzazione del processo risolutivo. Ne è risultato un procedimento estremamente potente e versatile, che in linea di principio consente la soluzione di qualunque problema, non solo strutturale, affidando quasi per intero alla macchina l'onere di calcolo.

11.1.2 ANALISI MATRICIALE DI STRUTTURE RETICOLARI

Le successive fasi del procedimento vengono introdotte con riferimento a travi reticolari caricate solamente da forze applicate ai nodi (come esempio, si considera lo schema illustrato in Figura 11.2). Queste strutture si presentano spontaneamente come *discrete*: la loro configurazione è infatti governata da un numero finito di parametri, precisamente gli spostamenti dei nodi liberi (nell'esempio, le due componenti U_1 e U_2 del nodo ① e quella verticale U_3 del nodo ④). Tali quantità rappresentano gli *spostamenti generalizzati* della struttura, cui corrispondono, come *forze generalizzate*, le componenti P_j dei carichi applicati.

La struttura è anche naturalmente suddivisa in *elementi finiti*, le aste di cui è costituita. Ognuna di esse è soggetta unicamente a azione assiale costante e il suo comportamento può essere descritto in termini di questa azione assiale e della variazione di lunghezza. Per la generica asta i si possono quindi introdurre le seguenti definizioni di *deformazione e sforzo generalizzati* (Figura 11.3)

$$q_i = \ell'_i - \ell_i = \int_0^{\ell'_i} \epsilon \, dx \quad Q_i = N_i = \int_{A_i} \sigma \, dA \quad (11.1a, b)$$

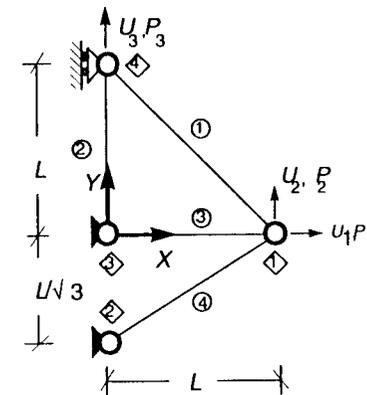


Figura 11.2

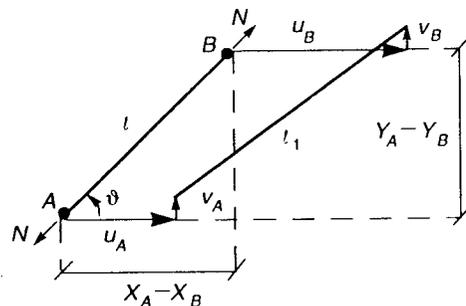


Figura 11.3

Si assume che valori positivi corrispondano a allungamenti e trazioni. Nella (11.1b), A_i indica l'area della sezione trasversale. Attribuendo individualmente alle barre arbitrarie variazioni di lunghezza q_i , risulterà in generale impossibile connetterle ai nodi e soddisfare le condizioni di vincolo. Peraltro, una volta assegnate le componenti libere U_j degli spostamenti dei nodi, gli allungamenti delle aste conseguono. La congruenza impone quindi un legame, nell'ipotesi di piccoli spostamenti lineare, che può scriversi

$$q_i = \sum_{j=1}^M C_{ij} U_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{U} \quad (11.2a, b)$$

dove si è indicato con N il numero di aste e con M quello delle componenti libere di spostamento nodale (nell'esempio di Figura 11.2, è $N = 4$ e $M = 3$). Le quantità C_{ij} sono costanti. Nello scrivere la (11.2b) si è posto

$$\mathbf{q} = \{q_1 \dots q_N\}' \quad \mathbf{U} = \{U_1 \dots U_M\}' \quad (11.3a, b)$$

Il principio dei lavori virtuali permette di associare alla (11.2) la corrispondente equazione di equilibrio. Ponendo, in analogia con le (11.3)

$$\mathbf{P} = \{P_1 \dots P_M\}' \quad \mathbf{Q} = \{Q_1 \dots Q_N\}' \quad (11.4a, b)$$

e imponendo la condizione

$$\mathbf{P}' \delta \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}' \delta \hat{\mathbf{q}} \quad \forall \quad \delta \hat{\mathbf{U}}, \delta \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{C} \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (11.5)$$

si ottiene

$$P_j = \sum_{i=1}^N C_{ij} Q_i \quad (j = 1, \dots, M) \quad \mathbf{P} = \mathbf{C}' \mathbf{Q} \quad (11.6a, b)$$

Considerazioni geometriche permettono di definire la matrice \mathbf{C} per ogni particolare travatura reticolare. Si consideri (Figura 11.3) la generica barra, i cui estremi A e B hanno coordinate (X_A, Y_A) e (X_B, Y_B) . Si indichino con (u_A, v_A) e (u_B, v_B) le componenti nelle due direzioni dello spostamento degli estremi. Le lunghezze iniziale e finale si esprimono allora

$$l = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \quad (a1)$$

$$l' = \sqrt{[(X_B + u_B) - (X_A + u_A)]^2 + [(Y_B + v_B) - (Y_A + v_A)]^2} \quad (a2)$$

Tra l'angolo ϑ che l'asta presenta inizialmente rispetto all'asse x e le coordinate dei nodi sussistono le relazioni

$$\cos \vartheta = \frac{1}{l} (X_B - X_A) \quad \sin \vartheta = \frac{1}{l} (Y_B - Y_A) \quad (b)$$

La (a2) pertanto può scriversi

$$l' = l \sqrt{1 + \frac{2}{l} [(u_B - u_A) \cos \vartheta + (v_B - v_A) \sin \vartheta] + \frac{1}{l^2} [(u_B - u_A)^2 + (v_B - v_A)^2]}$$

Lo sviluppo in serie di Taylor di questa espressione troncato, coerentemente con l'ipotesi di piccoli spostamenti, ai termini lineari, fornisce

$$l' \approx l + (u_B - u_A) \cos \vartheta + (v_B - v_A) \sin \vartheta$$

Risulta quindi

$$q_i = (u_B - u_A)_i \cos \vartheta_i + (v_B - v_A)_i \sin \vartheta_i \quad (11.7)$$

In ogni barra, le componenti di spostamento agli estremi o coincidono con una delle componenti di spostamento generalizzato o sono impediti dai vincoli. Sostituendo nella (11.7) i rispettivi U_j per le prime e eliminando le seconde, si definisce la i -sima riga della matrice \mathbf{C} .

Con riferimento al particolare esempio di Figura 11.2, si ha, per ognuna delle quattro aste

- ①: $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ $\left(\cos \vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad u_A = 0, v_A = U_3, u_B = U_1, v_B = U_2$
- ②: $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ $(\cos \vartheta = 0, \sin \vartheta = -1); \quad u_A = 0, v_A = U_3, u_B = 0, v_B = 0$
- ③: $\vartheta = 0$ $(\cos \vartheta = 1, \sin \vartheta = 0); \quad u_A = 0, v_A = 0, u_B = U_1, v_B = U_2$
- ④: $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ $\left(\cos \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \vartheta = \frac{1}{2} \right); \quad u_A = 0, v_A = 0, u_B = U_1, v_B = U_2$

Risulta pertanto

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

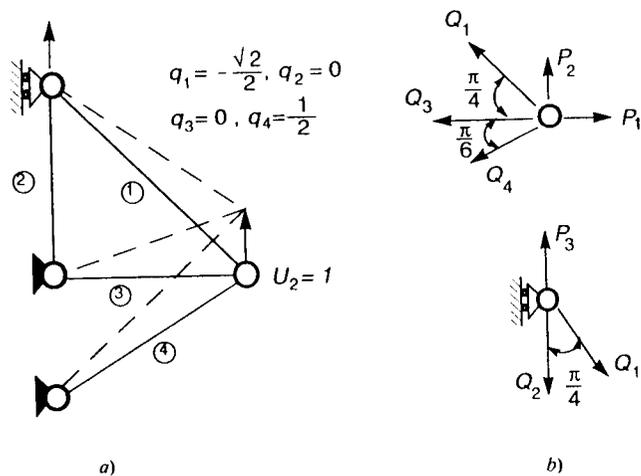


Figura 11.4

È ora facile comprendere il significato delle equazioni di congruenza (11.2) e di equilibrio (11.6). La j -sima colonna di C contiene gli allungamenti nelle aste che conseguono, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, alla sola $U_j = 1$ (in Figura 11.4a è illustrata la deformata che si ottiene in questo modo per $j = 2$). Per esteso, le (11.2) si scrivono

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (U_1 - U_2 + U_3), \quad q_2 = U_3, \quad q_3 = U_1, \quad q_4 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} U_1 + U_2) \quad (d1)$$

Le equazioni di equilibrio (11.6) sono invece

$$P_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} Q_1 + Q_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} Q_4, \quad P_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} Q_1 + \frac{1}{2} Q_4, \quad P_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} Q_1 + Q_2 \quad (d2)$$

Esse impongono l'equilibrio dei nodi liberi soggetti alle forze applicate e alle azioni trasmesse dalle barre che vi confluiscono (Figura 11.4b).

Alle (11.2) e (11.6) occorre associare un legame tra sforzi e deformazioni generalizzate. Per il significato che queste quantità hanno in strutture reticolari, esso è immediatamente deducibile dalla curva uniaassiale del materiale. In particolare, nel caso elastico lineare ci si riconduce alla relazione di proporzionalità

$$Q_i = K_i q_i \quad K_i = \left(\frac{EA}{\ell} \right)_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11.9a, b)$$

Essa può essere scritta compattamente come segue

$$Q = Dq \quad (11.10)$$

dove

$$D = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix} = \text{diag} (K_i) \quad (11.11)$$

è la matrice delle rigidezze elastiche delle barre, ovviamente simmetrica e definita positiva. Introducendo la (11.10) nella (11.6b) e quindi eliminando q mediante la (11.2b) si ottiene, successivamente

$$P = C'Q = C'Dq = [C'DC]U \quad (e)$$

Si ponga

$$K = C'DC \quad (11.12)$$

Il problema si riconduce allora al sistema di M equazioni lineari

$$KU = P \quad (11.13)$$

La matrice K definita dalla (11.12) è nota come *matrice di rigidezza elastica* della struttura. Essa è simmetrica e, se i vincoli non consentono atti di moto rigido, definita positiva. È infatti possibile constatare che in una struttura reticolare isostatica o iperstatica è $N \geq M$ e la matrice C ha rango pieno (in una struttura isostatica, C è quadrata e non-singolare; un rango minore di M indica labilità). Il prodotto a secondo membro della (11.12) risulta allora in una matrice $M \times M$ definita positiva, dal momento che D gode di questa proprietà.

Il sistema (11.13) può essere risolto per gli spostamenti e da questi si risale a deformazioni e sforzi generalizzati. Simbolicamente, la soluzione si esprime

$$U = K^{-1}P \quad q = CK^{-1}P \quad Q = DCK^{-1}P \quad (11.14a-c)$$

Per l'esempio di Figura 11.2, tenendo conto della (11.8) si ottiene dalla (11.12)

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K_1 + K_3 + \frac{3}{4} K_4 & -\frac{1}{2} K_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} K_4 & \frac{1}{2} K_1 \\ -\frac{1}{2} K_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} K_4 & \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{4} K_4 & -\frac{1}{2} K_1 \\ \frac{1}{2} K_1 & -\frac{1}{2} K_1 & \frac{1}{2} K_1 + K_2 \end{bmatrix} \quad (f)$$

Si supponga che tutte le aste abbiano la stessa sezione trasversale e siano costituite dallo stesso materiale. Le loro rigidezze assiali (11.9b) sono allora $K_i = EA/\ell_i$, dove i valori di EA sono comuni a tutte le barre e, come si evince dalla Figura 11.2, risulta

$$\ell_1 = \sqrt{2}L \quad \ell_2 = L \quad \ell_3 = L \quad \ell_4 = 2L/\sqrt{3}$$

La (f) diviene allora

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2.003 & .021 & .354 \\ .021 & .570 & -.354 \\ .354 & -.354 & 1.354 \end{bmatrix}$$

La condizione di carico sia costituita da un'unica forza verticale F applicata al nodo ① e diretta verso il basso. Precisamente

$$P = F \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (P_1 = P_3 = 0, P_2 = -F)$$

Risolvendo il sistema (11.13), si ottengono per gli spostamenti dei nodi e le azioni assiali nelle aste i valori seguenti

$$U = K^{-1}P = \frac{FL}{EA} \begin{Bmatrix} .126 \\ -2.123 \\ -.588 \end{Bmatrix} \quad Q = DCK^{-1}P = F \begin{Bmatrix} .831 \\ -.588 \\ .126 \\ -.825 \end{Bmatrix}$$

I segni delle componenti di Q indicano che le aste ① e ③ risultano tese, le ② e ④ compresse.

Quanto sopra esemplifica l'approccio agli spostamenti del metodo degli elementi finiti nella sua applicazione più semplice, in realtà troppo semplice per metterne in evidenza tutti gli aspetti. Il procedimento viene ora ripercorso in un'ottica più ampia, che può apparire inutilmente involuta nel caso specifico ma è suscettibile di estensione a un contesto del tutto generale.

La formulazione sottintende un'ipotesi cinematica. Si è implicitamente assunto che lo spostamento s in direzione assiale vari linearmente lungo la barra. Detta allora x un'ascissa che percorre l'asse dell'asta e r_A, r_B i valori di s agli estremi (Figura 11.5), il modello di spostamento si esprime

$$s(x) = r_A \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + r_B \left(\frac{x}{\ell}\right) = \left[\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \left(\frac{x}{\ell}\right) \right] \begin{Bmatrix} r_A \\ r_B \end{Bmatrix} = N(x)u_L \quad (11.15a)$$

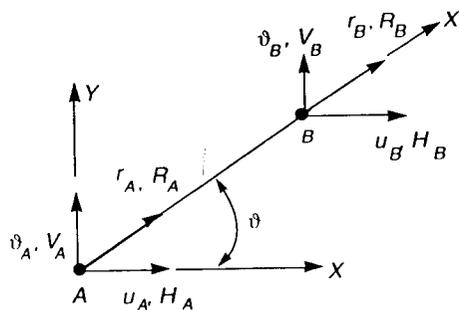


Figura 11.5

Indicando con ϵ la componente diretta di deformazione in direzione x , nel caso in esame la sola significativa, dalla (11.15a) e dal legame deformazioni-spostamenti si ottiene

$$\epsilon(x) = \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\ell} (r_B - r_A) = \frac{1}{\ell} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} r_A \\ r_B \end{Bmatrix} = B u_L \quad (11.15b)$$

Il vettore u_L definisce gli spostamenti nodali dell'elemento nel suo riferimento locale. Ad esso è associato un vettore p_L di natura statica, definito dalla condizione di equivalenza in termini di lavori virtuali

$$\int_V \sigma \delta \hat{\epsilon} dV = p_L' \delta \hat{u}_L \quad \forall \delta \hat{u}_L, \delta \hat{\epsilon} = B \delta \hat{u}_L \quad (11.16)$$

dove V è il volume della barra. È quindi

$$p_L = \int_V B' \sigma dV \quad (11.17)$$

Le componenti di p_L sono due forze applicate agli estremi della barra e allineate con la sua linea media. Con i simboli di Figura 11.5, si scrive

$$u_L = \{r_A \ r_B\}' \quad p_L = \{R_A \ R_B\}' \quad (11.18a, b)$$

Le (11.18) non definiscono deformazioni e sforzi generalizzati. Gli spostamenti nodali (11.18a) contengono infatti anche la traslazione rigida $r_B = r_B$, cui non corrisponde deformazione alcuna; in assenza di carichi sull'elemento, l'equilibrio richiede $R_A = -R_B$, evidenziando come le componenti di p_L non siano tra loro indipendenti. Il legame tra le variabili nodali (11.18) e quelle generalizzate (11.1) si esprime, come è facile constatare

$$q = [-1 \quad 1] u_L = \ell B u_L \quad p_L = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} Q = \ell B' Q \quad (11.19a, b)$$

Il modello cinematico (11.15) consente quindi di definire gli sforzi e le deformazioni generalizzati che a esso conseguono. Non è però necessario introdurre tali quantità in modo esplicito; il comportamento dell'elemento può essere rappresentato direttamente in termini di variabili nodali.

La continuità della struttura viene ricostruita connettendo le aste tra di loro e con il supporto esterno. Tale operazione (*assemblaggio*) deve poter essere affidata interamente al programma di calcolo, che diviene così in grado di gestire autonomamente una qualsiasi travatura reticolare. A tal fine, occorre che le variabili nodali delle singole aste siano rappresentate tutte nel medesimo riferimento, detto *globale*. Spostamenti e forze nodali hanno allora quattro componenti, raccolte nei vettori

$$u = \{u_A \ v_A \ u_B \ v_B\}' \quad p = \{H_A \ V_A \ H_B \ V_B\}' \quad (11.20a, b)$$

dove (u, v) e (H, V) sono le componenti secondo le due direzioni (X, Y) degli spostamenti e delle forze agli estremi (Figura 11.5; si noti che la (11.7) esprime l'allungamento della barra in funzione di u). Considerazioni geometriche permettono di esplicitare

il legame tra le variabili nodali nel riferimento locale (indice L) e globale (senza indice). Si ottiene

$$\begin{Bmatrix} r_A \\ r_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_B \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & 0 \\ 0 & \cos \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \end{Bmatrix} \quad (g1, 2)$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad \mathbf{p} = \mathbf{T}' \mathbf{p}_L \quad (11.21a, b)$$

Tali relazioni possono essere stabilite per ogni asta i .

L'assemblaggio adesso consiste semplicemente nell'identificare gli spostamenti nodali delle barre con quelli dell'intera struttura, raccolti nel vettore \mathbf{U} , assegnando valore nullo alle componenti impediti dai vincoli. Simbolicamente, si scrive

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{U} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11.22)$$

Le \mathbf{L}_i sono matrici di quattro righe (come gli spostamenti nodali della barra) e M colonne (quante le componenti di spostamento generalizzato). In ogni riga esse presentano al più un elemento non nullo, di valore unitario. Con riferimento all'esempio di Figura 11.2, dalle (c) si evince

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (h)$$

Sostituendo nel modello di spostamento (11.15a) la (11.21a) e la (11.22), si ottiene successivamente

$$s_i(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}_{Li} = \mathbf{N}(x) \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{N}(x) \mathbf{T}_i \mathbf{L}_i \mathbf{U} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11.23)$$

In modo analogo si può procedere con riferimento alle deformazioni (11.15b). Risulta

$$\epsilon_i(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u}_{Li} = \mathbf{B}(x) \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{B}(x) \mathbf{T}_i \mathbf{L}_i \mathbf{U} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11.24a)$$

(nel caso in esame, \mathbf{B} è costante; la dipendenza da x è stata introdotta solo per conferire alla relazione maggior generalità).

La (11.24a) esprime le deformazioni locali in funzione degli spostamenti generalizzati. La corrispondente condizione di equilibrio discende, al solito, dall'imposizione del principio dei lavori virtuali. Il lavoro esterno è semplicemente il prodotto scalare delle forze \mathbf{P} applicate ai nodi liberi per le variazioni di spostamento generalizzato. Eguagliando al lavoro interno, si ottiene

$$\mathbf{P}' \delta \hat{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \sigma_i \delta \hat{\epsilon}_i dV = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \sigma_i \mathbf{B} dV \cdot \mathbf{T}_i \mathbf{L}_i \delta \hat{\mathbf{U}} \quad \forall \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (i)$$

È quindi

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i' \mathbf{T}_i' \int_{V_i} \mathbf{B}' \sigma dV = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i' \mathbf{T}_i' \mathbf{p}_{Li} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i' \mathbf{p}_i \quad (11.24b)$$

dove le due ultime eguaglianze conseguono dalle (11.17) e (11.21b) (ancora, \mathbf{B} è stata mantenuta sotto il segno di integrale perché in generale, anche se non nel caso specifico, è funzione del punto).

Le (11.24) governano la cinematica e la statica dello schema discreto e a esse vanno aggiunte le relazioni costitutive. Nel caso uniassiale, il legame elastico del materiale si scrive

$$\sigma = E \epsilon \quad (11.25)$$

Sostituendo la (11.15b) per ϵ e introducendo nella (11.17), si ottiene

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{k}_L \mathbf{u}_L \quad \mathbf{k}_L = \int_V \mathbf{B}' \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (11.26a, b)$$

A calcoli svolti, la matrice (11.26b) risulta

$$\mathbf{k}_L = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (j)$$

Essa è nota come *matrice di rigidità elastica* della barra. Si può osservare che è singolare: a un vettore \mathbf{u}_L con entrambe le componenti di egual valore corrispondono infatti forze nodali nulle. Questo vettore configura a una traslazione rigida e la singolarità della matrice riflette l'evidente circostanza che a tale spostamento non è associato attraverso il legame elastico sforzo alcuno; saranno quindi nulle anche le \mathbf{p}_L che a esso conseguono attraverso la (11.17).

Le (11.26) esprimono le proprietà elastiche della barra nel suo riferimento locale. La relazione può essere riportata nel riferimento globale utilizzando le (11.21). Risulta

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad \mathbf{k} = \mathbf{T}' \mathbf{k}_L \mathbf{T} \quad (11.27a, b)$$

Ricordando le (g) e (j), la (11.27b) si scrive

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta & -\cos^2 \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & \sin^2 \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & -\sin^2 \vartheta \\ -\cos^2 \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \sin \vartheta & -\sin^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (k)$$

Anche questa matrice è ovviamente singolare. I vettori \mathbf{u} che essa associa a $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ rappresentano moti rigidi dell'asta nel piano.

La (11.27) può essere scritta per tutte le aste $i = 1, \dots, N$ di cui la struttura è costituita. Le singolarità associate alla presenza di moti rigidi, consentiti in aste isolate, vengono eliminate in sede di assemblaggio, quando viene ricostruita la continuità della struttura e si impongono i vincoli. Sostituendo nella (11.27a) scritta per l' i -sima asta l'espressione (11.22) degli spostamenti nodali e introducendo il risultato nell'ultima eguaglianza (11.24b), si ottiene

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{L}_i \quad (11.28a, b)$$

Se i vincoli escludono atti di moto rigido, la matrice di rigidezza \mathbf{K} risulta non singolare e il sistema (11.28a), in cui si ritrova la (11.13), può essere risolto per \mathbf{U} . Si lascia come esercizio verificare che per l'esempio di Figura 11.2 la (11.28b) riconduce all'espressione (f) di \mathbf{K} .

La procedura indicata permette al programma di calcolo di generare il sistema risolvibile a partire da poche e semplici informazioni. La costruzione della matrice di rigidezza (k) dell'asta isolata richiede solo la conoscenza, oltre che del valore di EA , delle coordinate dei due estremi, da cui si risale a ℓ e ϑ attraverso le (a1) e (b). L'assemblaggio si riconduce al calcolo della rigidezza globale mediante la (11.28b); è facile constatare che questa relazione si limita a collocare nell'opportuna posizione di \mathbf{K} le componenti delle matrici \mathbf{k} delle barre, eliminando quelle associate a vincoli e sommando i contributi delle aste che confluiscono nello stesso nodo. È evidente come tale operazione non richieda il prodotto matriciale e, in effetti, le matrici \mathbf{L}_i non sono mai introdotte per esteso; occorre solo associare gli estremi di ogni asta ai nodi della struttura, indicando quali componenti di spostamento siano impediti dai vincoli. A questi dati vanno ovviamente aggiunti i valori dei carichi applicati ai nodi liberi.

Tutte le informazioni necessarie per generare il sistema risolvibile per l'esempio di Figura 11.2 sono riportati in Tabella 11.1. Aste e nodi sono numerati come in figura, dove è anche riportato il riferimento globale. Le aste sono in acciaio e hanno tutte la stessa sezione circolare, con diametro pari a 1 cm; Si è assunto $\ell = 1$ m ed è stato considerato un carico verticale applicato al nodo 1 e diretto verso il basso, di intensità pari a 8000 N.

Le informazioni sono organizzate in due blocchi: il primo riporta, per ogni asta, i nodi che essa congiunge, l'area A della sua sezione trasversale e il modulo elastico del materiale di cui è costituita. Nel secondo sono indicate le coordinate (X , Y) di ogni nodo, i valori dei carichi esterni a esso applicati e se le sue componenti di spostamento sono o meno impediti dai vincoli. Su questa base, il programma è in grado di produrre il sistema risolvibile.

11.1.3 LE SUCCESSIVE FASI DELL'APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

Il procedimento esemplificato con riferimento a travature reticolari piane caricate solamente sui nodi si applica, con ovvie modifiche e alcune generalizzazioni, in un contesto del tutto generale. Esso si articola nella seguente sequenza logica di operazioni.

1) *Definizione dello schema discreto.* In generale, una struttura non si presenta naturalmente come assemblaggio di costituenti elementari. Occorre quindi operare una *suddivisione in elementi finiti*, tra loro connessi in alcuni punti, o nodi. Questa suddivisione, di cui un esempio è illustrato in Figura 11.1, definisce lo schema oggetto del calcolo. Ad essa è associata la definizione di un *modello di spostamento* per ogni elemento. Gli spostamenti locali vengono approssimati da combinazioni lineari di fun-

zioni assegnate, di regola polinomi. Le due operazioni non sono tra loro indipendenti: è infatti evidente come una suddivisione rada suggerisca un modello più ricco che non una suddivisione fitta.

È questa la fase cruciale del procedimento. Una volta suddivisa la struttura in elementi finiti e stabilito il modello di spostamento al loro interno, sono completamente determinate le caratteristiche di comportamento dello schema discreto con cui si approssima il problema originario. Le fasi successive riguardano essenzialmente la costruzione delle equazioni e la tecnica risolutiva e intervengono solo marginalmente sulla qualità della soluzione.

2) *Definizione delle proprietà dell'elemento.* Il modello viene espresso in funzione dei valori assunti dagli spostamenti locali nei nodi. A tali valori (spostamenti nodali \mathbf{u}) corrispondono, tramite un'equivalenza in termini di lavori virtuali, le forze nodali \mathbf{p} .

Il comportamento dell'elemento isolato è descritto da un legame tra queste quantità, cui si risale dalla legge costitutiva del materiale. Nel caso elastico lineare questo si esprime attraverso una relazione simile alla (11.27a), da cui può differire soltanto per la presenza di un termine noto rappresentativo di carichi eventualmente agenti sull'elemento.

In questa fase è spesso conveniente operare in riferimenti locali, dettati dalla particolare geometria dei singoli elementi. Le proprietà dell'elemento vengono poi trasferite nel riferimento globale mediante le opportune leggi di trasformazione, di cui le (11.21) costituiscono un esempio.

3) *Assemblaggio.* L'operazione ricostruisce la continuità della struttura. I vari elementi vengono tra loro collegati imponendo che gli spostamenti dei nodi che hanno in comune assumano lo stesso valore. Dal momento che questi sono ora tutti rappresentati nello stesso riferimento, risultano direttamente sovrapponibili e l'assemblaggio si riconduce ad una procedura di identificazione, che viene effettuata automaticamente a partire da poche e semplici informazioni, del tipo di quelle esemplificate in Tabella 11.1. L'assemblaggio comprende l'eliminazione degli spostamenti impediti dai vincoli esterni (o l'imposizione di cedimenti vincolari, se diversi da zero).

4) *Calcolo della soluzione.* Ad assemblaggio effettuato, le equazioni risolventi si presentano, nel caso elastico lineare, nella forma (11.28), dove la matrice \mathbf{K} è simmetrica e, una volta eliminati eventuali moti rigidi residui non impediti dai vincoli, definita positiva. La soluzione numerica non presenta difficoltà particolari se non per il numero di incognite, spesso elevato. Accorgimenti specifici, che sfruttano proprietà del tutto generali della matrice di rigidezza, consentono peraltro di risolvere efficientemente sistemi di dimensioni anche molto grandi.

La soluzione va in genere completata fino alla definizione dello stato di sforzo. Come in tutte le formulazioni basate su modelli cinematici, l'informazione sul regime tensionale è prodotta in termini di sforzi generalizzati. In strutture reticolari questi si identificano con le azioni assiali nelle aste, ma in generale sono definiti in modo puramente formale e si rivelano di difficile interpretazione diretta. La loro conoscenza è quindi poco utile ai fini della ricostruzione di un quadro tensionale ingegneristicamente significativo e di regola non vengono neppure definiti.

Si preferisce calcolare direttamente gli sforzi locali imponendo il legame costitutivo del materiale con riferimento alle deformazioni (11.24a), note in ogni punto della struttura una volta valutati gli spostamenti nodali. Concettualmente il procedimento è spontaneo; va però tenuto presente che gli sforzi sono proporzionali a derivate di spostamenti e sono quindi affetti dal deterioramento di precisione che la derivazione

Tabella 11.1

Asta	Nodi		Area (mm ²)	E (MPa)	Nod ϕ	Coordinate (mm)		Carichi (kN)		Vincolato?	
	A	B				X	Y	\rightarrow	\uparrow	\rightarrow	\uparrow
1	4	1	78.54	206000	1	1000	0	0	-8	NO	NO
2	4	3	"	"	2	0	-577.35	0	0	SI	SI
3	3	1	"	"	3	0	0	0	0	SI	SI
4	2	1	"	"	4	0	1000	0	0	SI	NO

comporta. Si riscontrano spesso errori anche notevoli sugli andamenti locali, che rendono necessari interventi correttivi. Questi vengono comunque effettuati a valle della soluzione dello schema discreto, elaborando in modo opportuno le informazioni direttamente prodotte dal metodo.

11.2 L'APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

11.2.1 IL MODELLO CINEMATICO

Si consideri un elemento finito isolato dal contesto strutturale cui appartiene. Al suo interno, gli spostamenti locali vengono approssimati mediante polinomi di grado opportuno. Per la generica componente di spostamento s_i , si scrive quindi, rispettivamente per domini mono-, bi- e tridimensionali

$$s_i(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots \quad (11.29a)$$

$$s_i(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \dots \quad (11.29b)$$

$$s_i(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + \dots \quad (11.29c)$$

Il modello di spostamento risulterà tanto più ricco quanto più elevato è il grado del polinomio approssimante. In forma compatta, le (11.29) si esprimono

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_*(\mathbf{x}) \mathbf{a} \quad (11.30a)$$

dove $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ raccoglie le componenti di spostamento locale, la matrice $\mathbf{N}_*(\mathbf{x})$ i monomi approssimanti e il vettore \mathbf{a} i coefficienti moltiplicativi.

Il legame deformazioni-spostamenti $\boldsymbol{\varepsilon} = \partial(\mathbf{s})$, dove $\partial(\)$ indica l'operatore di congruenza per il problema in considerazione, permette di risalire dalla (11.30a) all'andamento delle deformazioni sull'elemento. Simbolicamente, si scrive

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_*(\mathbf{x}) \mathbf{a} \quad (11.30b)$$

Il metodo richiede che i coefficienti a_i dei polinomi approssimanti siano sostituiti dagli spostamenti nodali \mathbf{u} , vale a dire dai valori che gli spostamenti locali assumono in corrispondenza degli r nodi dell'elemento. Indicando con \mathbf{x}_j le coordinate del nodo j , dalla (11.30a) si ottiene

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{s}(\mathbf{x}_j) = \mathbf{N}_*(\mathbf{x}_j) \mathbf{a} \quad (j = 1, \dots, r) \quad (a)$$

Le posizioni

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{N}_*(\mathbf{x}_j) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (b1, 2)$$

permettono di scrivere compattamente la (a) come segue

$$\mathbf{u} = \Gamma \mathbf{a} \quad (11.31a)$$

Se la (11.31a) è invertibile, è possibile esprimere i coefficienti del polinomio in funzione degli spostamenti nodali scrivendo

$$\mathbf{a} = \Gamma^{-1} \mathbf{u} \quad (11.31b)$$

Introducendo nelle (30) si ottiene

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (11.32a, b)$$

dove si è posto

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_*(\mathbf{x}) \Gamma^{-1} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_*(\mathbf{x}) \Gamma^{-1} \quad (11.33a, b)$$

Le componenti della matrice $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ sono le *funzioni di forma* dell'elemento finito. Perché esse possano essere definite attraverso il procedimento indicato occorre poter invertire la (11.31a); un'ovvia condizione è che il numero di termini dei polinomi approssimanti eguagli quello degli spostamenti nodali dell'elemento. La matrice Γ è allora quadrata e, con l'eccezione di casi patologici legati a un cattivo posizionamento dei nodi, risulta non-singolare.

ESEMPIO 11.1: barra di struttura reticolare. Questo elemento monodimensionale, noto anche come "elemento biella", è definito sull'intervallo $0 \leq x \leq l$ (Figura 11.6). Dal punto di vista cinematico, il suo comportamento è governato dallo spostamento s_x dei punti della linea media in direzione x e dalla corrispondente deformazione diretta ε_x . Si ha quindi, nel caso in esame

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = s_x(x) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon_x(x) = \frac{ds_x}{dx} \quad (c1, 2)$$

L'elemento è connesso al contesto strutturale agli estremi. Occorrono quindi almeno due componenti di spostamento nodale, il che richiede che il polinomio approssimante sia almeno lineare. Verranno esaminati i due casi più semplici.

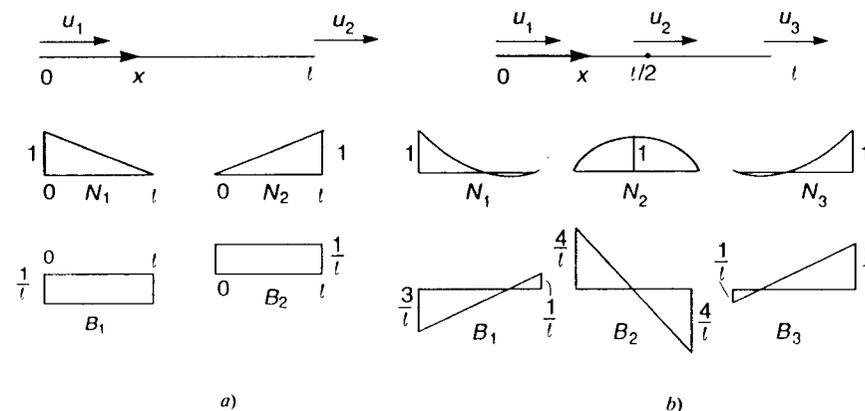


Figura 11.6

1a) *Modello lineare.* Si approssimi lo spostamento ($c1$) con un polinomio di primo grado

$$s_x(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \epsilon_x(x) = \frac{1}{\ell} a_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (d1, 2)$$

È quindi

$$\mathbf{N}_*(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_*(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}$$

Gli spostamenti nodali sono i valori agli estremi e si esprimono

$$u_1 = u(0) = a_1 \quad u_2 = u(\ell) = a_1 + a_2$$

Risolvendo per i coefficienti a si ottiene

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = -u_1 + u_2$$

Le matrici nelle trasformazioni (11.31) sono allora

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e le (11.33) risultano

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) & \left(\frac{x}{\ell}\right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.34a, b)$$

Le funzioni di forma e le componenti di \mathbf{B} sono illustrate in Figura 11.6a. È facile riconoscere nelle (11.34) il modello implicitamente assunto per l'analisi matriciale di strutture reticolari caricate solamente ai nodi.

1b) *Modello quadratico.* Assumendo un polinomio approssimante di secondo grado, si scrive, in luogo delle (d)

$$s_x(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} + a_3 \frac{x^2}{\ell^2} \quad \epsilon_x(x) = \frac{1}{\ell} \left(a_2 + 2a_3 \frac{x}{\ell} \right) \quad (e1, 2)$$

ed è quindi

$$\mathbf{N}_*(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{\ell} & \frac{x^2}{\ell^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_*(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \frac{x}{\ell} \end{bmatrix}$$

Occorre ora un'ulteriore componente di spostamento nodale, spontaneamente collocata al centro della barra. Con la numerazione in Figura 11.6b, è allora

$$u_1 = u(0) = a_1 \quad u_2 = u\left(\frac{\ell}{2}\right) = a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 \quad u_3 = u(\ell) = a_1 + a_2 + a_3$$

da cui si ottiene

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = -3u_1 + 4u_2 - u_3 \quad a_3 = 2u_1 - 4u_2 + 2u_3$$

Le matrici che governano queste trasformazioni si scrivono, per esteso

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & .5 & .25 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

e le (33) risultano

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - 3 \frac{x}{\ell} + 2 \frac{x^2}{\ell^2}\right) & 4 \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right) & \left(-\frac{x}{\ell} + 2 \frac{x^2}{\ell^2}\right) \end{bmatrix} \quad (11.35a)$$

$$\mathbf{B}(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \left(-3 + 4 \frac{x}{\ell}\right) & 4 \left(1 - 2 \frac{x}{\ell}\right) & \left(-1 + 4 \frac{x}{\ell}\right) \end{bmatrix} \quad (11.35b)$$

Le loro componenti sono illustrate in Figura 11.6b. È questo un esempio di elemento che presenta un nodo interno, non connesso a altri elementi.

ESEMPIO 11.2: elementi piani Il problema piano, sia esso tale negli sforzi o nelle deformazioni, prevede due componenti di spostamento e tre di deformazione. Precisamente

$$\mathbf{s}(x) = \begin{Bmatrix} s_x(x, y) \\ s_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}(x) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x(x, y) \\ \epsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} \quad (f1, 2)$$

Si esaminano in questo ambito i due elementi più semplici.

2a) *Triangolo a tre nodi* Si consideri il dominio triangolare di Figura 11.7a e si voglia esprimere il modello in funzione delle due componenti di spostamento a ognuno dei tre vertici. I polinomi approssimanti dovranno allora presentare sei termini ed è spontaneo assumere

$$s_x(x, y) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} + a_3 \frac{y}{\ell} \quad s_y(x, y) = b_1 + b_2 \frac{x}{\ell} + b_3 \frac{y}{\ell} \quad (g)$$

dove ℓ indica la distanza tra i nodi $\diamond 1$ e $\diamond 2$ (Figura 11.7a). Dalle (g) consegue, attraverso il legame deformazioni-spostamenti (f2)

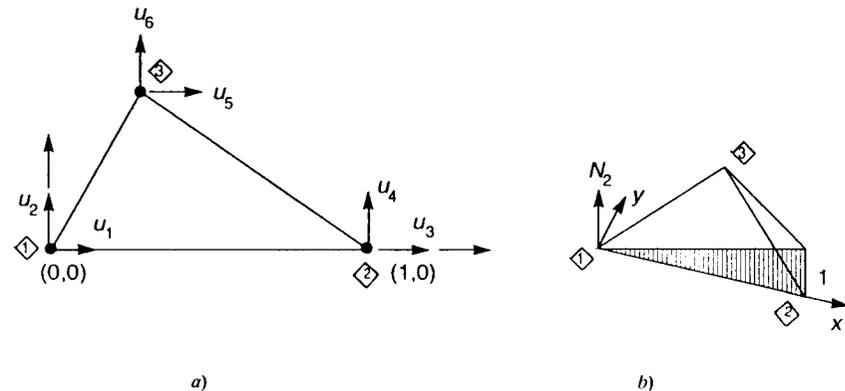


Figura 11.7

$$\epsilon_x = \frac{1}{\ell} a_2 \quad \epsilon_y = \frac{1}{\ell} b_3 \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{\ell} (a_3 + b_2) \quad (h)$$

È allora

$$\mathbf{N}_*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x/\ell & y/\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x/\ell & y/\ell \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_*(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta inoltre, per i valori nodali

$$\begin{aligned} u_1 &= s_x(0, 0) = a_1 & u_2 &= s_y(0, 0) = b_1 \\ u_3 &= s_x(\ell, 0) = a_1 + a_2 & u_4 &= s_y(\ell, 0) = b_1 + b_2 \\ u_5 &= s_x(\lambda\ell, \mu\ell) = a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 & u_6 &= s_y(\lambda\ell, \mu\ell) = b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 \end{aligned}$$

Risolvendo per i coefficienti si ottiene

$$\begin{aligned} a_1 &= u_1 & a_2 &= -u_1 + u_3 & a_3 &= \frac{\lambda-1}{\mu} u_1 - \frac{\lambda}{\mu} u_3 + \frac{1}{\mu} u_5 \\ b_1 &= u_2 & b_2 &= -u_2 + u_4 & b_3 &= \frac{\lambda-1}{\mu} u_2 - \frac{\lambda}{\mu} u_4 + \frac{1}{\mu} u_6 \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (g) e (h), si perviene a esprimere il modello nella forma (11.32); le matrici (11.33) risultano, rispettivamente

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (11.36a)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{\ell} + \frac{\lambda-1}{\mu} \frac{y}{\ell} \quad N_2 = \frac{x}{\ell} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{y}{\ell} \quad N_3 = \frac{1}{\mu} \frac{y}{\ell} \quad (11.36b)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu\ell} \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & -\mu & -\lambda & \mu & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.37)$$

La Figura 11.7b illustra l'andamento della funzione di forma $N_2(x, y)$, che assume valore unitario nel nodo 2 e si annulla nei due rimanenti. A spostamenti lineari corrispondono ovviamente deformazioni costanti.

2b) *Rettangolo a quattro nodi.* Si consideri ora l'elemento finito in Figura 11.8a. Le componenti di spostamento nodale sono adesso otto e il modello (g) deve essere arricchito di due termini. Per preservare la simmetria nelle due direzioni, si aggiunge un termine bilineare a ogni componente di spostamento locale. Si ha allora

$$s_x = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} + a_3 \frac{y}{h} + a_4 \frac{xy}{\ell h} \quad s_y = b_1 + b_2 \frac{x}{\ell} + b_3 \frac{y}{h} + b_4 \frac{xy}{\ell h} \quad (i)$$

e quindi

$$\epsilon_x = \frac{1}{\ell} \left(a_2 + \frac{y}{h} a_4 \right) \quad \epsilon_y = \frac{1}{h} \left(b_3 + \frac{x}{\ell} b_4 \right) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{h} \left(a_3 + \frac{x}{\ell} a_4 \right) + \frac{1}{\ell} \left(b_2 + \frac{y}{h} b_4 \right) \quad (j)$$

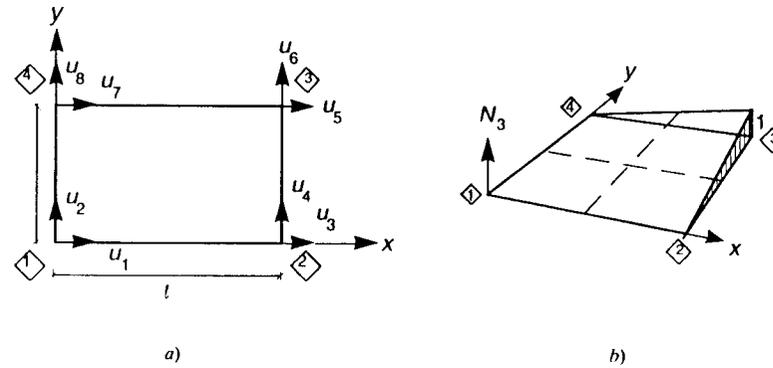


Figura 11.8

Gli spostamenti ai nodi sono adesso

$$\begin{aligned} u_1 &= s_x(0, 0) = a_1 & u_2 &= s_y(0, 0) = b_1 \\ u_3 &= s_x(\ell, 0) = a_1 + a_2 & u_4 &= s_y(\ell, 0) = b_1 + b_2 \\ u_5 &= s_x(\ell, h) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & u_6 &= s_y(\ell, h) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ u_7 &= s_x(0, h) = a_1 + a_3 & u_8 &= s_y(0, h) = b_1 + b_3 \end{aligned}$$

Risolvendo per i coefficienti dei polinomi approssimanti e sostituendo nel modello si perviene alle (11.32). Le matrici (11.33) risultano

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (11.38a)$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad N_2 = \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad N_3 = \frac{xy}{\ell h} \quad N_4 = \frac{y}{h} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad (11.38b)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -B_1 & 0 & B_1 & 0 & B_2 & 0 & -B_2 & 0 \\ 0 & -B_3 & 0 & -B_4 & 0 & B_4 & 0 & B_3 \\ -B_3 & -B_1 & -B_4 & B_1 & B_4 & B_2 & B_3 & -B_2 \end{bmatrix} \quad (11.39a)$$

$$B_1 = \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad B_2 = \frac{1}{\ell} \frac{y}{h} \quad B_3 = \frac{1}{h} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad B_4 = \frac{1}{h} \frac{x}{\ell} \quad (11.39b)$$

Le funzioni di forma sono ora paraboloidi iperbolici. L'andamento di $N_3(x, y)$ è illustrato in Figura 11.8b.

ESEMPIO 11.3: elementi di trave Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti, i problemi assiale e flessionale della trave si presentano disaccoppiati. La modellazione del primo si riconduce all'elemento biella di cui all'Esempio 11.1; pertanto, si considera qui solo il problema flessionale.

3a) *Trave di Timoshenko.* Il problema è governato da due componenti di spostamento e deformazione. Precisamente

$$s(x) = \begin{Bmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} \quad \varepsilon(x) = \begin{Bmatrix} \chi(x) \\ t(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d/dx \\ d/dx & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (k1, 2)$$

dove, si ricorda, v e φ sono lo spostamento trasversale della linea media e la rotazione della sezione, mentre χ e t indicano la curvatura flessionale e lo scorrimento medio.

Il modello più semplice si basa su di un'approssimazione lineare per entrambe le componenti di spostamento. Si scrive allora

$$v(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\ell} (b_1 + b_2 \frac{x}{\ell}) \quad (\ell 1)$$

da cui si ottiene

$$\chi(x) = -\frac{1}{\ell^2} b_2 \quad t(x) = \frac{1}{\ell} (a_2 - b_1 - b_2 \frac{x}{\ell}) \quad (\ell 2)$$

Come spostamenti nodali si assumono la componente trasversale e la rotazione agli estremi, nell'ordine indicato in Figura 11.9. Dalle ($\ell 1$) si ottiene allora

$$u_1 = v(0) = a_1 \quad u_2 = \varphi(0) = \frac{1}{\ell} b_1 \quad u_3 = v(\ell) = a_1 + a_2 \quad u_4 = \varphi(\ell) = \frac{1}{\ell} (b_1 + b_2)$$

Relazioni che, risolte per i coefficienti, forniscono

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = -u_1 + u_3 \quad b_1 = \ell u_2 \quad b_2 = \ell(-u_2 + u_4)$$

Sostituendo nelle (ℓ) si perviene a esprimere il modello nella forma (11.32). Le matrici risultano

$$N(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \ell - x & 0 & x & 0 \\ 0 & \ell - x & 0 & x \end{bmatrix} \quad B(x) = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\ell + x & 1 & -x \end{bmatrix} \quad (11.40a, b)$$

3b) *Trave di Bernoulli-Eulero.* Se le deformazioni taglianti vengono trascurate, la rotazione della sezione si identifica con la derivata di v ; Si ha allora, in luogo delle (k)

$$s(x) = v(x) \quad \varepsilon(x) = \chi(x) = -\frac{d^2 v}{dx^2} \quad (m1, 2)$$

La congruenza peraltro richiede sempre la continuità delle rotazioni. Perché questa condizione possa essere imposta in sede di assemblaggio è necessario che tra gli spostamenti nodali siano ancora presenti quelli illustrati in Figura 11.9. L'approssimazione per $v(x)$ deve quindi contenere almeno quattro costanti. Il modello più semplice che soddisfi questi requisiti è il polinomio di terzo grado

$$v(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} + a_3 \frac{x^2}{\ell^2} + a_4 \frac{x^3}{\ell^3} \quad (n1)$$

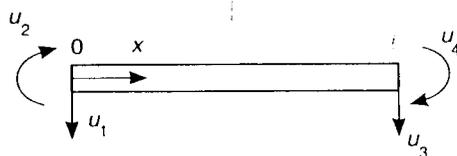


Figura 11.9

Da esso si ottiene, per successive derivazioni

$$\begin{aligned} \varphi(x) = v'(x) &= \frac{1}{\ell} \left(a_2 + 2a_3 \frac{x}{\ell} + 3a_4 \frac{x^2}{\ell^2} \right) \\ \chi(x) = -v''(x) &= -\frac{1}{\ell^2} \left(2a_3 + 6a_4 \frac{x}{\ell} \right) \end{aligned} \quad (n2)$$

Gli spostamenti nodali ora si esprimono

$$\begin{aligned} u_1 = v(0) &= a_1 & u_2 = \varphi(0) &= \frac{1}{\ell} a_2 & u_3 = v(\ell) &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ u_4 = \varphi(\ell) &= \frac{1}{\ell} (a_2 + 2a_3 + 3a_4) \end{aligned}$$

relazioni che, risolte per i coefficienti, forniscono

$$a_1 = u_1 \quad a_2 = \ell u_2 \quad a_3 = -3u_1 - 2\ell u_2 + 3u_3 - \ell u_4 \quad a_4 = 2u_1 + \ell u_2 - 2u_3 + \ell u_4$$

Sostituendo nelle (n) ed esplicitando le matrici (11.33) si ottiene

$$N(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - 3 \frac{x^2}{\ell^2} + 2 \frac{x^3}{\ell^3} \right) & \ell \left(\frac{x}{\ell} - 2 \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right) \\ \left(3 \frac{x^2}{\ell^2} - 2 \frac{x^3}{\ell^3} \right) & \ell \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right) \end{bmatrix} \quad (11.41a)$$

$$B(x) = \frac{1}{\ell^2} \begin{bmatrix} \left(6 - 12 \frac{x}{\ell} \right) & \ell \left(4 - 6 \frac{x}{\ell} \right) \\ \left(-6 + 12 \frac{x}{\ell} \right) & \ell \left(2 - 6 \frac{x}{\ell} \right) \end{bmatrix} \quad (11.41b)$$

Le componenti di queste matrici sono illustrate in Figura 11.10.

11.2.2 FORZE NODALI

Si consideri un generico elemento finito, come quello tratteggiato in Figura 11.11a e rappresentato isolatamente in Figura 11.11b. Nel caso più generale, il suo contorno si presenta suddiviso in tre parti. La prima, indicata con S_u , appartiene alla superficie vincolata della struttura e su di essa sono noti gli spostamenti. La seconda (S_f) appartiene invece al contorno caricato ed è soggetta a trazioni superficiali f note. La terza

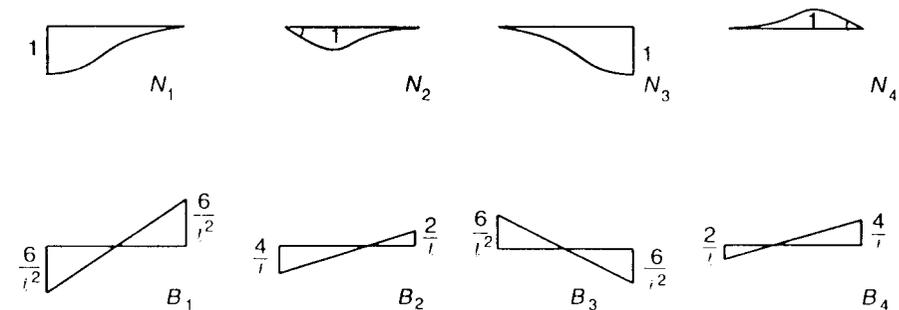


Figura 11.10

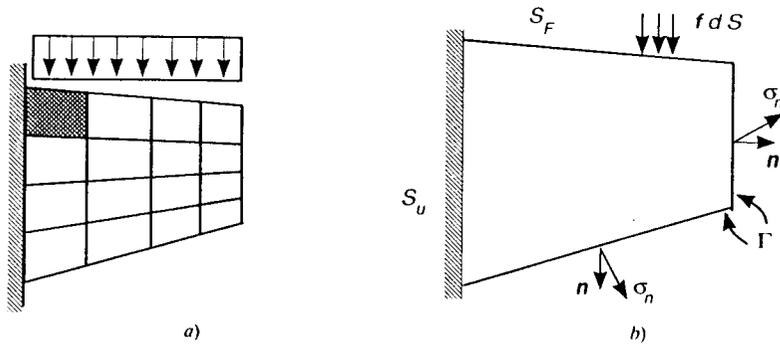


Figura 11.11

infine, indicata con Γ , costituisce l'interfaccia con gli elementi adiacenti; su di essa non sono noti né gli spostamenti né le trazioni, queste ultime costituite dalle componenti vettoriali σ_n di sforzo sulla giacitura identificata dalla normale uscente da Γ . In un elemento interno, completamente circondato da altri, il contorno è esclusivamente di questo tipo.

Si immagini di attribuire all'elemento una variazione virtuale di spostamento $\delta \hat{\mathbf{S}}$, con conseguenti $\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$. Indicando con \mathbf{F} le forze di volume e ricordando che è $\delta \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$ su S_u , i lavori virtuali esterno e interno si scrivono

$$\mathcal{L}_e = \int_V \mathbf{F}' \delta \hat{\mathbf{S}} dV + \int_{S_f} \mathbf{f}' \delta \hat{\mathbf{S}} dS + \int_{\Gamma} \sigma'_n \delta \hat{\mathbf{S}} d\Gamma \quad \mathcal{L}_i = \int_V \sigma' \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} dV \quad (11.42a, b)$$

(le tensioni trasmesse dagli elementi adiacenti sono infatti viste dall'elemento isolato come carichi applicati). La condizione di equilibrio per l'elemento si ottiene imponendo l'eguaglianza tra le (11.42) limitatamente alle variazioni virtuali compatibili con il modello di spostamento. Vale a dire, per ogni $\delta \hat{\mathbf{u}}$ e

$$\delta \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}} \quad \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B} \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (11.43a, b)$$

In virtù delle (11.43), le espressioni (11.42) dei lavori virtuali esterno e interno divengono

$$\mathcal{L}_e = \left\{ \int_V \mathbf{N}' \mathbf{F} dV + \int_{S_f} \mathbf{N}' \mathbf{f} dS + \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \sigma_n d\Gamma \right\}' \delta \hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p})' \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (p1)$$

$$\mathcal{L}_i = \left\{ \int_V \mathbf{B}' \sigma dV \right\}' \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (p2)$$

Nella (p1) si è posto

$$\mathbf{p} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \sigma_n d\Gamma \quad \mathbf{p}_0 = \int_V \mathbf{N}' \mathbf{F} dV + \int_{S_f} \mathbf{N}' \mathbf{f} dS \quad (11.44a, b)$$

La condizione di equilibrio pertanto si esprime

$$\left\{ \mathbf{p}_0 + \mathbf{p} - \int_V \mathbf{B}' \sigma dV \right\}' \delta \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \forall \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (11.45)$$

e richiede l'annullamento del termine in parentesi. Si ottiene

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{B}' \sigma dV - \mathbf{p}_0 \quad (11.46)$$

I vettori definiti dalle (11.44) sono noti come *forze nodali* e le loro componenti sono le quantità statiche associate, attraverso il modello cinematico, agli spostamenti nodali. In particolare, \mathbf{p}_0 è il vettore (noto) delle forze nodali equivalenti ai carichi esterni applicati sull'elemento, mentre \mathbf{p} rappresenta il contributo delle tensioni all'interfaccia con gli elementi adiacenti. Tali forze sono *equivalenti* alle azioni effettivamente presenti nel senso definito dalle (p1): per ogni variazione di spostamento concessa dal modello è possibile esprimere in termini di esse il lavoro virtuale esterno sull'elemento.

ESEMPIO 11.4: elemento biella Si consideri l'elemento di Figura 11.12a, soggetto a un carico assiale distribuito $n = \text{cost}$. In tal caso, la (11.44b) fornisce

$$\mathbf{p}_0 = \int_0^l \mathbf{N}'(x) n(x) dx = n \int_0^l \mathbf{N}'(x) dx \quad (q)$$

La matrice delle funzioni di forma è espressa dalla (11.34a) per il modello lineare e dalla (11.35a) per quello quadratico. Si ottiene, nei due casi

$$\mathbf{p}_0 = n \int_0^l \begin{Bmatrix} 1-x/l \\ x/l \end{Bmatrix} dx = \frac{nl}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p}_0 = n \int_0^l \begin{Bmatrix} 1-3x/l+2x^2/l^2 \\ 4(x/l-x^2/l^2) \\ -x/l+2x^2/l^2 \end{Bmatrix} dx = \frac{nl}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (r1, 2)$$

Le componenti di questi vettori sono forze dirette secondo l'asse dell'elemento e applicate nei punti dove si collocano i corrispondenti spostamenti nodali. Esse sono illustrate nei due casi in Figura 11.12b e 11.12c. È facile constatare che la loro somma è comunque pari al carico totale nl sull'elemento.

ESEMPIO 11.5: elemento rettangolare piano Si consideri ora l'elemento rettangolare in Figura 11.8a, ridisegnato in Figura 11.13a con i carichi a esso applicati. Questi sono costituiti dalle forze di volume

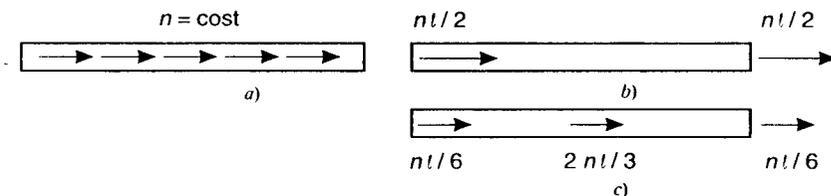


Figura 11.12

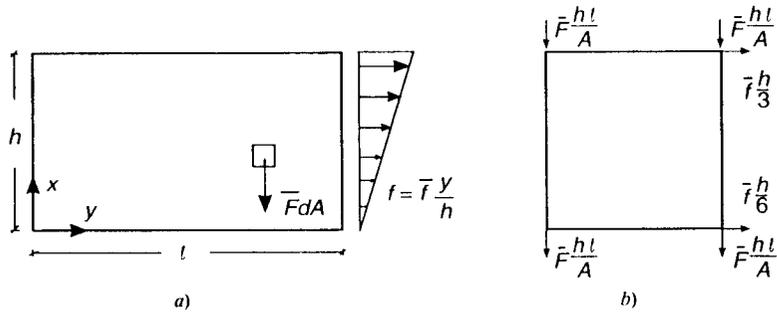


Figura 11.13

$$F_x = 0, \quad F_y = -\bar{F} = \text{cost} \tag{S1}$$

e, sul lato $x = l$, dalle trazioni superficiali

$$f_x = \bar{f} \frac{y}{h}, \quad f_y = 0 \tag{S2}$$

(tutte queste azioni vanno intese come risultanti sullo spessore). Dalla (11.44b) si ottiene allora

$$p_0 = -\bar{F} \int_0^l \int_0^h \mathbf{N}'(x, y) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} dx dy + \bar{f} \int_0^h \frac{y}{h} \mathbf{N}'(l, y) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dy$$

dove $\mathbf{N}(x, y)$ è espressa dalla (11.38). Si ottiene, a calcoli svolti

$$p_0 = \left\{ 0 \quad -\frac{\bar{F}hl}{4} \quad \frac{\bar{f}h}{6} \quad -\frac{\bar{F}hl}{4} \quad \frac{\bar{f}h}{3} \quad -\frac{\bar{F}hl}{4} \quad 0 \quad -\frac{\bar{F}hl}{4} \right\}'$$

Le forze nodali equivalenti ai carichi applicati sono illustrate in Figura 11.13b. Si può ancora constatare come le due condizioni di carico in Figura 11.13 siano staticamente equivalenti, nel senso che hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto a ogni punto del piano.

ESEMPIO 11.6: trave soggetta a carico trasversale Si consideri infine la trave in Figura 11.9 soggetta a un carico trasversale $p = \text{cost}$. Se le deformazioni taglianti non vengono trascurate (modello di Timoshenko), le forze esterne hanno due componenti; la seconda di queste è un momento distribuito m , nullo nel caso in esame. La (11.44b) fornisce allora

$$p_0 = p \int_0^l \mathbf{N}'(x) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dx$$

con $\mathbf{N}(x)$ definito dalla (11.41a). Risulta

$$p_0 = \frac{pl}{2} \{1 \ 0 \ 1 \ 0\}' \tag{11.47a}$$

Nel modello flessionale invece, p è la sola forza generalizzata. Si ha pertanto

$$p_0 = p \int_0^l \mathbf{N}'(x) dx$$

con $\mathbf{N}(x)$ ora espressa dalla (11.41a). Si ottiene, a calcoli svolti

$$p_0 = \left\{ \frac{pl}{2} \quad \frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad -\frac{pl^2}{12} \right\}' \tag{11.47b}$$

Il carico originario e le forze nodali a esso equivalenti nei due casi sono illustrati in Figura 11.14. Entrambe le (11.47) prevedono, come risultante in direzione trasversale, il valore pl pari al carico totale applicato, egualmente suddiviso sui nodi. Nel modello flessionale si aggiunge anche un sistema autoequilibrato costituito da due coppie uguali e opposte.

11.2.3 CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO

Motivi di convenienza suggeriscono spesso di formulare il modello di spostamento in coordinate locali. Ad esempio, l'asse x è spontaneamente identificato con la linea media di un elemento monodimensionale o con uno dei lati di un triangolo piano. I riferimenti locali dei vari elementi che costituiscono la struttura si presentano in generale diversamente orientati, di modo che gli spostamenti nodali non risultano sovrapponibili.

In vista della successiva operazione di assemblaggio, è opportuno trasformare le componenti u_i di spostamento nodale nel riferimento locale \mathbf{x} nelle componenti \mathbf{u} rispetto a un riferimento globale \mathbf{X} , comune a tutti gli elementi. La legge di trasformazione, di cui le (11.21a) costituiscono un esempio, si esprime simbolicamente come segue

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T} \mathbf{u} \tag{11.48a}$$

Le componenti di \mathbf{T} dipendono dall'angolo tra i due riferimenti. Se in ogni nodo j le componenti di spostamento locale e globale sono numerate consecutivamente, tale matrice si presenta diagonale a blocchi. Precisamente

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \text{diag}(\mathbf{t}) \tag{11.48b}$$

dove la sottomatrice \mathbf{t} governa la trasformazione delle componenti di spostamento relative al j -simo nodo. Per un elemento piano, una barra di struttura reticolare e una trave inflessa si ha, rispettivamente

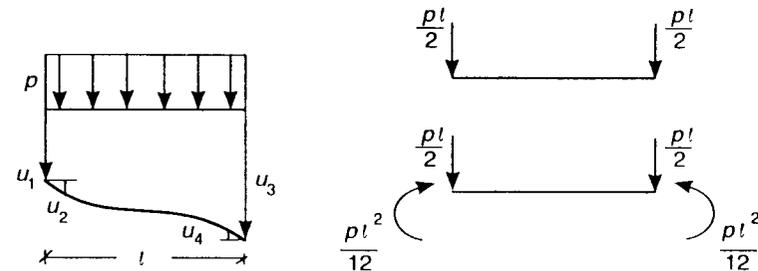


Figura 11.14

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \end{Bmatrix}_j \quad (11.49a)$$

$$\{u_i\}_j = [\cos \vartheta \quad \sin \vartheta] \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \end{Bmatrix}_j \quad (11.49b)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\vartheta \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_\vartheta \end{Bmatrix}_j \quad (11.49c)$$

come si evince immediatamente dalla Figura 11.15. Si noti che la matrice \mathbf{t} che si desume dalla (11.49b), se inserita nella (11.48b), riconduce all'espressione (11.21a) della legge di trasformazione per un modello lineare di barra.

Introducendo la (11.48) nelle (11.32) i modelli di spostamento e deformazione divengono

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_x(\mathbf{x})\mathbf{u}_L = \mathbf{N}_x(\mathbf{x})\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{N}_x(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (11.50a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_x(\mathbf{x})\mathbf{u}_L = \mathbf{B}_x(\mathbf{x})\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{B}_x(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (11.50b)$$

dove gli indici $()_x$ e $()_X$ distinguono tra le matrici relative ai riferimenti locale e globale. È quindi

$$\mathbf{N}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_X(\mathbf{x})\mathbf{T} \quad \mathbf{B}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_X(\mathbf{x})\mathbf{T} \quad (11.51a, b)$$

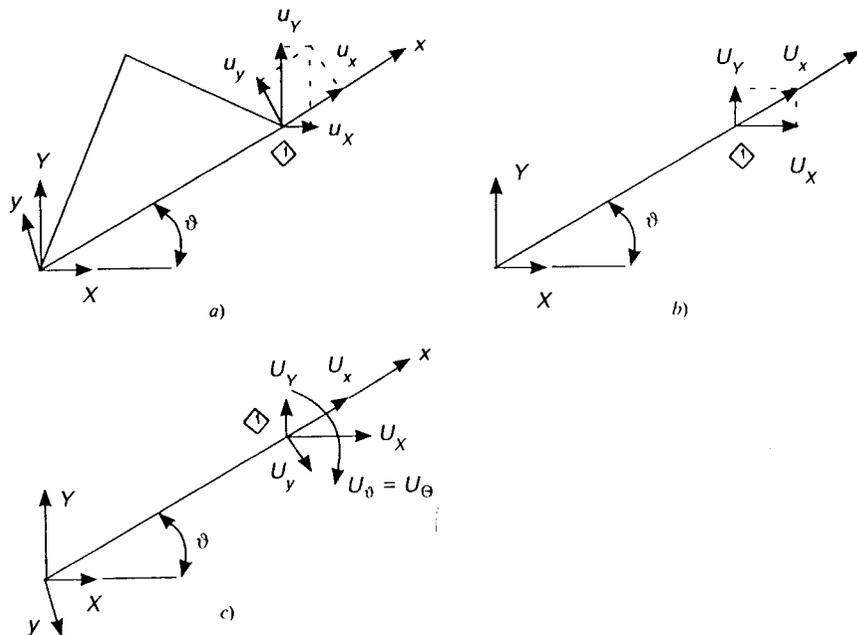


Figura 11.15

Si osservi che spostamenti e deformazioni sull'elemento sono sempre riferiti alle coordinate locali; la trasformazione riguarda solo le variabili nodali da cui dipendono.

La legge di trasformazione per le forze nodali consegue da un'equivalenza in termini di lavoro virtuale. Dalla condizione

$$\mathbf{p}' \delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{p}'_L \delta \hat{\mathbf{u}}_L \quad \forall \quad \delta \hat{\mathbf{u}}, \quad \delta \hat{\mathbf{u}}_L = \mathbf{T} \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (11)$$

si ottiene infatti

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}' \mathbf{p}_L \quad (11.52)$$

con \mathbf{p}_L espresso dalla (11.46). Sostituendo, si perviene all'espressione

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}' \int_V \mathbf{B}'_X \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{T}' \mathbf{p}_{0L} \quad (12)$$

Per la (11.51a) si può anche scrivere

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}' \mathbf{p}_L = \mathbf{T}' \int_\Gamma \mathbf{N}'_X \boldsymbol{\sigma}_n d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{N}'_X \boldsymbol{\sigma}_n d\Gamma \quad (11.53a)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{T}' \mathbf{p}_{0L} = \int_V \mathbf{N}'_X \mathbf{F} dV + \int_{S_x} \mathbf{N}'_X \mathbf{f} dS \quad (11.53b)$$

Ricordando anche la (11.51b), la (12) pertanto diviene

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{B}'_X \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{p}_0 \quad (11.54)$$

Le relazioni cinematiche e statiche per l'elemento finito mantengono quindi inalterata la loro struttura. La sola differenza tra le (11.50), (11.53), (11.54) e le (11.32), (11.46), (11.44) è infatti nell'espressione delle matrici, ridefinite dalle (11.51) in termini di spostamenti nel riferimento globale. Nel seguito tale riferimento verrà sottinteso e l'indice $()_x$ soppresso.

11.2.4 ASSEMBLAGGIO

Questa operazione ricostruisce la continuità della struttura imponendo quella degli spostamenti nodali. Si consideri uno schema costituito da N elementi finiti e sia R il numero di nodi una volta che questi sono stati interconnessi (nell'esempio di Figura 11.16a è $N = 4$ e $R = 9$).

La configurazione di questo schema è governata dagli spostamenti \mathbf{U} di tali nodi, riferiti alle coordinate globali \mathbf{X} (nell'esempio vi sono due spostamenti in ogni nodo e \mathbf{U} è un vettore di 18 componenti; al momento, infatti, si considerano anche gli spostamenti dei nodi vincolati). D'altra parte, il generico elemento e , se considerato isolatamente, ha m componenti di spostamento nodale, raccolte nel vettore \mathbf{u}_e e pure definite nel riferimento globale una volta effettuata la trasformazione descritta nel paragrafo precedente (nell'esempio, gli elementi hanno tutti $r = 4$ nodi (Figura 11.16b) ed è quindi $m = 8$).

In sede di assemblaggio, le componenti di spostamento dei singoli elementi vengono identificate con le corrispondenti nella struttura assemblata. Con riferimento alla Figura 11.16, si impone

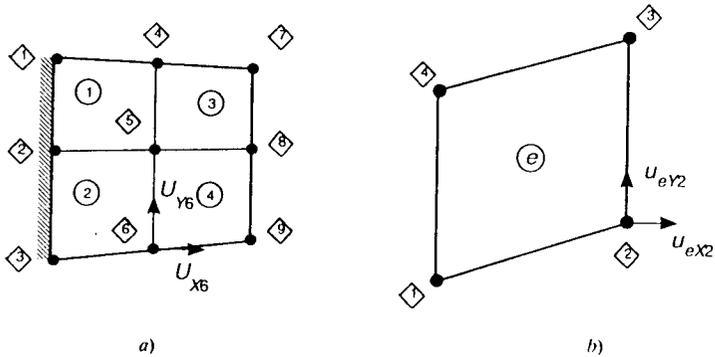


Figura 11.16

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= U_2, & u_{12} &= U_5, & u_{13} &= U_4, & u_{14} &= U_1 \\
 u_{21} &= U_3, & u_{22} &= U_6, & u_{23} &= U_5, & u_{24} &= U_2 \\
 u_{31} &= U_5, & u_{32} &= U_8, & u_{33} &= U_7, & u_{34} &= U_4 \\
 u_{41} &= U_6, & u_{42} &= U_9, & u_{43} &= U_8, & u_{44} &= U_5
 \end{aligned} \tag{u}$$

dove si sono indicati con

$$\mathbf{U}_J = \begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \end{Bmatrix}_J \quad \mathbf{u}_{ej} = \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \end{Bmatrix}_{ej} \tag{v1, 2}$$

i vettori che raccolgono le due componenti di spostamento, rispettivamente del nodo J della struttura ($J = 1, \dots, R = 9$) e del nodo j dell'elemento e ($j = 1, \dots, r = 4$). Le posizioni

$$\mathbf{U} = \{U'_1 \dots U'_J \dots U'_R\} \quad \mathbf{u}_e = \{u'_{e1} \dots u'_{ej} \dots u'_{er}\}' \tag{v3, 4}$$

permettono di scrivere le (u) come segue

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (e = 1, \dots, N) \tag{11.55}$$

Ad esempio, per l'elemento $e = 2$ la (11.55) assume la forma

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_9 \end{Bmatrix} \tag{w}$$

dove I indica la matrice identità 2×2 e nelle posizioni occupate dai punti si intendono presenti elementi nulli. Le \mathbf{L}_e sono note come *matrici di connettività*.

Introducendo la (11.55) nelle (11.50), le espressioni per spostamenti e deformazioni locali divengono

$$\mathbf{s}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (e = 1, \dots, N) \tag{11.56a, b}$$

Al momento, gli spostamenti nodali contengono anche le componenti relative ai nodi vincolati. Vincoli fissi impongono spostamenti nulli e in tal caso è sufficiente eliminare queste componenti da \mathbf{U} . Formalmente, le relazioni precedenti permangono inalterate, a patto di non considerare le colonne corrispondenti ai gradi di libertà vincolati nelle matrici di connettività \mathbf{L}_e . Le (11.56) esprimono allora spostamenti e deformazioni locali in funzione delle sole componenti libere. In presenza di cedimenti, gli spostamenti dei nodi vincolati hanno valori noti; questo caso verrà considerato più avanti.

Si osservi che le (11.55) ricostruiscono la continuità della struttura in termini di spostamenti nodali e che pure limitatamente ai valori nodali sono imposte le condizioni di vincolo. Non ne consegue che gli spostamenti locali (11.56a) (e le loro derivate, quando richiesto dalla congruenza) risultino continui all'interfaccia tra elementi adiacenti, né che si annullino ovunque sulla superficie vincolata S_v . Se però le funzioni di forma sono definite in modo da raggiungere questo risultato, a valle dell'assemblaggio il modello di spostamento definisce, in funzione dei parametri liberi \mathbf{U} , configurazioni congruenti per il problema originario.

ESEMPIO 11.7 Si consideri la trave di Bernoulli-Eulero illustrata in Figura 11.17a, che si suppone discretizzata mediante tre elementi finiti a quattro gradi di libertà. In assenza di vincoli, ognuno dei quattro nodi presenta due componenti di spostamento (componente trasversale $U_{v,j}$ e rotazione $U_{\theta,j}$), con cui le corrispondenti quantità agli estremi di ogni elemento (Figura 11.17b) si identificano in sede di assemblaggio. Peraltro, i vincoli impongono valore nullo alla rotazione del nodo 1 e agli spostamenti dei nodi 2 e 4, riducendo a cinque il numero complessivo dei parametri liberi. Con la numerazione in Figura 11.17, le relazioni di connettività per i tre elementi si scrivono

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \tag{11.57}$$

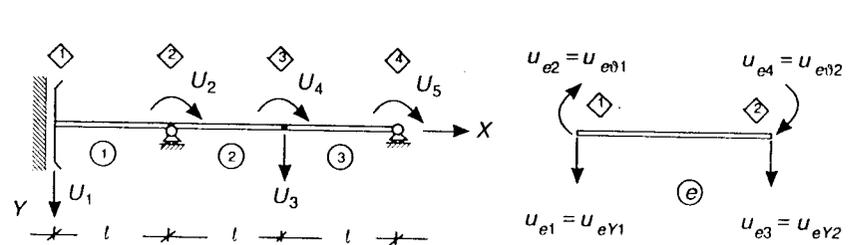


Figura 11.17

Le matrici di connettività hanno quindi quattro righe (quanti i gradi di libertà m di ogni elemento) e cinque colonne (quanti gli spostamenti nodali liberi M della struttura assemblata). Introducendo le (11.57) nelle (11.41) si perviene a esprimere spostamenti e deformazioni locali per il caso in esame. Si ottiene, in ogni elemento

$$v_1(x) = \left(1 - 3 \frac{x^2}{\ell^2} + 2 \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_1 + \ell \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_2$$

$$v_2(x) = \ell \left(\frac{x}{\ell} - 2 \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_2 + \left(3 \frac{x^2}{\ell^2} - 2 \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_3 + \ell \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_4 \quad (11.58a)$$

$$v_3(x) = \left(1 - 3 \frac{x^2}{\ell^2} + 2 \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_3 + \ell \left(\frac{x}{\ell} - 2 \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_4 + \ell \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3}\right) U_5$$

$$x_1(x) = \frac{1}{\ell^2} \left(6 - 12 \frac{x}{\ell}\right) U_1 + \frac{1}{\ell} \left(2 - 6 \frac{x}{\ell}\right) U_2$$

$$x_2(x) = \frac{1}{\ell} \left(4 - 6 \frac{x}{\ell}\right) U_2 + \frac{1}{\ell^2} \left(-6 + 12 \frac{x}{\ell}\right) U_3 + \frac{1}{\ell} \left(2 - 6 \frac{x}{\ell}\right) U_4 \quad (11.58b)$$

$$x_3(x) = \frac{1}{\ell^2} \left(6 - 12 \frac{x}{\ell}\right) U_3 + \frac{1}{\ell} \left(4 - 6 \frac{x}{\ell}\right) U_4 + \frac{1}{\ell} \left(2 - 6 \frac{x}{\ell}\right) U_5$$

Si ricorda che in ogni tratto queste espressioni sono riferite alla coordinata locale dell'elemento. Le (11.58a) definiscono il modello di spostamento come combinazione lineare dei cinque modi illustrati in Figura 11.18a, ognuno dei quali è continuo con la sua derivata. In Figura 11.18b sono invece riportati i modi deformativi (11.58b) che ne conseguono.

Si attribuiscono ora allo schema discreto variazioni virtuali $\delta \hat{U}$ dei parametri liberi. Di regola, sui nodi liberi non sono presenti forze concentrate che lavorino per tali spostamenti. Il principio dei lavori virtuali richiede quindi

$$\sum_{e=1}^N \mathbf{p}'_e \delta \hat{\mathbf{u}}_e = 0 \quad \forall \quad \delta \hat{\mathbf{U}}, \quad \delta \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{L}_e \delta \hat{\mathbf{U}} \quad (x)$$

dove le \mathbf{p}_e sono le forze nodali (11.53a). Nella relazione precedente, il primo membro rappresenta il contributo dei singoli elementi, espresso in termini di variabili nodali e sommato su tutti gli elementi. Dalla (x) consegue

$$\sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{p}_e = \mathbf{0} \quad (11.59)$$

Si introduca adesso il vettore delle forze nodali equivalenti ai carichi

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{p}_{0e} \quad (11.60)$$

Sostituendo nella (11.59) l'espressione (11.54) delle \mathbf{p}_e si ottiene allora l'equazione di equilibrio per lo schema discreto nella forma

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \int_{V_e} \mathbf{B}'(\mathbf{x}) \sigma_e(\mathbf{x}) dV \quad (11.61)$$

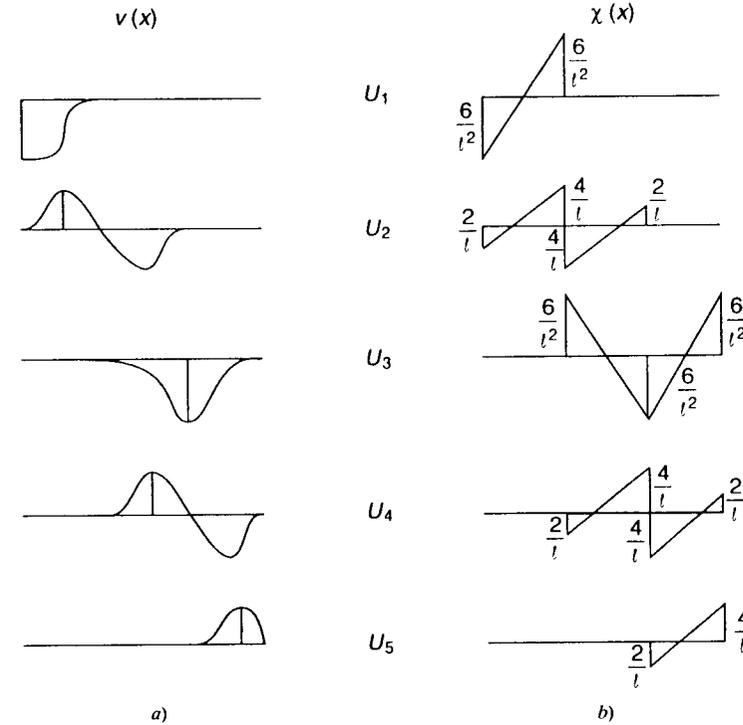


Figura 11.18

Qualora, come spesso accade in strutture reticolari o telai, sui nodi agissero anche forze concentrate, queste semplicemente si sommano alle corrispondenti componenti nella (11.60). Le (11.61) sono note come equazioni di equilibrio nodale. Le relazioni cinematiche e statiche relative al singolo elemento e allo schema discreto sono riassunte in Tabella 11.2. Le variabili nodali si intendono sempre riferite alle coordinate globali.

Il significato delle (11.59) può essere colto osservando che sul contorno Γ_e , dove l'elemento e si interfaccia con quelli adiacenti, il lavoro virtuale si esprime

$$\mathcal{L}_{\Gamma_e} = \int_{\Gamma_e} \sigma'_{ne} \delta \hat{\mathbf{s}}_e d\Gamma \quad (y)$$

dove, si ricorda, σ_{ne} indica la componente vettoriale di tensione affiorante sul bordo.

La congruenza richiede la continuità degli spostamenti all'interfaccia tra elemento e elemento. D'altro canto, l'equilibrio richiede quella delle σ_n . Con riferimento a due elementi adiacenti e e f (Figura 11.19) deve infatti risultare localmente

$$\delta \hat{\mathbf{s}}_f = \delta \hat{\mathbf{s}}_e \quad \sigma_{ne} = -\sigma_{nf} \quad (z1, 2)$$

Una soluzione equilibrata e congruente prevede quindi che il lavoro virtuale sull'insieme delle interfacce sia nullo. Sommando i contributi (y) relativi a tutti gli elementi, la condizione si scrive

Tabella 11.2

(Vincoli fissi - Nodi scarichi)	
ELEMENTO e	
Spostamenti nodali u_e	Forze nodali p_e, p_{0e}
$s_e(x) = N(x)u_e$ (modello di spostamento)	$\begin{cases} p_e = \int_{\Gamma_e} N^t \sigma_{ne} d\Gamma & \text{dagli elementi} \\ p_{0e} = \int_{V_e} N^t F dV + \int_{S_{fe}} N^t f dS & \text{equivalenti} \\ & \text{ai carichi} \end{cases}$
$\varepsilon_e(x) = B(x)u_e$	$p_e = \int_{V_e} B^t \sigma_e dV - p_{0e}$
SCHEMA DISCRETO (assemblaggio di N elementi)	
Spostamenti generalizzati U (componenti libere [vincoli fissi])	Forze generalizzate P_0 (forze nodali equivalenti ai carichi)
$u_e = L_e U \quad (e = 1, \dots, N)$	$\begin{cases} \sum_e L_e^t p_e = 0 \\ \sum_e L_e^t p_{0e} = P_0 \end{cases}$
$\varepsilon_e(x) = B(x)L_e U$ (legame deformazioni - spostamenti nodali)	$P_0 = \sum_e L_e^t \int_{V_e} B^t(x) \sigma_e(x) dV$ (equilibrio nodale)

$$\mathcal{L}_\Gamma = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \sigma'_{ne} \delta \hat{s}_e d\Gamma = 0 \quad (aa)$$

Nel procedimento, la (aa) viene imposta limitatamente alle variazioni di spostamento permesse dal modello. Introducendo la (11.56a) si ottiene allora

$$\sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \sigma'_{ne} N d\Gamma \cdot L_e \delta \hat{U} = 0 \quad \forall \delta \hat{U}$$

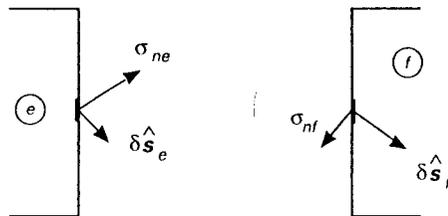


Figura 11.19

condizione che, in virtù della definizione (11.53a) delle forze nodali dell'elemento, riconduce alla (11.59).

La condizione di equilibrio locale (z2) viene quindi sostituita da una condizione globale, espressa in termini delle forze nodali (11.53a), risultanti dalle tensioni sulle interfacce. Utilizzando la (11.54), la (11.59) si traduce nella (11.61), che eguaglia le forze nodali equivalenti (risultanti dei carichi effettivamente agenti) a un'opportuna media pesata degli sforzi locali negli elementi che concorrono nei diversi nodi. Come in tutte le formulazioni basate su modelli cinematici, l'equilibrio è imposto solamente in media.

11.3 ANALISI ELASTICA

11.3.1 PROPRIETÀ ELASTICHE DI UN ELEMENTO FINITO

Occorre ancora introdurre le relazioni costitutive. Viene dapprima considerato il legame elastico lineare che, nella sua forma più generale, si esprime

$$\sigma = d(\varepsilon - \vartheta) + \zeta \quad (11.62)$$

d è la matrice (simmetrica, definita positiva) delle costanti elastiche e ϑ il vettore delle deformazioni anelastiche o iniziali (ad esempio, termiche) eventualmente presenti. Il vettore ζ , noto come *sforzo iniziale*, non compariva nel legame definito nel Capitolo 3; esso viene qui introdotto in quanto alcuni procedimenti di analisi inelastica incorporano in un termine di questo tipo le deviazioni dalla linearità nel comportamento del materiale. Nella trattazione che segue, sia ϑ che ζ , se presenti, sono considerati noti.

Il legame puntuale (11.62) si traduce facilmente in una relazione che governa il comportamento dell'elemento finito in termini di variabili nodali. Sostituendo la (11.32b) per ε e introducendo il risultato nella (11.46), si ottiene infatti

$$p = \left[\int_V B^t dB dV \right] u - \left\{ \int_V B^t (d\vartheta - \zeta) dV \right\} - p_0 \quad (a)$$

La matrice simmetrica

$$k = \int_V B^t dB dV \quad (11.63)$$

è nota come *rigidezza elastica* dell'elemento finito. Il vettore

$$p_0 = \int_V B^t (d\vartheta - \zeta) dV \quad (11.64)$$

definisce invece le forze nodali equivalenti a deformazioni e sforzi iniziali. Con tali posizioni, la (a) si scrive

$$p = ku - (p_0 + p_\theta) \quad (11.65)$$

A differenza dell'analogia relazione (11.28a), a suo tempo stabilita per un'asta di struttura reticolare, la (11.65) presenta un termine noto, costituito dalle forze nodali equivalenti, prima assente in quanto l'asta era priva di carichi e di effetti anelastici iniziali.

ESEMPIO 11.8: elemento biella La (11.62) si riconduce adesso al legame uniaxiale.

$$\sigma = E(\varepsilon - \vartheta) + \zeta$$

È inoltre $dV = A dx$, dove A è l'area della sezione trasversale della barra. Le (11.63), (11.64) divengono allora

$$\mathbf{k} = \int_0^{\ell} EA \mathbf{B}' \mathbf{B} dx \quad \mathbf{p}_\theta = \int_0^{\ell} A \mathbf{B}' (E\vartheta - \zeta) dx \quad (b1, 2)$$

La matrice \mathbf{B} è espressa dalla (11.34b) per l'elemento a due nodi e dalla (11.35b) per il modello quadratico. Per $EA = \text{cost}$, dalla (b1) si ottiene nei due casi

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (11.66a, b)$$

I vettori delle forze nodali equivalenti a una variazione termica uniforme $\Delta T = \text{cost}$ sono invece, rispettivamente

$$\mathbf{p}_\theta = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p}_\theta = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (11.67a, b)$$

Si supponga ora che la barra abbia sezione variabile; in particolare, sia

$$A(x) = A_0 \left(2 - \frac{x}{\ell} \right) \quad (c)$$

Per il modello lineare si ottiene allora, in luogo delle (11.66a), (11.67a)

$$\mathbf{k} = \frac{3}{2} \frac{EA_0}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_\theta = \frac{3}{2} \alpha EA_0 \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (d1, 2)$$

ESEMPIO 11.9: triangolo piano a tre nodi È questo un elemento a deformazione costante. Se tali sono anche lo spessore t e le proprietà del materiale ($\mathbf{d} = \text{cost}$), l'integrazione nella (11.63) riguarda solo la superficie nel piano, che vale (Figura 11.7a)

$$A = \frac{1}{2} \mu \ell^2 \quad (e)$$

La matrice di rigidità allora si esprime

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} \mu \ell^2 t \mathbf{B}' \mathbf{d} \mathbf{B} \quad (f)$$

con \mathbf{B} definita dalla (11.37).

La matrice elastica \mathbf{d} è diversa a seconda che l'elemento sia piano negli sforzi o nelle deformazioni. Nel primo caso, si applica la (4.43a). Precisamente

$$\mathbf{d} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (g1)$$

La (f) si esplicita allora come segue

$$\mathbf{k} = \frac{E t}{2(1-\nu^2)} \mathbf{x} \quad (11.68a)$$

dove

$$\begin{aligned} x_{11} &= \mu + \frac{(1-\lambda)^2}{\mu} \frac{1-\nu}{2} & x_{12} &= (1-\lambda) \frac{1+\nu}{2} & x_{13} &= -\mu + \frac{\lambda(1-\lambda)}{\mu} \frac{1-\nu}{2} \\ x_{14} &= \lambda \frac{1+\nu}{2} \frac{1-\nu}{2} & x_{15} &= -\frac{1-\lambda}{\mu} \frac{1-\nu}{2} & x_{16} &= -\nu \\ x_{22} &= \mu \frac{1-\nu}{2} + \frac{(1-\lambda)^2}{\mu} & x_{23} &= \lambda \frac{1+\nu}{2} - \nu & x_{24} &= \frac{\lambda(1-\lambda)}{\mu} - \mu \frac{1-\nu}{2} \\ x_{25} &= -\frac{1-\nu}{2} & x_{26} &= -\frac{1-\lambda}{\mu} \\ x_{33} &= \mu + \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{1-\nu}{2} & x_{34} &= -\lambda \frac{1+\nu}{2} & x_{35} &= -\frac{\lambda}{\mu} \frac{1-\nu}{2} & x_{36} &= \nu \\ x_{44} &= \mu \frac{1-\nu}{2} + \frac{\lambda^2}{\mu} & x_{45} &= \frac{1-\nu}{2} & x_{46} &= -\frac{\lambda}{\mu} \\ x_{55} &= \frac{1}{\mu} \frac{1-\nu}{2} & x_{56} &= 0 & x_{66} &= \frac{1}{\mu} & (x_{ij} = x_{ji}) \end{aligned} \quad (11.68b)$$

Si calcolano ora le forze nodali equivalenti a una variazione termica uniforme sull'elemento ($\Delta T = \text{cost}$). Le deformazioni iniziali nel piano sono

$$\vartheta = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (g2)$$

Ricordando sempre la (e), la (11.64) diviene $\mathbf{p}_\theta = \frac{1}{2} \mu \ell^2 t \mathbf{B}' \mathbf{d} \vartheta$ e risulta, a calcoli svolti

$$\mathbf{p}_\theta = \frac{E t \ell \alpha \Delta T}{2(1-\nu)} \{-\mu \quad \lambda-1 \quad \mu \quad -\lambda \quad 0 \quad 1\}^t \quad (11.69)$$

Se il problema è piano nelle deformazioni, occorre usare in luogo delle (g) la matrice elastica (4.34a) e il vettore delle deformazioni termiche che si evince dalle (4.38b, 4.39b). In questo caso, lo spessore t viene di regola considerato unitario.

ESEMPIO 11.10: elemento di trave Nella teoria della trave il legame elastico stabilisce una relazione tra sforzi e deformazioni generalizzati, funzioni della sola ascissa x . L'elemento infinitesimo di volume è pertanto $dV = dx$ e la (11.63) diviene

$$\mathbf{k} = \int_0^{\ell} \mathbf{B}' \mathbf{d} \mathbf{B} dx \quad (h)$$

Nella formulazione di Timoshenko si ha

$$d = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA_* \end{bmatrix}$$

e $B(x)$ è espressa dalla (11.40b). Si ottiene allora, per l'elemento a quattro gradi di libertà in Figura 11.9, omogeneo e a sezione costante

$$k = \frac{GA_*}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & \ell/2 & -1 & \ell/2 \\ \ell/2 & \ell^2/3 & -\ell/2 & \ell^2/6 \\ -1 & -\ell/2 & 1 & -\ell/2 \\ \ell/2 & \ell^2/6 & -\ell/2 & \ell^2/3 \end{bmatrix} + \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.70a)$$

Nel modello puramente flessionale invece, le proprietà elastiche sono riassunte interamente dalla rigidità flessionale EI e $B(x)$ è fornita dalla (11.41b). La matrice di rigidità di un elemento a sezione costante risulta allora

$$k = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (11.70b)$$

Un'escursione termica lineare sulla sezione, che comporti uno scarto tra i lembi inferiore e superiore pari a ΔT , induce una curvatura termica $\chi_T = \alpha\Delta T/h$, dove h indica l'altezza della sezione. In materiali isotropi, variazioni di temperatura non inducono scorrimenti angolari. Le deformazioni termiche generalizzate sono pertanto, rispettivamente per i modelli di Timoshenko e flessionale

$$\vartheta = \frac{\alpha\Delta T}{h} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vartheta = \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

È facile verificare che se ΔT è indipendente da x , il vettore delle forze nodali equivalenti risulta in entrambi i casi

$$p_0 = EI \frac{\alpha\Delta T}{h} \{0 \quad 1 \quad 0 \quad -1\}^t \quad (11.71)$$

La (11.63) stabilisce un legame lineare tra spostamenti e forze nodali attraverso la matrice di rigidità dell'elemento. La generica componente k_{ij} di questa matrice definisce la i -sima componente p_i del vettore delle forze nodali che, in assenza di carichi e deformazioni o sforzi iniziali ($p_0 = p_0 = 0$), consegue a $u_j = 1$ e $u_k = 0 \forall k \neq j$. L'operazione è esemplificata per la trave di Bernoulli-Eulero in Figura 11.20, dove si è imposto $u_2 = 1$, $u_1 = u_3 = u_4 = 0$: le forze nodali che ne conseguono sono fornite dalla seconda colonna della (11.70b).

Nel caso in esempio, i valori delle forze nodali sono "esatti"; essi coincidono cioè con le reazioni vincolari che un calcolo basato sul modello flessionale fornisce per una trave a sezione costante soggetta unicamente a cedimenti agli estremi: la soluzione è infatti una cubica e tali sono pure le funzioni di forma (11.41a), che quindi la comprendono. Questa, tuttavia, è una semplice coincidenza. In generale, ad assegnati spostamenti nodali non conseguono localmente gli andamenti previsti dal modello.

Dal momento che d è definita positiva, consegue dalla (11.63) che la matrice di rigidità k è quantomeno semidefinita positiva. Essa però è singolare, con nullità pari al numero di moti rigidi consentiti nell'elemento isolato; un vettore u che configuri uno spostamento rigido non induce infatti forze nodali. In un elemento biella a due nodi, un triangolo a tre nodi e un elemento di trave a quattro gradi di libertà, i più generali moti rigidi sono rappresentati dai vettori

$$u_0 = \varrho \{1 \quad 1\}^t \quad (i)$$

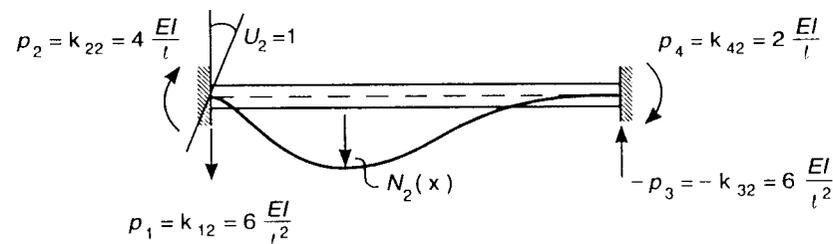


Figura 11.20

$$u_0 = \varrho_1 \{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^t + \varrho_2 \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}^t + \varrho_3 \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -\mu \quad \lambda\}^t \quad (i2)$$

$$u_0 = \varrho_1 \{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^t + \varrho_2 \{0 \quad 1 \quad \ell \quad 1\}^t \quad (i3)$$

Deve pertanto risultare, per le rispettive matrici di rigidità

$$k_{i1} + k_{i2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (11.72a)$$

$$k_{i1} + k_{i3} + k_{i5} = 0 \quad k_{i2} + k_{i4} + k_{i6} = 0 \quad k_{i4} - \mu k_{i5} + \lambda k_{i6} = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (11.72b)$$

$$k_{i1} + k_{i3} = 0 \quad k_{i2} + \ell k_{i3} + k_{i4} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (11.72c)$$

Le (11.66a), (11.68) e entrambe le (11.70) effettivamente soddisfano queste condizioni.

La singolarità della matrice comporta un legame tra le componenti del vettore delle forze nodali. È facile constatare che la parte dovuta alle sole u costituisce un sistema di forze autoequilibrato, che soddisfa cioè le equazioni cardinali della statica per l'elemento isolato. Queste sono infatti verificate da ogni colonna di k individualmente considerata: per gli esempi precedenti, tali equazioni sono semplicemente le (11.72) a indici invertiti.

Della stessa proprietà gode il contributo equivalente a deformazioni e sforzi iniziali. In Figura 11.21 sono illustrate le componenti non nulle dei vettori p , precedentemente calcolati, relativi a una barra a sezione costante, sia essa a due o a tre nodi (Figura 11.21a), a una trave

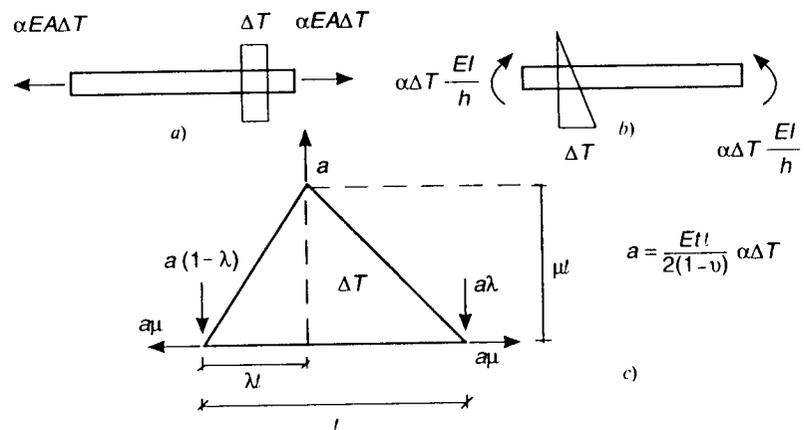


Figura 11.21

di Timoshenko o di Bernoulli-Eulero (Figura 11.21b) e al triangolo a deformazione costante (Figura 11.21c). Dal momento che \mathbf{p}_0 è staticamente equivalente alla risultante delle forze di volume e di superficie sull'elemento, le forze nodali (11.65) risultano globalmente in equilibrio con i carichi applicati.

Quando (come del resto fatto negli esempi) le proprietà dell'elemento vengono derivate operando nel suo riferimento locale, occorre riportare queste quantità al riferimento globale seguendo la procedura indicata nel Paragrafo 11.23. È immediato constatare che valgono le relazioni

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}' \mathbf{k}_l \mathbf{T} \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{T}' \mathbf{p}_{0l} \quad (11.73a, b)$$

dove \mathbf{T} è la matrice della trasformazione (11.48) e l'indice $()_l$ caratterizza quantità definite nel riferimento locale. Con queste posizioni, la (11.65) mantiene inalterata la propria struttura; peraltro, spostamenti e forze nodali sono adesso direttamente sovrapponibili in sede di assemblaggio.

11.3.2 ASSEMBLAGGIO E SOLUZIONE

L'operazione si effettua come descritto nel Paragrafo 11.2.4, tenendo però presente che le (11.32b) e (11.46) sono ora tra loro collegate attraverso il legame costitutivo del materiale dando luogo alla (11.65). Introducendo in questa equazione la relazione di connettività (11.55), si ottiene, per ogni elemento e

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e \mathbf{U} - (\mathbf{p}_{0e} + \mathbf{p}_{\theta e}) \quad e = 1, \dots, N \quad (j1)$$

L'equazione di equilibrio nodale (11.59) fornisce allora

$$\sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e \cdot \mathbf{U} - \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e (\mathbf{p}_{0e} + \mathbf{p}_{\theta e}) = \mathbf{0} \quad (j2)$$

Ponendo

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e \quad \mathbf{P} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e (\mathbf{p}_{0e} + \mathbf{p}_{\theta e}) \quad (11.74a, b)$$

la (j2) si scrive

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (11.75)$$

Le (11.74) definiscono, rispettivamente, la *matrice di rigidezza elastica della struttura* e il *vettore delle forze nodali equivalenti ai carichi e alle deformazioni (e/o sforzi) iniziali*. In assenza di queste ultime, \mathbf{P} si identifica con l'espressione (11.60) di \mathbf{P}_0 .

La matrice di rigidezza \mathbf{K} è simmetrica, come del resto i contributi \mathbf{k}_e di ogni elemento. Del tutto analogo è anche il significato delle sue componenti: \mathbf{K}_{ij} rappresenta la forza nodale secondo il grado di libertà i che si genera imponendo, sulla struttura scarica, $U_j = 1$ e $U_k = 0 \forall k \neq j$. Si osservi che l'assemblaggio elimina la possibilità di spostamenti rigidi relativi tra gli elementi; le singolarità a essi associate sono quindi rimosse e sopravvivono solo quelle dovute a eventuali moti rigidi dello schema discreto nel suo complesso. Se i vincoli sono tali da impedire atti di moto rigido, \mathbf{K} non è singolare. Possono darsi circostanze in cui la struttura, soggetta a forze globalmente equilibrate, non sia vincolata (o vincolata solo parzialmente): le singolarità in \mathbf{K} vengono allora eliminate vincolando isostaticamente lo schema discreto.

La modellazione a elementi finiti ha ricondotto il problema al sistema algebrico e lineare (11.75). Per la sua soluzione numerica sono da tempo disponibili metodi e algoritmi affidabili, in grado di gestire un numero notevole di equazioni. Certamente, per problemi realistici il sistema risolvibile presenta dimensioni molto elevate ed è quindi necessario migliorare l'efficienza dell'algoritmo con accorgimenti ad hoc. Anche così, l'onere computazionale associato alla soluzione della (11.75) rappresenta una percentuale significativa di quello complessivamente richiesto dall'analisi elastica (percentuale che cresce drasticamente in presenza di non-linearità di qualunque tipo). In ogni caso, pur se con costi non sempre indifferenti, problemi strutturali di notevole complessità e difficili, quando non impossibili, da affrontare con approcci tradizionali, possono così essere risolti.

I valori nodali \mathbf{U} rappresentano un'informazione di per sé adeguata sul campo di spostamenti (attraverso la (11.56a) è comunque possibile risalire ai valori punto per punto). Più delicata è invece la ricostruzione del regime tensionale. Il procedimento più spontaneo si basa sull'imposizione del legame elastico (11.62) con riferimento alle deformazioni (11.56b). Si ottiene allora, in ogni elemento e

$$\sigma_e(\mathbf{x}) = \mathbf{d}(\mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e \mathbf{U} - \vartheta_e(\mathbf{x})) + \zeta_e(\mathbf{x}) \quad (e = 1, \dots, N) \quad (11.76)$$

Questo risultato necessita in realtà di rielaborazioni. Come sempre in modelli cinematici, la rappresentazione dello stato di sforzo è attendibile solamente in media e i valori locali previsti dalla (11.76) si rivelano in generale poco accurati, quando non decisamente errati. Sono state avanzate diverse proposte per migliorare la rappresentazione degli sforzi locali [9-12], a cui si accennerà nel seguito.

ESEMPIO 11.11 Si consideri ancora la trave di Figura 11.17, supponendola soggetta a una carico trasversale uniforme p sul tratto tra i due appoggi e a una coppia W all'estremo di destra; essa sia inoltre uniformemente riscaldata sul lembo inferiore, con variazione termica ΔT rispetto a quello superiore (Figura 11.22). La trave sia di sezione costante: per ognuno dei tre elementi finiti, la matrice di rigidezza è allora espressa dalla (11.70b). Le matrici di connettività si desumono dalle (11.57). La (11.74a) fornisce quindi

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \left\{ \begin{bmatrix} 12 & 6l & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6l & 4l^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & 4l^2 & -6l & 2l^2 & \cdot \\ \cdot & -6l & 12 & -6l & \cdot \\ \cdot & 2l^2 & -6l & 4l^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12 & 6l & 6l & \cdot \\ \cdot & 6l & 4l^2 & 2l^2 & \cdot \\ \cdot & 6l & 2l^2 & 4l^2 & \cdot \end{bmatrix} \right\} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 \\ 0 & -6l & 24 & 0 & 6l \\ 0 & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (k1)$$

Si calcolano ora le forze nodali. Essendo il carico trasversale, quando presente, costante, il contributo di ogni elemento isolato è fornito dalla (11.47b). I vettori \mathbf{p}_{0e} sono invece espressi, in ogni elemento, dalla (11.71). Per le (11.59) e (11.74b) si ottiene allora

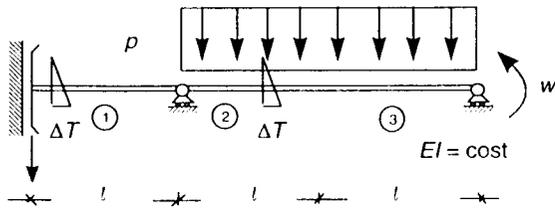


Figura 11.22

$$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -W \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ell^2/12 \\ \ell/2 \\ -\ell^2/12 \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ \ell/2 \\ \ell^2/12 \\ -\ell^2/12 \\ \cdot \end{Bmatrix} + \dots$$

$$+ EI \frac{\alpha \Delta T}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p\ell^2/12 \\ p\ell \\ 0 \\ -p\ell^2/12 - W - EI\alpha\Delta T/h \end{Bmatrix} \quad (k2)$$

Il primo addendo di questa relazione rappresenta il contributo dei carichi direttamente applicati ai nodi, nel caso qui considerato costituiti dalla coppia W , di verso opposto a quello assunto come positivo per U_5 .

La Figura 11.23a illustra il significato dei termini nella quarta colonna della $(k1)$: imponendo ai nodi di non spostarsi né ruotare e assegnando al nodo 3 la rotazione $U = 1$ si ottengono le reazioni vincolari indicate. La Figura 11.23b mostra invece le componenti non nulle del vettore delle forze nodali $(k2)$: dimensionalmente, esse sono forze o coppie, a seconda che corrispondano a spostamenti o a rotazioni del nodo.

Inserendo le (k) nella (11.75) e risolvendo il sistema si ottiene

$$U_1 = -\frac{p\ell^4}{10EI} - \frac{\ell^2}{10} \left(\frac{W}{EI} + \frac{\alpha\Delta T}{h} \right) \quad U_2 = \frac{p\ell^3}{5EI} + \frac{\ell}{5} \left(\frac{W}{EI} + \frac{\alpha\Delta T}{h} \right)$$

$$U_3 = \frac{19p\ell^4}{120EI} + \frac{\ell^2}{5} \left(\frac{W}{EI} + \frac{\alpha\Delta T}{h} \right) \quad U_4 = \frac{p\ell^3}{60EI} + \frac{\ell}{10} \left(\frac{W}{EI} + \frac{\alpha\Delta T}{h} \right)$$

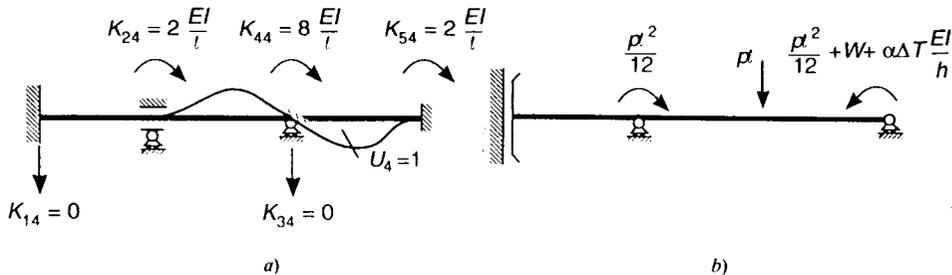


Figura 11.23

$$U_5 = -\frac{4p\ell^3}{15EI} - \frac{3}{5} \ell \left(\frac{W}{EI} + \frac{\alpha\Delta T}{h} \right) \quad (\ell)$$

Si procede ora al calcolo degli sforzi locali. Per il caso in esame, la (11.76) si scrive

$$M_e(x) = EI \left(\chi_e(x) - \frac{\alpha\Delta T}{h} \right)$$

dove $\chi_e(x)$ è espressa, in ogni elemento, dalle (11.58b) e $\alpha\Delta T/h$ è la curvatura di origine termica. Si ottiene, a calcoli svolti

$$M_1(x) = -\frac{p\ell^2}{5} - \frac{W}{5} - \frac{6}{5} EI \frac{\alpha\Delta T}{h}$$

$$M_2(x) = \frac{p\ell^2}{60} \left(-7 + 36 \frac{x}{\ell} \right) - \frac{W}{5} \left(1 - 3 \frac{x}{\ell} \right) - \frac{3}{5} EI \frac{\alpha\Delta T}{h} \left(2 - \frac{x}{\ell} \right)$$

$$M_3(x) = \frac{p\ell^2}{60} \left(29 - 24 \frac{x}{\ell} \right) + \frac{W}{5} \left(2 + 3 \frac{x}{\ell} \right) - \frac{3}{5} EI \frac{\alpha\Delta T}{h} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \quad (m)$$

I relativi andamenti sono illustrati in Figura 11.24, dove sono stati separati i contributi delle tre azioni sollecitanti.

Risolviendo l'equazione della linea elastica non è difficile ottenere la soluzione esatta del problema. Il confronto è significativo solamente con riferimento al carico distribuito p ; in sua assenza, infatti, in ognuno dei tratti lo spostamento è effettivamente cubico e il modello a elementi finiti lo rappresenta con esattezza. Sotto un carico uniforme la linea elastica è invece un polinomio di quarto grado, che il modello è in grado solamente di approssimare.

Gli spostamenti sono comunque colti con notevole precisione, al punto che i valori nodali (ℓ) si rivelano esatti; è ovviamente presente una differenza in punti diversi dai nodi, che tuttavia è ovunque molto contenuta (sullo spostamento massimo, lo scarto è circa lo 0.3%). Molto più grossolana è la rappresentazione dei momenti flettenti, il cui andamento esatto è riportato a tratteggio in Figura 11.24a. Il modello cubico comporta, in ogni elemento, momenti flettenti lineari; è evidente come la spezzata che consegue a due soli elementi non possa approssimare accettabilmente l'effettivo andamento parabolico tra i due appoggi.

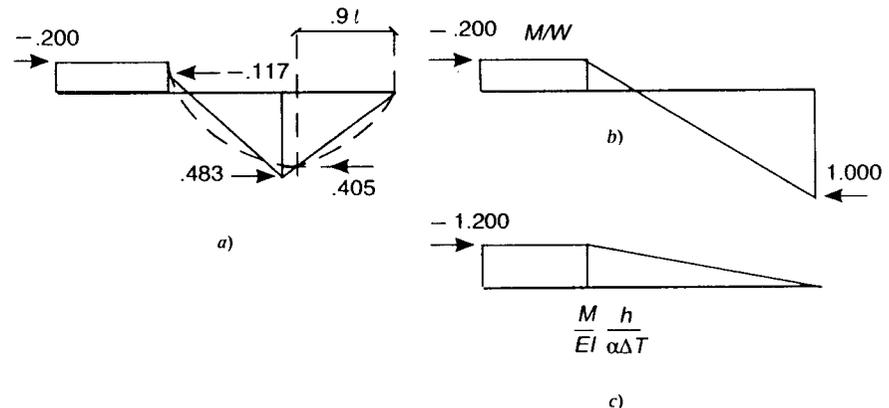


Figura 11.24

Si osservi che una trave realmente soggetta alle forze nodali equivalenti di Figura 11.23b presenterebbe in ogni tratto uno spostamento cubico; la soluzione trovata è quella esatta per questa condizione di carico (la discontinuità nell'andamento e il valore diverso da zero all'estremo del diagramma di Figura 11.24a sono conseguenza delle coppie concentrate $\pm p l^2/12$). Questa circostanza, tuttavia, è dovuta al fatto che il modello cubico di trave di Bernoulli-Eulero è capace di fornire la risposta esatta sotto le forze nodali equivalenti e non si verifica in generale.

Per semplicità, ci si è limitati a considerare vincoli fissi. Gli effetti di cedimenti imposti possono però essere facilmente incorporati. Si supponga di operare l'assemblaggio ignorando i vincoli: il vettore degli spostamenti nodali è allora decomponibile in due parti, il sottovettore \mathbf{U} che raccoglie le M componenti libere e il sottovettore \mathbf{U}_0 che contiene quelle di valore assegnato (non necessariamente nullo). Al primo di questi corrisponde il vettore delle forze nodali \mathbf{P} , note e sempre definite dalla (11.74b), mentre la parte associata a \mathbf{U}_0 è costituita dalle reazioni vincolari \mathbf{R} . Simbolicamente, la (75) si scrive allora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{K}'_0 & \mathbf{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} \quad (11.77a)$$

o anche, sviluppando i prodotti matriciali e riordinando i termini

$$\mathbf{KU} = \mathbf{P} - \mathbf{K}_0\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{R} = \mathbf{K}'_0\mathbf{U} + \mathbf{K}_{00}\mathbf{U}_0 \quad (11.77b, c)$$

La (11.77b) consente il calcolo degli spostamenti liberi \mathbf{U} , che vi compaiono come uniche incognite. I cedimenti vincolari comportano semplicemente una modifica nel vettore delle forze nodali a termine noto (nel caso di vincoli fissi è $\mathbf{U}_0 = 0$ e la (11.77b) si riconduce alla (11.75)). Una volta valutato \mathbf{U} , le reazioni vincolari possono essere calcolate, qualora lo si ritenesse necessario, sostituendo nella (11.77c).

11.3.3 FORMULAZIONE ENERGETICA DEL PROBLEMA ELASTICO

Il problema elastico può essere alternativamente formulato introducendo il modello di spostamento nel funzionale Energia Potenziale Totale della struttura. Questo si trasforma in una funzione dei parametri liberi \mathbf{U} , la cui stazionarietà definisce il sistema risolvibile.

A meno di termini costanti inessenziali, l'energia di deformazione associata al legame elastico (11.62) si scrive

$$\omega = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}' (\mathbf{d} \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\zeta}) \quad (11.78)$$

(per $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ la (11.78) si riconduce alla (3.21)). Sostituendo la (11.32b) per $\boldsymbol{\varepsilon}$ e integrando sul volume, si esprime l'energia di deformazione di ogni elemento nella forma

$$\Omega_e = \int_{V_e} \omega dV = \frac{1}{2} \mathbf{u}'_e \int_{V_e} \mathbf{B}' \mathbf{d} \mathbf{B} dV \mathbf{u}_e - \mathbf{u}'_e \int_{V_e} \mathbf{B}' (\mathbf{d} \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\zeta}) dV$$

o anche, ricordando le (11.63), (11.64)

$$\Omega_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}'_e \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{u}'_e \mathbf{p}_{0e} \quad (n1)$$

L'Energia Potenziale Totale dell'intera struttura è la somma dei contributi (n1) di ogni elemento, cui viene sottratto il lavoro W dei carichi esterni. Questo può a sua volta essere suddiviso nella somma dei termini relativi a ogni elemento. Precisamente

$$W = \int_V \mathbf{s}' \mathbf{F} dV + \int_{S_f} \mathbf{s}' \mathbf{f} dS = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V_e} \mathbf{s}'_e \mathbf{F}_e dV + \int_{S_{fe}} \mathbf{s}'_e \mathbf{f}_e dS \right\}$$

Introducendo il modello di spostamento (11.32a) e ricordando la (11.44b) si ottiene

$$W = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}'_e \left\{ \int_{V_e} \mathbf{N}'_e \mathbf{F}_e dV + \int_{S_{fe}} \mathbf{N}'_e \mathbf{f}_e dS \right\} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}'_e \mathbf{p}_{0e} \quad (n2)$$

e l'E.P.T. della struttura si scrive

$$V = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \mathbf{u}'_e \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e - \sum_{e=1}^N \mathbf{u}'_e (\mathbf{p}_{0e} + \mathbf{p}_{0e}) \quad (o)$$

V può essere espressa in funzione degli spostamenti liberi utilizzando le relazioni di connettività (11.55). Ricordando anche le (11.74), risulta

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}' \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e \mathbf{U} - \mathbf{U}' \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e (\mathbf{p}_{0e} + \mathbf{p}_{0e}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}' \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}' \mathbf{P} \quad (11.79)$$

La condizione di stazionarietà $\partial V / \partial \mathbf{U} = \mathbf{0}$ riconduce alla (11.75).

Se considerata da questo punto di vista, la formulazione agli spostamenti del problema elastico si configura come una particolare applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz, in cui l'approssimazione viene stabilita elemento per elemento. Se le funzioni di forma sono definite in modo che dall'eguaglianza dei valori nodali consegua la continuità degli spostamenti locali attraverso l'interfaccia tra i vari elementi e che l'imposizione delle condizioni al contorno in termini di spostamenti nodali implichi che esse risultino localmente soddisfatte su S_e , l'operazione di assemblaggio ricostruisce la congruenza. La (11.56a) rappresenta allora una valida approssimazione per il metodo di Rayleigh-Ritz, in cui il ruolo dei coefficienti A_n dello sviluppo approssimante (10.27) è interpretato dai parametri liberi \mathbf{U} . Le deformazioni (11.56b) che ne conseguono sono di regola discontinue tra elemento e elemento, ma ciò non contraddice la natura congruente del modello (si vedrà, peraltro, che la completa congruenza non è sempre necessaria per la convergenza del metodo). La Figura 11.18 illustra queste affermazioni per un esempio di trave di Bernoulli-Eulero; ovviamente, per teorie flessionali le condizioni di continuità e di vincolo coinvolgono anche le derivate prime.

Per un problema elastico, la formulazione energetica si presenta più sintetica e diretta che non l'approccio seguito nel paragrafo precedente e per questo motivo è spesso preferita nella letteratura. Va però ricordato che le relazioni generali riassunte in Tabella 11.2 conseguono unicamente dal modello cinematico e quindi valgono anche al di fuori del campo elastico, cui l'approccio energetico è invece confinato.

11.4 ELEMENTI DI ORDINE ELEVATO E ISOPARAMETRICI

11.4.1 CONDIZIONI DI CONVERGENZA

Nei paragrafi precedenti sono state derivate le proprietà di alcuni elementi finiti molto semplici, di fatto troppo semplici per poter fornire soluzioni accurate di problemi realistici se non ricorrendo a suddivisioni estremamente fitte. La procedura descritta è teoricamente applicabile anche a elementi di ordine più elevato (vale a dire, con un maggior numero di nodi), ma diviene rapidamente onerosa. Ancora più grave è il fatto che essa può dar luogo a comportamenti patologici in elementi con geometrie non regolari. Da queste geometrie, d'altra parte, non si può prescindere: è evidente, a esempio, che per schematizzare adeguatamente particolari strutture è necessario disporre di elementi con lati curvi.

Perché un elemento finito possa essere considerato valido, si richiede che all'infittirsi del reticolo la soluzione discreta converga a quella del problema continuo. Le condizioni di convergenza del metodo, che impongono alcune restrizioni al modello, vengono ora presentate, sia pure omettendo le dimostrazioni formali.

Una prima condizione riguarda il comportamento del singolo elemento. È richiesto che il campo di spostamenti sia continuo all'interno di ogni elemento (condizione peraltro automaticamente verificata da approssimazioni polinomiali) e sia grado di rappresentare tutti i *moti rigidi* dell'elemento isolato e tutti i *modi a deformazione costante*.

In altre parole, l'approssimazione degli spostamenti in una regione finita del dominio deve contenere tutti i contributi propri della cinematica dell'intorno infinitesimo di un punto che, come si è visto nel Capitolo 2, è costituita da traslazione e rotazione rigide oltre che da deformazione pura. È intuitivamente evidente che ciò debba risultare verificato quantomeno al limite dell'infittimento del reticolo, di modo che, col diminuire delle sue dimensioni, il comportamento dell'elemento finito possa identificarsi con quello dell'intorno.

Questa condizione pone un limite inferiore al numero di termini nelle approssimazioni polinomiali (11.29) per gli spostamenti, che devono includere il polinomio completo di grado pari al più elevato ordine di derivazione presente nel legame deformazioni-spostamenti. In mezzi continui, le deformazioni sono derivate prime degli spostamenti e il modello deve contenere tutti i termini lineari. Nel caso piano, l'approssimazione più semplice è quindi

$$s_x(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad s_y(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y \quad (11.80)$$

Le costanti a_1 e b_1 configurano traslazioni rigide. La rotazione rigida corrisponde a $b_2 = -a_3$, con gli altri coefficienti nulli. Le deformazioni risultano

$$\varepsilon_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} = a_2 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial s_y}{\partial y} = b_3 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} = a_3 + b_2$$

Tutte le componenti sono quindi presenti, sia pure limitatamente ai modi costanti. Nella (11.80) si riconosce il modello assunto per il triangolo a tre nodi; è ovviamente legittimo aggiungere ulteriori termini, purché indipendenti.

Nelle teorie flessionali le deformazioni generalizzate sono invece legate alle derivate seconde degli spostamenti e il polinomio deve essere completo al secondo grado. Per la trave di Bernoulli-Eulero e la piastra di Kirchhoff è quindi richiesto

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 \quad (11.81)$$

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (11.82)$$

I termini costanti e lineari rappresentano traslazione e rotazioni rigide, i rimanenti curvatures costanti.

È importante che moti rigidi e deformazioni costanti siano rappresentati indipendentemente da altri contributi. L'elemento lineare di trave di Timoshenko (vedi esempio 11.3a) non rispetta questa condizione. Dall'approssimazione polinomiale

$$v(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{\ell} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\ell} \left(b_1 + b_2 \frac{x}{\ell} \right)$$

si ottiene infatti, per le deformazioni

$$\chi(x) = -\frac{1}{\ell^2} b_2 \quad t(x) = \frac{1}{\ell} (a_2 - b_1) - \frac{x}{\ell^2} b_2$$

La curvatura flessionale costante è solo apparentemente presente, in quanto risulta proporzionale allo stesso coefficiente da cui dipende la variazione lineare dello scorrimento medio. Come si vedrà meglio nel capitolo successivo, questa dipendenza è all'origine di seri inconvenienti; in travi snelle, infatti, t risulta molto piccolo e ciò impedisce all'elemento di deformarsi anche flessionalmente.

Nel rispetto di questa prima condizione, la convergenza è assicurata se l'assemblaggio ricostruisce la congruenza, se cioè impone la continuità degli spostamenti (e, nei modelli flessionali, delle loro derivate) all'interfaccia tra elemento e elemento. Elementi siffatti sono detti *conformi*. La condizione implica che gli spostamenti (ed eventualmente le rotazioni) sul bordo dell'elemento dipendano solo dai valori nei nodi collocati sul bordo stesso. Eguagliando, in sede di assemblaggio, gli spostamenti nodali con quelli dell'elemento adiacente, si eguagliano allora anche gli spostamenti locali ovunque sul bordo.

Questo requisito può imporre polinomi di grado più elevato del minimo richiesto a rappresentare moti rigidi e deformazioni costanti. Per la trave di Bernoulli-Eulero, a esempio, occorre aggiungere alla (11.81) un termine cubico, in quanto tre soli gradi di libertà non consentono di imporre a entrambi gli estremi la continuità sia degli spostamenti che delle rotazioni.

Un buon elemento, inoltre, non deve presentare direzioni preferenziali. Questo requisito, detto di *invarianza* o di *isotropia geometrica*, non è a rigore strettamente necessario ma resta comunque altamente desiderabile. L'isotropia geometrica è una condizione puramente cinematica (non ha nulla a che vedere con il comportamento del materiale, che potrebbe anche essere anisotropo) e richiede che il modello di spostamento si mantenga inalterato se gli assi vengono ruotati. In un elemento piano, questo requisito comporta che le due componenti di spostamento siano approssimate con gli stessi polinomi e che questi siano invarianti nei confronti di uno scambio tra x e y .

Le condizioni sopra esposte sono *sufficienti* per la convergenza ma non tutte a rigore strettamente indispensabili. È essenziale che un elemento contenga tutti i modi a deformazione costante, ma i moti rigidi potrebbero anche essere recuperati solo al tendere a zero delle sue dimensioni. Alcuni elementi di guscio, pur convergenti, non incorporano tutti i moti rigidi finché si mantengono di dimensione finita.

Anche la conformità non è indispensabile, purché venga recuperata al limite dell'infittimento del reticolo. È stato a esempio proposto [13] un elemento triangolare di piastra di Kirchhoff basato sulla (11.82), i cui gradi di libertà sono gli spostamenti trasversali ai vertici e le rotazioni normali al bordo nella mezzaria dei tre lati (Figura 11.25a). La continuità delle rotazioni non è verificata se non in questi punti; essa è però recuperata al limite e l'elemento in effetti converge alla soluzione corretta. La (11.81) invece non basta da sola a assicurare la convergenza per la trave di Bernoulli-Eulero; sarebbe possibile formulare un modello su questa base esprimendo, a esempio, la $v(x)$ in funzione degli spostamenti trasversali ai due estremi e nel punto di mezzo dell'elemento (Figura 11.25b). È tuttavia impossibile imporre in sede di assemblaggio la continuità delle rotazioni e lo schema discreto si riconduce a catene di tratti tra loro incernierati (oltretutto labili) che infittiscono, anziché eliminare, le discontinuità avvicinando la situazione limite.

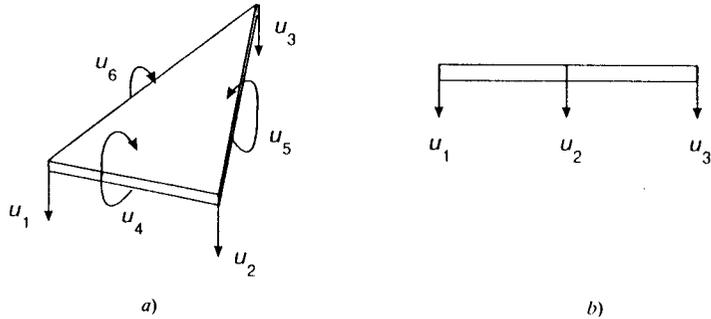


Figura 11.25

Un semplice metodo per assicurarsi numericamente della validità di un elemento finito è il cosiddetto *patch-test* [8]. Esso viene effettuato su di un assemblaggio (patch) di elementi che presenti almeno un nodo completamente interno, assoggettato a condizioni che implicano deformazioni costanti (Figura 11.26); l'elemento supera la prova se la soluzione fornisce localmente i valori esatti delle deformazioni. Il patch-test non è del tutto conclusivo. Una singola prova non è significativa in quanto è possibile che un determinato elemento la superi in certi arrangiamenti ma non in altri. D'altra parte, vi sono elementi che falliscono la prova e nondimeno convergono in determinate circostanze. È comunque generale convinzione, suffragata da un'estesa esperienza numerica, che un elemento finito debba superare il patch-test per essere considerato valido e che il fallimento della prova indichi un comportamento potenzialmente problematico.

Con l'eccezione di modelli di piastra, per elementi di geometria regolare è facile stabilire approssimazioni geometricamente invarianti che includano moti rigidi e deformazioni costanti e diano luogo a elementi conformi. Di fatto, questi requisiti risultano spontaneamente verificati, quantomeno in elementi semplici. Si consideri, a esempio, il rettangolo piano in Figura 11.8a. Riferendoci, per semplicità, a un elemento quadrato ($h = l$), l'approssimazione polinomiale per gli spostamenti si scrive

$$s_x = a_1 + a_2 \frac{x}{l} + a_3 \frac{y}{l} + a_4 \frac{xy}{l^2} \quad s_y = b_1 + b_2 \frac{x}{l} + b_3 \frac{y}{l} + b_4 \frac{xy}{l^2} \quad (a)$$

Essa è simmetrica e contiene le (11.80), a ognuna delle quali aggiunge un termine bilineare indipendente. Inoltre, le funzioni di forma (11.38) si annullano sui lati cui il nodo non appartiene (Figura 11.8b), i cui spostamenti dipendono quindi solo dai valori agli estremi. Ad esempio, sul lato $x = l$ essi risultano

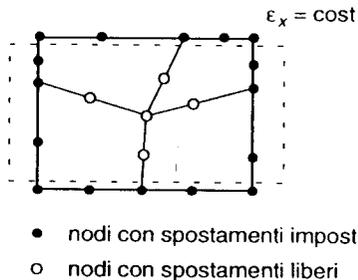


Figura 11.26

$$s_x(l, y) = \left(1 - \frac{y}{l}\right) u_3 + \frac{y}{l} u_5 \quad s_y(l, y) = \left(1 - \frac{y}{l}\right) u_4 + \frac{y}{l} u_6 \quad (b1, 2)$$

e sono funzione unicamente dai valori assunti nei nodi 2 e 3, agli estremi del lato.

Sorgono però problemi se la geometria viene distorta. Si consideri l'elemento di forma trapezoidale in Figura 11.27. L'approssimazione bilineare (a), che contiene moti rigidi e deformazioni costanti, è ancora valida; traducendo il modello in termini di spostamenti nodali, si ottiene

$$s_x = \left(1 - \frac{y}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{\mu l}\right) u_1 + \frac{x}{\mu l} \left(1 - \frac{y}{l}\right) u_3 + \frac{xy}{\mu l^2} u_5 + \frac{y}{l} \left(1 - \frac{x}{\mu l}\right) u_7$$

(e analoga per s_y). Sul lato inclinato, di equazione $x = \mu l - (\mu - 1)y$, risulta allora

$$s_x(x = \mu l - (\mu - 1)y, y) = \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{y}{l} \left(1 - \frac{y}{l}\right) u_1 + \left(1 - \frac{y}{l}\right) \left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{y}{l}\right) u_3 + \frac{y}{l} \left(\mu - (\mu - 1) \frac{y}{l}\right) u_5 - (\mu - 1) \frac{y}{l} \left(1 - \frac{y}{l}\right) u_7 \quad (c)$$

Per $\mu = 1$ (lato verticale) i contributi di u_1 e u_7 si annullano e la (c) si riconduce alla (b1). Se però il lato è effettivamente inclinato, i suoi spostamenti sono governati dai valori di tutti i nodi e l'assemblaggio non ne ricostruisce la continuità.

Sarebbe possibile definire le funzioni di forma in modo da assicurare la conformità. La N_j relativa al nodo j si annulla ovunque sui due lati opposti se la sua espressione è proporzionale al prodotto delle equazioni di questi lati. Per l'esempio di Figura 11.27 si scrive allora

$$N_1 = \alpha_1(y - l)[(\mu - 1)y + x - \mu l] = \left(1 - \frac{y}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{\mu l} - \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{y}{l}\right)$$

$$N_2 = \alpha_2 x(l - y) = \frac{x}{\mu l} \left(1 - \frac{y}{l}\right)$$

$$N_3 = \alpha_3 xy = \frac{xy}{l^2}$$

$$N_4 = \alpha_4 y[(\mu - 1)y + x - \mu l] = \mu \frac{y}{l} \left(1 - \frac{x}{\mu l} - \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{y}{l}\right) \quad (d)$$

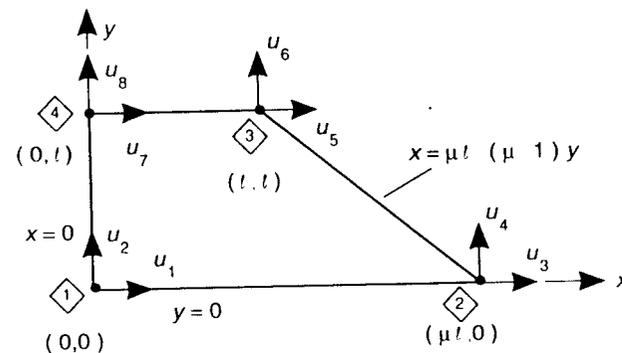


Figura 11.27

I valori dei coefficienti α_j sono stati fissati imponendo che risulti $N_j = 1$ nel nodo j . Il modello di spostamento

$$s_x = N_1 u_1 + N_2 u_3 + N_3 u_5 + N_4 u_7 \quad s_y = N_1 u_2 + N_2 u_4 + N_3 u_6 + N_4 u_8 \quad (e1, 2)$$

è adesso conforme. Esso però viola la prima condizione: è facile rendersi conto, a esempio, che le (e) non incorporano le traslazioni rigide; ponendo infatti nella (e1) $u_1 = u_3 = u_5 = u_7 = \bar{u}$ si ottiene

$$s_x = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \bar{u} = \left[1 + \frac{(1-\mu)^2}{\mu} \frac{y}{\ell} \left(1 - \frac{y}{\ell} \right) \right] \bar{u}$$

il che non configura una traslazione rigida in direzione x .

In conclusione, la presenza nel modello di tutti i moti rigidi e modi a deformazione costante, la conformità e l'invarianza geometrica sono requisiti che, anche se parzialmente rilassabili senza inficiare la validità dell'elemento, sono altamente auspicabili. Con l'eccezione degli elementi di piastra e di guscio, che richiedono di operare con una certa attenzione, essi possono tutti essere facilmente incorporati in elementi di forma regolare, quali rettangoli o triangoli piani e i loro equivalenti tridimensionali, ma non altrettanto nel caso di geometrie distorte. Questa difficoltà viene superata formulando l'elemento in opportune *coordinate intrinseche* e trasferendo poi il risultato in coordinate globali mediante la trasformazione detta *isoparametrica*.

11.4.2 COORDINATE INTRINSECHE

11.4.2.1 Definizione

Le *coordinate intrinseche* costituiscono un particolare riferimento locale che identifica la posizione di un punto nell'elemento mediante numeri adimensionali. Il riferimento intrinseco di un rettangolo piano è illustrato in Figura 11.28. Le coordinate variano tra -1 e 1 e sono legate al riferimento cartesiano (x, y) dalle relazioni

$$x = \frac{\ell}{2} (1 + \xi) \quad y = \frac{h}{2} (1 + \eta) \quad (11.83a, b)$$

$$\xi = 2 \frac{x}{\ell} - 1 \quad \eta = 2 \frac{y}{h} - 1 \quad (11.84a, b)$$

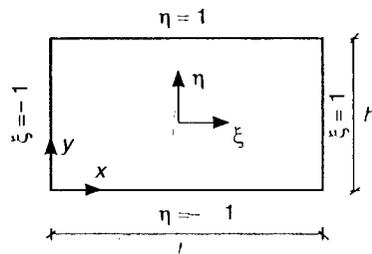


Figura 11.28

Per un elemento tridimensionale a forma di parallelepipedo rettangolo occorre ovviamente introdurre la terza coordinata ζ .

La Figura 11.29a illustra invece le coordinate intrinseche per triangoli piani. La posizione del punto P è identificata dal valore delle aree A_j dei triangoli che si ottengono congiungendo P con i tre vertici del triangolo originario (A_1 indica l'area del triangolo $P23$). Questi valori sono adimensionalizzati sull'area totale A dell'elemento ponendo

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (11.85)$$

Nel vertice 1 del triangolo è $L_1 = 1, L_2 = L_3 = 0$; il lato 23 ha equazione $L_1 = 0$; $L_1 = \text{cost}$ identifica una retta parallela a tale lato (Figura 11.29b); le coordinate del baricentro sono $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$. In ogni punto interno all'elemento è $0 \leq L_j \leq 1$.

Tra il riferimento intrinseco L_j e uno cartesiano ortogonale (x, y) sussistono le relazioni

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \quad (11.86a)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \quad (11.86b)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \quad (11.86c)$$

dove (x_j, y_j) sono le coordinate del vertice j . La (11.86c) consegue dalle (11.85) e sottolinea come solo due delle L_j siano indipendenti; deve infatti risultare $A_1 + A_2 + A_3 = A$.

Matematicamente, le (11.86) costituiscono la definizione delle coordinate intrinseche (nel caso specifico, dette anche *triangolari*) e le (11.85) ne rappresentano l'interpretazione geometrica. Risolvendo le (11.86) per le L_j si ottiene

$$L_1 = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \quad L_2 = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 x + c_2 y) \\ L_3 = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y) \quad (11.87a, c)$$

dove si è posto

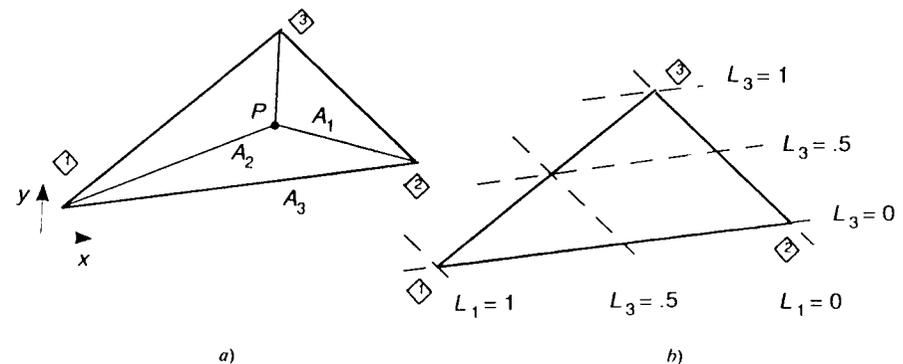


Figura 11.29

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_1 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad (\text{e analoghe}) \quad (11.88a)$$

e A è l'area del triangolo. Questa è a sua volta espressa in funzione delle coordinate dei nodi dalla relazione

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (11.88b)$$

Una definizione concettualmente analoga si applica per un volume a forma di tetraedro.

11.4.2.2 Funzioni di forma

In coordinate intrinseche ogni elemento presenta le stesse dimensioni: qualunque rettangolo è ricondotto a un quadrato di lato 2, così come qualunque triangolo assume area unitaria. Se riferite a queste coordinate, le funzioni di forma sono quindi indipendenti dalle effettive dimensioni dell'elemento.

Esse possono essere definite senza passare attraverso l'approssimazione polinomiale. Verranno considerati elementi piani che richiedono solo la continuità degli spostamenti (si escludono quindi al momento le teorie flessionali). Dalla definizione (11.32a) del modello e dal significato delle variabili nodali, che si identificano con i valori locali nei nodi, conseguè allora che la funzione di forma N_j assume valore unitario nel nodo j e si annulla in tutti gli altri nodi. Funzioni che presentano queste caratteristiche sono dette *interpolanti* e le funzioni di forma sono interpolazioni polinomiali sui nodi, come tali definibili in modo diretto. Inoltre, in elementi conformi N_j si annulla ovunque sui lati cui il nodo j non appartiene. L'interpolazione nodale consente di costruire le funzioni di forma per elementi di ordine via via più elevato, appartenenti a determinate famiglie che presentano caratteristiche comuni.

Su di un segmento $-1 \leq \xi \leq 1$, il più semplice polinomio interpolante su r punti, noto come *polinomio di Lagrange*, si scrive

$$P_j^r(\xi) = \prod_{k \neq j} \left(\frac{\xi_k - \xi}{\xi_k - \xi_j} \right) = \frac{(\xi_1 - \xi)(\xi_2 - \xi) \dots (\xi_{j-1} - \xi)(\xi_{j+1} - \xi) \dots}{(\xi_1 - \xi_j)(\xi_2 - \xi_j) \dots (\xi_{j-1} - \xi_j)(\xi_{j+1} - \xi_j) \dots} \quad (11.89)$$

dove il simbolo Π indica "prodotto". È immediato constatare che la (11.89) comporta $P_j^r(\xi_j) = 1$ e $P_j^r(\xi_k) = 0 \forall k \neq j$.

Supponendo che i punti di interpolazione comprendano gli estremi del segmento e che siano egualmente spaziatati, per $r = 1, 2, 3$ si ottiene, successivamente

$$r = 2: \quad \xi_1 = -1 \quad P_1^2 = \frac{1}{2} (1 - \xi), \quad \xi_2 = 1 \quad P_2^2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (11.90a)$$

$$\begin{aligned} r = 3: \quad \xi_1 = -1 \quad P_1^3 &= \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \\ \xi_2 = 0 \quad P_2^3 &= (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 \\ \xi_3 = 1 \quad P_3^3 &= \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \end{aligned} \quad (11.90b)$$

$$\begin{aligned} r = 4: \quad \xi_1 = -1 \quad P_1^4 &= -\frac{1}{16} (1 + 3\xi)(1 - 3\xi)(1 - \xi) \\ \xi_2 = -\frac{1}{3} \quad P_2^4 &= \frac{9}{16} (1 + \xi)(1 - 3\xi)(1 - \xi) \\ \xi_3 = \frac{1}{3} \quad P_3^4 &= \frac{9}{16} (1 + \xi)(1 + 3\xi)(1 - \xi) \\ \xi_4 = 1 \quad P_4^4 &= -\frac{1}{16} (1 + \xi)(1 + 3\xi)(1 - 3\xi) \end{aligned} \quad (11.90c)$$

Una combinazione lineare di tutti i polinomi di Lagrange su r punti costruisce un polinomio completo di grado $r-1$. Precisamente

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j P_j^r(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_r \xi^{r-1} \quad (11.91)$$

Per elementi monodimensionali e rettilinei a r nodi, le funzioni di forma si identificano direttamente con i polinomi di Lagrange. Si illustrano ora le principali famiglie di elementi piani.

A) *Rettangolo piano - famiglia Lagrangiana*. Per un elemento rettangolare i cui nodi si collocano a intervalli regolari su di una maglia $r \times s$ (Figura 11.30) le funzioni di forma si scrivono

$$N_j(\xi, \eta) = P_h^r(\xi) \cdot P_k^s(\eta) \quad h = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, s \quad (f)$$

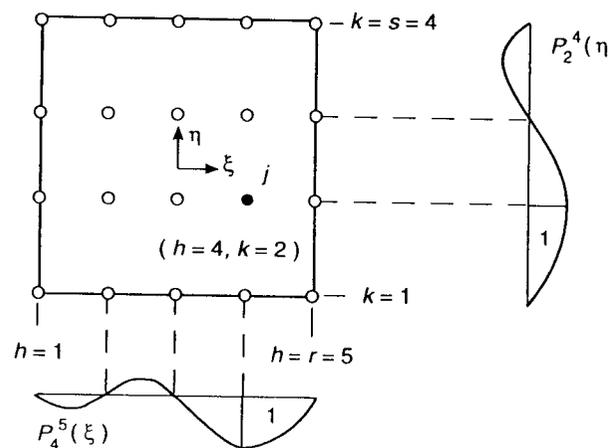


Figura 11.30

Dal momento che r e s non possono essere minori di due, la (f) contiene il polinomio completo di primo grado, rappresentativo dei moti rigidi e dei modi a deformazione costante. L'elemento è conforme, in quanto la (f) prevede che N_j si annulli sui lati cui il nodo j non appartiene (in particolare, le funzioni di forma relative ai nodi interni sono nulle ovunque sul contorno). La simmetria del comportamento nelle due direzioni è assicurata da una maglia quadrata ($r = s$). La (f) allora diviene

$$N_j(\xi, \eta) = P'_h(\xi) \cdot P'_s(\eta) \quad h, k = 1, \dots, r \quad (11.92)$$

Il più semplice elemento della famiglia presenta quattro nodi ai vertici. Per la (11.90a), le sue funzioni di forma risultano

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (11.93)$$

Si osservi che le (11.84) riconducono le (11.93) alle (11.38b), indipendentemente definite nel Paragrafo 11.2.1.

È facile in questo modo generare le funzioni di forma di validi elementi di qualunque ordine, con $m = r^2$ nodi (nel seguito, indicati con L_m , dove il simbolo L indica la famiglia Lagrangiana e m il numero di nodi). Come la (11.91) evidenzia, il polinomio approssimante è successivamente bilineare, biquadrato, bicubico,.... Esplicitamente

$$L_4 : s_i(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \quad (11.94a)$$

$$L_9 : s_i(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^2\eta^2 \quad (11.94b)$$

$$L_{16} : s_i(\xi, \eta) = \text{cubica completa} + a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi^2\eta^2 + a_{13}\xi\eta^3 + a_{14}\xi^3\eta^2 + a_{15}\xi^2\eta^3 + a_{16}\xi^3\eta^3 \quad (11.94c)$$

Se di ordine elevato, gli elementi Lagrangiani presentano un certo numero di gradi di libertà poco efficaci. Innanzi tutto, per $r \geq 3$ essi comportano nodi interni, che in sede di assemblaggio non si connettono con gli elementi adiacenti e governano modi deformativi confinati nell'elemento e quindi molto localizzati. Inoltre, la capacità di approssimare l'andamento effettivo degli spostamenti è associata al grado del polinomio completo presente nel modello e nelle (11.94) questo è ridotto in relazione al numero di termini; ad esempio la (11.94c), relativa all'elemento L_{16} , è completa solo fino al terzo grado pur contenendo 16 termini, uno più di quanto richiesto per rappresentare il polinomio completo di quarto grado.

Un'espressiva visualizzazione di questo aspetto è costituita dal *triangolo di Pascal* (Figura 11.31); la sua n -sima riga riporta i termini del polinomio omogeneo di grado $n - 1$. Quelli incorporati dagli elementi Lagrangiani si collocano al di sopra delle linee tratteggiate. Un elemento con $m = r^2$ nodi contiene solo il polinomio completo di grado $r - 1$, mentre ben $(r^2 - r)/2$ termini sono dedicati a contributi di ordine superiore che, non pervenendo a completare polinomi di grado più elevato, sono poco efficaci al fine di migliorare l'approssimazione.

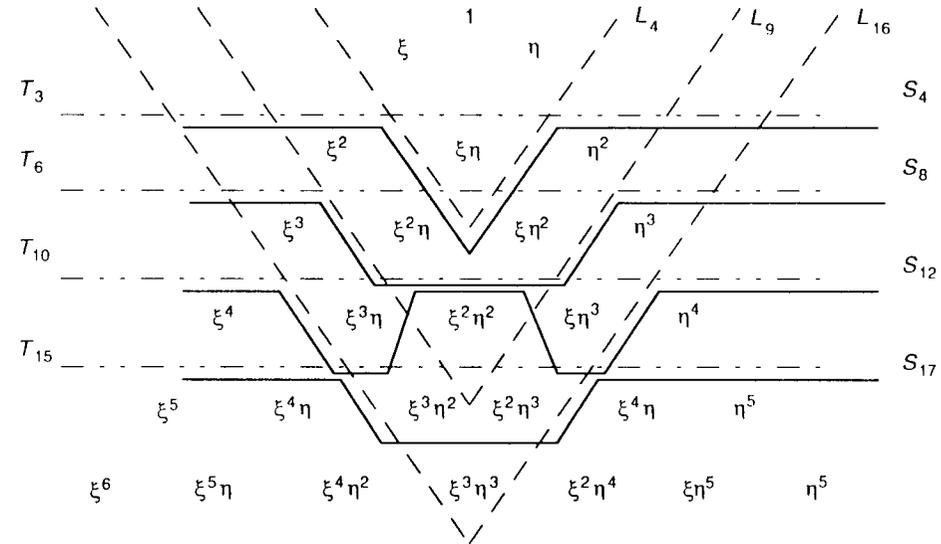


Figura 11.31

B) *Rettangolo piano - famiglia Serendipity*. Si possono formulare, anche se non in modo altrettanto sistematico, elementi rettangolari che riducono questi inconvenienti. Scelta la disposizione dei nodi, se possibile posizionati esclusivamente sul contorno, si assume per la funzione di forma $N_j(\xi)$ un'espressione proporzionale al prodotto delle equazioni di rette passanti per i nodi rimanenti, il che assicura il rispetto del requisito $N_j(\xi_k) = 0 \forall k \neq j$ e, se il prodotto comprende le equazioni dei lati che non passano per il nodo, la conformità dell'elemento. La condizione $N_j(\xi) = 1$ fissa il coefficiente di proporzionalità.

Questo modo di procedere non garantisce di per sé la validità dell'elemento. Occorre ricostruire lo sviluppo polinomiale cui le funzioni di forma corrispondono, onde assicurare la presenza del polinomio completo di grado più alto compatibile con il numero di nodi e l'isotropia geometrica del comportamento (un limitato numero di nodi interni può rendersi necessario per imporre il rispetto di questi requisiti). Gli elementi vanno quindi definiti uno alla volta per tentativi e il passaggio da un membro della famiglia al successivo non è automatico. Il nome allude infatti ai principi di *Serendip*, noti, a detta dell'intellettuale inglese del '700 Horace Walpole, per le loro scoperte essenzialmente dovute al caso [4]. Questi elementi saranno indicati con S_m , dove l'indice m si riferisce sempre al numero di nodi.

Il primo membro della famiglia è ancora l'elemento a quattro nodi. I lati opposti al nodo 1, di coordinate $\xi = -1, \eta = -1$, hanno equazioni $1 - \eta = 0$ e $1 - \xi = 0$ (Figura 11.28). Si assume pertanto

$$N_1(\xi, \eta) = \alpha(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (g)$$

La condizione $N_1(-1, -1) = 1$ implica $\alpha = 1/4$. È evidente che si riottengono le

(11.93). Dette (ξ_j, η_j) le coordinate del nodo j , queste si scrivono compattamente come segue

$$S_4 : N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_j)(1 + \eta\eta_j) \quad (11.95a)$$

L'elemento successivo presenta quattro ulteriori nodi nella mezzaria di ogni lato. Le rette il prodotto delle cui equazioni esprime le funzioni di forma sono indicate in Figura 11.32a per un nodo di vertice e in Figura 11.32b per uno di lato. Risulta

$$S_8 : \text{nodi di vertice: } N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_j)(1 + \eta\eta_j)(\xi\xi_j + \eta\eta_j - 1)$$

$$\text{nodi di lato: } \xi_j = 0 : N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_j)$$

$$\eta_j = 0 : N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi\xi_j)(1 - \eta^2) \quad (11.95b)$$

Si ottengono gli andamenti illustrati in Figura 11.32c, d, che prevedono variazioni paraboliche sui lati.

Le disposizioni dei nodi dei due successivi elementi della famiglia sono illustrate in Figura 11.33. I termini considerati dai loro sviluppi polinomiali si collocano al di sopra delle linee a tratto pieno in Figura 11.31 e comprendono, in successione, polinomi completi di primo (S_4), secondo (S_8), terzo (S_{12}) e quarto grado (S_{17}), con l'aggiunta di

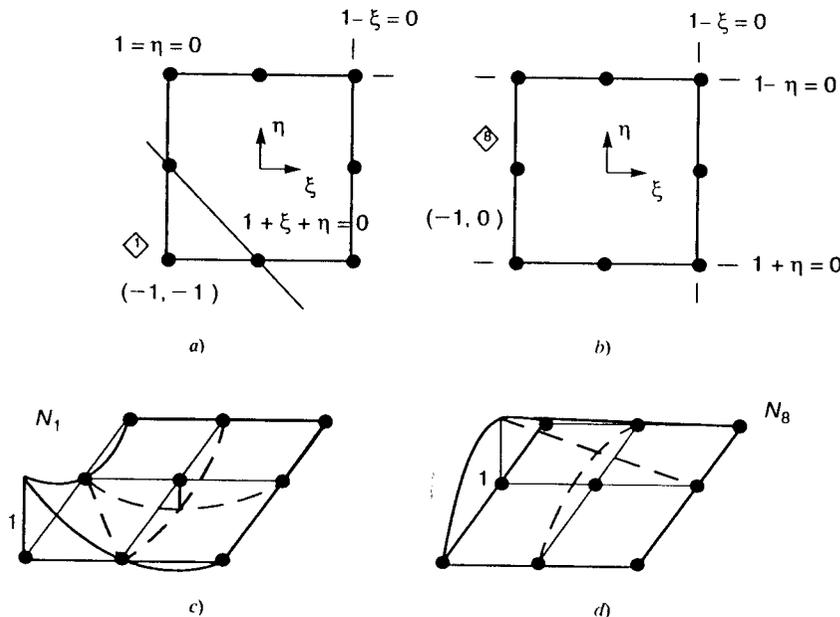


Figura 11.32

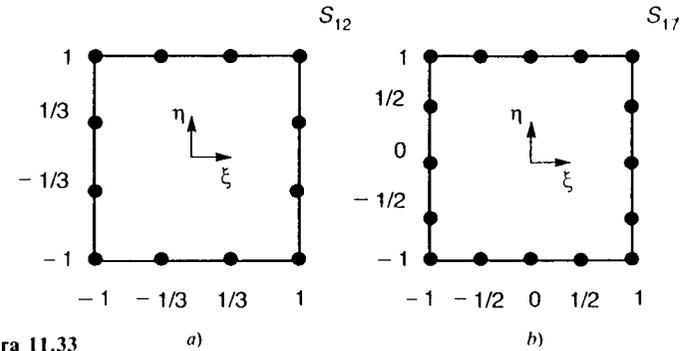


Figura 11.33

un limitato numero di termini di ordine superiore. L'ultimo elemento richiede un nodo interno per completare il polinomio e conservare la simmetria nelle due direzioni.

C) *Triangolo piano*. Il procedimento è applicabile anche per elementi triangolari. Come la Figura 11.29b illustra, l'equazione del lato opposto al vertice j è $L_j = 0$, mentre $L_j = \text{cost}$ è quella di una retta parallela a tale lato. Le funzioni di forma si generano moltiplicando tra loro equazioni di questo tipo.

La Figura 11.34 illustra i primi tre membri della famiglia, rispettivamente i triangoli a tre (T_3), sei (T_6) e dieci (T_{10}) nodi. Nel primo caso i nodi coincidono con i vertici e la funzione di forma relativa a ognuno di essi è semplicemente l'equazione del lato opposto (Figura 11.34a). Dal momento che è $L_j = 1$ nel vertice j , risulta

$$T_3 : N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3 \quad (11.96a)$$

Il secondo elemento presenta due tipi di nodi, di vertice e di lato. Le funzioni di forma si ottengono dal prodotto, nel primo caso delle equazioni delle due rette parallele $L_j = 0$ e $L_j = .5 = 0$, nel secondo di quelle dei lati cui il nodo non appartiene (Figura 11.34b). Si ottiene

$$T_6 : \text{nodi di vertice: } N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \quad (\text{e analoghe})$$

$$\text{nodi di lato: } N_4 = 4L_1L_2 \quad (\text{e analoghe}) \quad (11.96b)$$

Al solito, il coefficiente moltiplicativo è fissato imponendo che la funzione di forma assuma valore unitario nel nodo. Procedendo in modo analogo si ottiene per il terzo membro della famiglia (Figura 11.34c)

$$T_{10}: \text{nodi di vertice: } N_1 = \frac{1}{2} L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \quad (\text{e analoghe})$$

$$\text{nodi di lato: } N_4 = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_1 - 1) \quad (\text{e analoghe})$$

$$\text{nodo centrale: } N_{10} = 27L_1L_2L_3 \quad (11.96c)$$

L'elemento T_{10} richiede la presenza di un nodo interno perché uno sviluppo polinomiale di soli nove termini non può essere contemporaneamente completo al secondo grado e

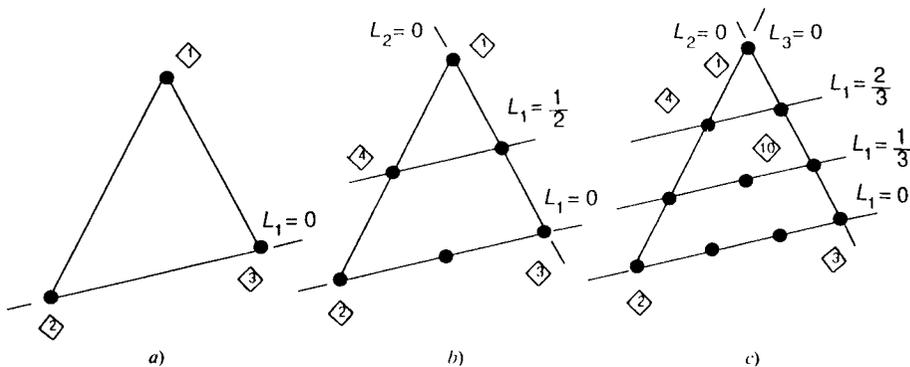


Figura 11.34

invariante rispetto a uno scambio tra x e y . La sua introduzione consente di completare il polinomio cubico. In effetti, un'importante proprietà di questa famiglia è che il polinomio approssimante è sempre esattamente completo (i termini considerati sono quelli al di sopra delle linee a tratto-punto in Figura 11.31). Ogni elemento viene generato "orlando" quello di ordine immediatamente inferiore con un nuovo lato che presenta un nodo in più. I nodi di vertice sul vecchio lato divengono nodi di lato e quelli di lato nodi interni (l'elemento T_{15} , a esempio, richiede tre nodi interni).

Quanto detto per elementi piani si applica con ovvie modifiche ai loro equivalenti tridimensionali. Alcune differenze sorgono invece nel caso delle teorie flessionali, in quanto le variabili nodali non si limitano ai soli spostamenti ma includono anche le rotazioni. Ciò impedisce di trasferire le funzioni di forma precedenti in questo ambito. Ad esempio, per l'elemento flessionale di trave in Figura 11.9 occorre definire in ognuno dei nodi due funzioni di forma, relative ai gradi di libertà spostamento e rotazione. La prima vale uno nel nodo, zero nell'altro nodo e le sue derivate si annullano in entrambi; la seconda ha invece valore nullo e derivata unitaria nel nodo cui si riferisce e si annulla con la derivata nell'altro (Figura 11.10).

Sul dominio monodimensionale $-1 \leq \xi \leq 1$ il modello più semplice risulta

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3) & N_2(\xi) &= \frac{1}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) & N_4(\xi) &= \frac{1}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (11.97)$$

espressioni che si riconducono alle (11.41a) sostituendo la (11.84a) per ξ .

L'estensione al caso bidimensionale non è immediata. È stato proposto un elemento rettangolare di piastra di Kirchhoff le cui funzioni di forma sono i prodotti delle (11.97) nelle due direzioni. L'elemento ha 12 gradi di libertà (e non 16) in quanto gli spostamenti trasversali si identificano ai vertici. Lo sviluppo polinomiale mostra tuttavia che il termine $\xi\eta$ non è indipendente da altri contributi; l'elemento quindi non può essere considerato valido perché incapace di rappresentare curvature torsionali costanti.

Elementi flessionali di piastra vanno formulati caso per caso. Ne sono stati sviluppati molti, sia rettangolari che triangolari. In generale la piena conformità, che richiede anche alle derivate normali di essere continue attraverso l'interfaccia tra due elementi adiacenti, comporta un ordine elevato. Esistono peraltro elementi semplici che, anche se non conformi, danno buoni risultati.

11.4.3. ELEMENTI ISOPARAMETRICI

La discussione del caso di Figura 11.27 ha messo in luce le difficoltà connesse con la formulazione diretta di validi elementi finiti di geometria non regolare. Queste vengono superate formulando l'elemento in coordinate intrinseche (il cosiddetto *elemento genitore*) e riportandolo alla geometria effettiva mediante una corrispondenza biunivoca del tipo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (11.98a, b)$$

La corrispondenza (11.98a) può essere convenientemente stabilita ponendo

$$x(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)X_1 + N_2(\xi, \eta)X_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)X_r \quad (h1)$$

$$y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)Y_1 + N_2(\xi, \eta)Y_2 + \dots + N_r(\xi, \eta)Y_r \quad (h1)$$

dove $N_j(\xi, \eta)$ sono le funzioni di forma dell'elemento genitore, come definite nel paragrafo precedente, e (X_j, Y_j) le coordinate dei nodi nell'elemento effettivo. In forma compatta le (h) si scrivono

$$\begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\xi, \eta) [\mathbf{X}_n \ \mathbf{Y}_n] \quad (11.99a)$$

dove si è posto

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}_n = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Y}_n = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \end{Bmatrix} \quad (11.99b, c)$$

Le (11.99) definiscono la posizione \mathbf{x} di un punto nell'elemento in funzione delle coordinate dei suoi nodi. Si osservi che il ruolo di riferimento locale è interpretato dalle coordinate intrinseche, per cui gli assi cartesiani (x, y) possono essere fatti coincidere con quelli del riferimento globale della struttura. La geometria dell'elemento genitore è distorta allo stesso ordine con cui gli spostamenti sono rappresentati al suo interno. La Figura 11.35a mostra il risultato dell'operazione per un genitore $S_4 = L_4$: le sue funzioni di forma (11.93) variano linearmente sui lati e le (11.99) possono quindi trasformarlo in un quadrilatero i cui lati si mantengono rettilinei. Elementi con lati curvi possono essere prodotti a partire da genitori di ordine più elevato. Ad esempio, le funzioni di forma dell'elemento S_8 variano quadraticamente sui lati e le (11.99) permettono di trasformarlo in un quadrilatero i cui lati si atteggiano secondo parabole (Figura 11.35b; in entrambi i casi, sulle linee tratteggiate una delle coordinate intrinseche assume valore costante).

Le deformazioni sono derivate degli spostamenti rispetto alle coordinate effettive (x, y) . La matrice \mathbf{B} che ne governa l'andamento attraverso la (11.32b) è infatti

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial x & 0 & \partial N_2 / \partial x & 0 & \dots \\ 0 & \partial N_1 / \partial y & 0 & \partial N_2 / \partial y & \dots \\ \partial N_1 / \partial y & \partial N_1 / \partial x & \partial N_2 / \partial y & \partial N_2 / \partial x & \dots \end{bmatrix} \quad (11.100)$$

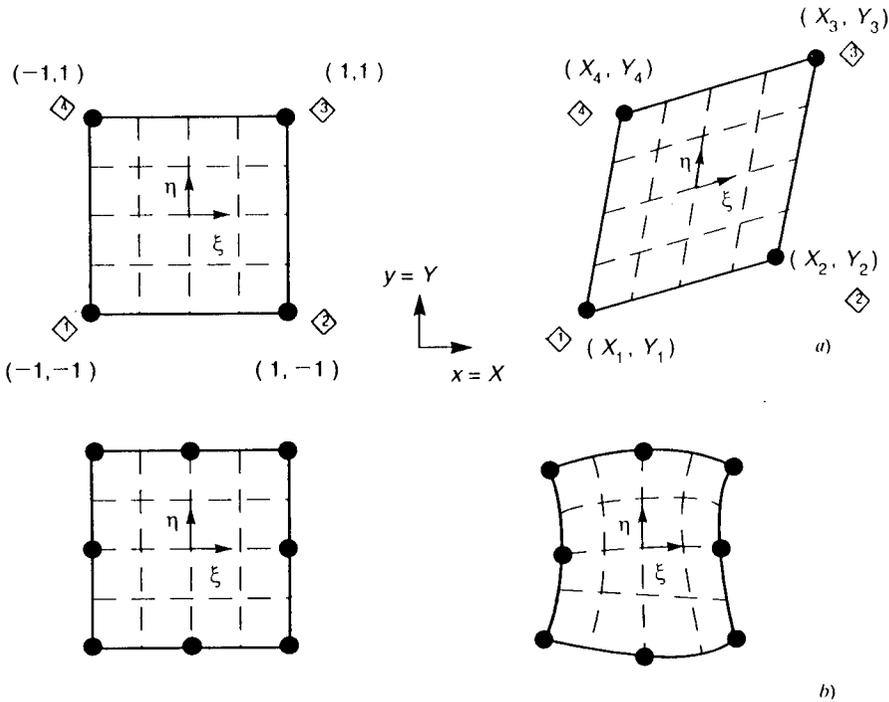


Figura 11.35

Per risalire dalle $N_j(\xi, \eta)$ alle $\partial N_j/\partial x, \partial N_j/\partial y$ occorrerebbe disporre della trasformazione inversa della (11.99), in generale non esprimibile in forma chiusa. La regola di derivazione di funzioni di funzione permette tuttavia di scrivere

$$\frac{\partial N_j}{\partial \xi} = \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_j}{\partial \eta} = \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (i)$$

o, compattamente

$$\begin{bmatrix} \partial N_j/\partial \xi \\ \partial N_j/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial N_j/\partial x \\ \partial N_j/\partial y \end{bmatrix} \quad (11.101)$$

dove

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix} \quad (11.102)$$

è la *matrice Jacobiana* della trasformazione. Si osservi che per le (11.99) si può scrivere

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} X_j \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} X_j$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} Y_j \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} Y_j \quad (j)$$

per cui la (11.102) si esprime

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial \xi & \partial N_2/\partial \xi & \dots \\ \partial N_1/\partial \eta & \partial N_2/\partial \eta & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (11.103)$$

La matrice \mathbf{J} può essere pertanto calcolata a partire dalle (11.99) e, se la trasformazione non è singolare, risulta invertibile. Dalla (11.101) si ottiene quindi

$$\begin{bmatrix} \partial N_j/\partial x \\ \partial N_j/\partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_j/\partial \xi \\ \partial N_j/\partial \eta \end{bmatrix} \quad (11.104)$$

il che permette di esprimere le componenti della matrice \mathbf{B} , come definita dalla (11.100).

Il calcolo delle proprietà dell'elemento richiede integrazioni da effettuarsi sul dominio effettivo. La matrice di rigidità, ad esempio, si esprime

$$\mathbf{k} = \int_A t \mathbf{B}'(\mathbf{x}) d\mathbf{B}(\mathbf{x}) dA \quad (11.105)$$

dove A è l'area dell'elemento effettivo e t il suo spessore. È peraltro noto dall'Analisi Matematica che vale la relazione

$$\int_A \mathbf{G}(\mathbf{x}) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J \hat{\mathbf{G}}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (11.106)$$

dove

$$J = \det(\mathbf{J}) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (11.107)$$

è il determinante della matrice Jacobiana (11.102) (spesso indicato semplicemente come lo *Jacobiano*) e

$$\hat{\mathbf{G}}(\xi, \eta) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \quad (11.108a)$$

Ai fini del calcolo della matrice di rigidità (11.105), ovviamente si assume

$$\hat{\mathbf{G}}(\xi, \eta) = t \hat{\mathbf{B}}'(\xi, \eta) d\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta) \quad (11.108b)$$

con $\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta)$ definita a partire dalla (11.104). Se lo spessore t o le proprietà elastiche del materiale sono funzione del punto, vanno anch'esse tradotte in coordinate intrinseche mediante le (11.99). Si osservi che dalla (11.106) si ottiene, in particolare

$$A = \int_A dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J d\xi d\eta \quad (11.109)$$

L'integrale dello Jacobiano è quindi pari all'area dell'elemento effettivo.

Il procedimento è concettualmente semplice, ma non lo è altrettanto l'espressione analitica della matrice $\mathbf{G}(\xi, \eta)$. L'integrazione in forma chiusa della (106) di fatto non è praticabile ed è necessario ricorrere a metodi di integrazione numerica. Questi, peraltro,

si rivelano operativamente molto semplici, non richiedendo neppure di definire esplicitamente la matrice integranda, e si applicano senza differenze per qualsiasi elemento, anche non omogeneo o di spessore variabile.

Si sviluppano ora, a scopo puramente illustrativo, i dettagli delle operazioni che consentirebbero di esplicitare la (11.108b) per un elemento piano. Si ponga, per semplicità di scrittura

$$\mathbf{N}_{,x} = \{ \dots \partial N_j / \partial x \dots \}^t \quad \mathbf{N}_{,y} = \{ \dots \partial N_j / \partial y \dots \}^t \quad (11.110a)$$

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \{ \dots \partial N_j / \partial \xi \dots \}^t \quad \mathbf{N}_{,\eta} = \{ \dots \partial N_j / \partial \eta \dots \}^t \quad (11.110b)$$

Se i gradi di libertà vengono rinumerati in modo che in \mathbf{u} appaiano per prime le componenti orizzontali, l'espressione (11.100) di \mathbf{B} diviene, ricordando le (11.110a)

$$\mathbf{B}(x, y) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_{,x} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{N}'_{,y} \\ \mathbf{N}'_{,y} & \mathbf{N}'_{,x} \end{bmatrix} \quad (11.111)$$

D'altra parte, per le (11.110b) e (11.99c), la (11.103) si scrive

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_{,\xi} \\ \mathbf{N}'_{,\eta} \end{bmatrix} [\mathbf{X}_n \ \mathbf{Y}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_{,\xi} \mathbf{X}_n & \mathbf{N}'_{,\xi} \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{N}'_{,\eta} \mathbf{X}_n & \mathbf{N}'_{,\eta} \mathbf{Y}_n \end{bmatrix} \quad (11.112a)$$

Nel caso piano, \mathbf{J} è una matrice 2×2 , facilmente invertibile in forma chiusa. Introducendo la matrice emisimmetrica

$$\mathbf{n} = \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{N}'_{,\xi} - \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{N}'_{,\eta} = -\mathbf{n}' \quad (11.112b)$$

il determinante della (11.112a) si scrive

$$J = \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \mathbf{X}_n = -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \mathbf{Y}_n \quad (11.112c)$$

e l'inversa si esplicita come segue

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{N}_{,\eta} & -\mathbf{Y}'_n \mathbf{N}_{,\xi} \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{N}_{,\eta} & \mathbf{X}'_n \mathbf{N}_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (11.112d)$$

La (11.104) quindi diviene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}'_{,x} \\ \mathbf{N}'_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{N}_{,\eta} & -\mathbf{Y}'_n \mathbf{N}_{,\xi} \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{N}_{,\eta} & \mathbf{X}'_n \mathbf{N}_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_{,\xi} \\ \mathbf{N}'_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (11.113)$$

con \mathbf{n} e J definiti dalle (11.112b, c). Sostituendo nella (11.111) risulta

$$\widehat{\mathbf{B}}(\xi, \eta) = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} \\ -\mathbf{X}'_n \mathbf{n} & \mathbf{Y}'_n \mathbf{n} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \mathbf{B}_*(\xi, \eta) \quad (11.114)$$

È questa un'espressione esplicita della matrice $\widehat{\mathbf{B}}(\xi, \eta)$, da cui si può risalire alla matrice di rigidità attraverso le (11.109) e (11.106). L'integrando di quest'ultima relazione risulta

$$J \widehat{\mathbf{G}}(\xi, \eta) = J t \widehat{\mathbf{B}}'(\xi, \eta) d \widehat{\mathbf{B}}(\xi, \eta) = \frac{1}{J} t \mathbf{B}'_*(\xi, \eta) d \mathbf{B}_*(\xi, \eta) \quad (11.115)$$

Le componenti di \mathbf{B}_* sono polinomi, ma lo è anche l'espressione (11.112c) di J , che nella (11.115) appare al denominatore. Se d e t sono costanti, l'integrazione in forma chiusa è a rigore possibile, ma costituisce una prospettiva quantomeno poco allettante.

Con riferimento a un genitore a quattro nodi, differenziando le (11.93) si ottiene

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \frac{1}{4} \{ -(1-\eta) \quad (1-\eta) \quad (1+\eta) \quad -(1+\eta) \}^t$$

$$\mathbf{N}_{,\eta} = \frac{1}{4} \{ -(1-\xi) \quad -(1+\xi) \quad (1+\xi) \quad (1-\xi) \}^t \quad (11.116a)$$

e la matrice (11.112b) risulta

$$\mathbf{n} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -(1-\eta) & (\xi-\eta) & (1-\xi) \\ (1-\eta) & 0 & -(1+\xi) & (\xi+\eta) \\ -(\xi-\eta) & (1+\xi) & 0 & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(\xi+\eta) & (1+\eta) & 0 \end{bmatrix} \quad (11.116b)$$

Se l'elemento effettivo è il rettangolo di Figura 11.28, le coordinate dei nodi risultano

$$\mathbf{X}'_n = \ell \{ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \} \quad \mathbf{Y}'_n = h \{ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \} \quad (k)$$

Le (11.99) si riconducono allora alle (11.83). La matrice Jacobiana è adesso costante e vale

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \ell/2 & 0 \\ 0 & h/2 \end{bmatrix} \quad (l)$$

Il suo determinante $J = \ell h/4$ è pari a un quarto dell'area dell'elemento. Le (11.104) sono ora

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2}{\ell} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2}{h} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \quad (l2)$$

espressioni direttamente ottenibili dalle (11.84), che rappresentano la trasformazione inversa della (11.99), in questo caso immediata.

Questo, tuttavia, è solo un caso particolare. Con riferimento all'elemento trapezoidale in Figura 11.27, si ha per le coordinate dei nodi

$$\mathbf{X}'_n = \ell \{ 0 \quad \mu \quad 1 \quad 0 \} \quad \mathbf{Y}'_n = \ell \{ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \} \quad (m)$$

Dalle (11.112c), (11.113) e (11.114) si ottiene allora

$$J = \frac{\ell^2}{8} [(1+\mu) + \eta(1-\mu)] \quad (n)$$

$$\mathbf{Y}'_n \mathbf{n} = \frac{\ell}{8} \{ -(1-\eta) \quad (1-\eta) \quad (1+\eta) \quad -(1+\eta) \} \quad (o1)$$

$$-\mathbf{X}'_n \mathbf{n} = \frac{\ell}{8} \{ [-(1-\xi) \quad -(1+\xi) \quad (1+\xi) \quad (1-\xi)] + \\ + (1-\mu) [(1-\eta) \quad 0 \quad -(1+\xi) \quad (\xi+\eta)] \} \quad (o2)$$

Sostituendo nelle (11.113) e confrontando con le (11.116a) si evince

$$\mathbf{N}_{,x} = \frac{1}{J} (\mathbf{Y}'_n \mathbf{n})' = \frac{4}{\ell[(1+\mu) + \eta(1-\mu)]} \mathbf{N}_{,x}$$

$$\mathbf{N}_{,y} = -\frac{1}{J} (\mathbf{X}'_n \mathbf{n})' = \frac{4}{\ell[(1+\mu) + \eta(1-\mu)]} \left\{ \mathbf{N}_{,\eta} + \frac{1-\mu}{4} \begin{pmatrix} (1-\eta) \\ 0 \\ -(1+\xi) \\ (\xi+\eta) \end{pmatrix} \right\}$$

Si lascia come esercizio lo scrivere per esteso l'espressione (11.114) di $\hat{\mathbf{B}}$ e quella della matrice (11.115), il cui integrale produce la rigidità elastica dell'elemento.

Le (11.99) definiscono la trasformazione detta *isoparametrica*. La sua principale attrattiva risiede nel fatto che essa conserva le caratteristiche dell'elemento genitore, almeno quelle che ne assicurano la validità. In particolare, è stato dimostrato [8] che si conservano la continuità degli spostamenti all'interno dell'elemento, la capacità di rappresentare moti rigidi e deformazioni costanti e la conformità (tali caratteristiche devono ovviamente essere presenti nell'elemento genitore). Non mantengono la stessa natura i modi che controllano deformazioni variabili col punto, ma ciò non è richiesto dalle condizioni di convergenza. Un valido elemento genitore si traduce quindi in un valido elemento isoparametrico.

La formulazione permette di generare elementi di qualunque forma distorcendo la geometria dell'elemento genitore al grado permesso dalle sue funzioni di forma. Esistono in realtà alcune limitazioni all'entità della distorsione geometrica che può essere introdotta. La corrispondenza (11.99) deve essere ovunque biunivoca e questa condizione può risultare violata per geometrie molto contorte. Anche se ciò non si verifica, una distorsione eccessiva può essere fonte di cattivo comportamento dell'elemento.

Il termine *isoparametrico* indica che la trasformazione geometrica e il modello di spostamento sono controllati con lo stesso numero di parametri. È possibile formulare elementi *iperparametrici*, in cui la trasformazione geometrica è di grado più elevato che non il modello di spostamento. Ciò può essere realizzato, a esempio, utilizzando nelle (11.99) le funzioni di forma dell'elemento S_8 e applicando la trasformazione all'elemento S_4 , che viene così a essere distorto in un quadrilatero con lati curvi. Questo procedimento non conserva a priori la validità dell'elemento e la sua applicazione è limitata a alcuni casi particolari. Si possono anche formulare elementi *ipoparametrici*, che vincolano la geometria più di quanto concesso dalle funzioni di forma. Essi, tuttavia, non richiedono una trattazione apposita; imponendo, a esempio, che i tre nodi su ogni lato dell'elemento S siano allineati tra loro, la formulazione isoparametrica lo trasforma infatti in un quadrilatero con lati rettilinei.

Quanto detto per elementi genitori di forma quadrata si applica anche per elementi triangolari. Occorre tuttavia tener presente che solo due delle coordinate intrinseche L_i sono indipendenti, sussistendo tra di esse il legame (11.86c). Si può peraltro porre, ad esempio

$$L_1 = \xi \quad L_2 = \eta \quad L_3 = 1 - \xi - \eta \quad (11.117a)$$

e quindi scrivere, con riferimento a una qualunque funzione $f(L_i)$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial L_1} - \frac{\partial f}{\partial L_3} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial L_2} - \frac{\partial f}{\partial L_3} \quad (11.117b)$$

La matrice Jacobiana (102) diviene quindi

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial L_1 - \partial x / \partial L_3 & \partial y / \partial L_1 - \partial y / \partial L_3 \\ \partial x / \partial L_2 - \partial x / \partial L_3 & \partial y / \partial L_2 - \partial y / \partial L_3 \end{bmatrix} \quad (11.118a)$$

e in luogo della (11.104) si ha adesso

$$\begin{Bmatrix} \partial N_j / \partial x \\ \partial N_j / \partial y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_j / \partial L_1 - \partial N_j / \partial L_3 \\ \partial N_j / \partial L_2 - \partial N_j / \partial L_3 \end{Bmatrix} \quad (11.118b)$$

Una seconda differenza riguarda il dominio di integrazione, ora triangolare. La (11.106) andrebbe sostituita dalla relazione

$$\int_A \mathbf{G}(\mathbf{x}) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{G}(L_1, L_2, L_3 = 1 - L_1 - L_2) dL_1 dL_2 \quad (11.119)$$

Anche questa espressione deve essere integrata numericamente. A questo scopo sono disponibili formule che operano direttamente in coordinate triangolari.

La (11.106) (o la (11.119), per genitori triangolari) consente anche il calcolo dei vettori delle forze nodali equivalenti a deformazioni o sforzi iniziali e a forze di volume. In luogo della (11.108b) si ha ora

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = t[\mathbf{B}'(\mathbf{d}\vartheta - \zeta) + \mathbf{N}'\mathbf{F}] \quad (11.120)$$

Concettualmente simile ma operativamente più delicato è il calcolo delle forze nodali equivalenti a trazioni superficiali. Per i dettagli, si rimanda alla letteratura specialistica [7]. L'estensione al caso tridimensionale richiede solo ovvie modifiche.

11.4.4 INTEGRAZIONE NUMERICA

Nelle formulazioni a elementi finiti, la strategia di integrazione numerica di gran lunga più usata è quella nota come quadratura di Gauss. Un integrale sul dominio monodimensionale $-1 \leq \xi \leq 1$ viene approssimato dalla sommatoria

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots = \sum_{r=1}^G w_r f(\xi_r) \quad (11.121)$$

dove ξ_r sono le coordinate di opportuni punti nell'intervallo (in gergo *punti di Gauss*) e w_r coefficienti moltiplicativi, o *pesi*. I primi si identificano con gli zeri del polinomio di Legendre di grado G (da cui il nome di *formula di Gauss-Legendre* con cui è nota la (11.121)) e i pesi relativi a ognuno di essi sono gli integrali dei polinomi interpolanti sui punti di Gauss [14]. Precisamente

$$w_r = \int_{-1}^1 P_r^G(\xi) d\xi \quad P_r^G(\xi) = \prod_{h \neq r} \frac{(\xi_h - \xi)}{(\xi_h - \xi_r)} \quad (11.122a, b)$$

La formula integra esattamente un polinomio di grado $2G-1$. Testi sia di calcolo numerico che specificamente dedicati agli elementi finiti riportano le coordinate dei punti di Gauss e i relativi pesi per G anche molto elevati. Per $G \leq 5$, essi sono elencati in Tabella 11.3 a dieci cifre significative.

Tabella 11.3

G	ξ_0	w_0
1	.0	2.0
2	$\pm .57735\ 02692$	1.0
3	$\pm .77459\ 66692$.0	.55555 55556 .88888 88889
4	$\pm .86113\ 63116$ $\pm .33998\ 10436$.34785 48451 .65214 51549
5	$\pm .90617\ 98459$ $\pm .53846\ 93101$.0	.23692 68851 .47862 86705 .56888 88889

Il significato dell'approssimazione può essere colto considerando il caso $G = 1$. Il polinomio di Legendre di grado uno è $L_1(\xi) = \xi$. E allora $\xi_1 = 0$ e $P_1^1 = 1$, da cui si ottiene, per la (11.122a), $w_1 = 2$. La (11.121) diviene allora

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2 \cdot f(0) \tag{p}$$

L'integrale è sostituito dal valore di f nel punto medio dell'intervallo, moltiplicato per la lunghezza dell'intervallo stesso. Esso è esattamente valutato se f è funzione lineare di ξ .

La (11.121) generalizza la (p) e consente di migliorare l'approssimazione incrementando il numero di punti. Il polinomio di Legendre di secondo grado ($L_2 = 1 - 3\xi^2$) si annulla per $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$ e $\xi_2 = 1/\sqrt{3}$. Le (11.122b) risultano allora

$$P_1^2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}\xi) \quad P_2^2 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}\xi) \tag{q}$$

e dalla (11.122a) si ottiene $w_1 = w_2 = 1$. Con riferimento al generico polinomio di terzo grado $f(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + a_4\xi^3$, la (11.121) fornisce

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 w_k f(\xi_k) &= 1 \left(a_1 - \frac{a_2}{\sqrt{3}} + \frac{a_3}{3} - \frac{a_4}{3\sqrt{3}} \right) + 1 \left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{3}} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{3\sqrt{3}} \right) = \\ &= 2a_1 + \frac{2}{3} a_3 = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \end{aligned} \tag{r}$$

vale a dire il valore esatto dell'integrale, come asserito. Per $G = 3$ è invece $L_3(\xi) = \xi(\xi^2 - .6)$ e risulta $\xi_1 = -\sqrt{.6}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \sqrt{.6}$ e $w_1 = w_3 = 5/9$, $w_2 = 8/9$. Operando con questi valori, la (121) calcola esattamente l'integrale di un polinomio di quinto grado.

Su di un dominio quadrato $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, l'integrale della funzione $f(\xi, \eta)$ si calcola come segue

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[\sum_{g=1}^G w_g f(\xi_g, \eta) \right] d\eta = \sum_{h=1}^H w_h \left[\sum_{g=1}^G w_g f(\xi_g, \eta_h) \right] =$$

$$= \sum_{h=1}^H \sum_{g=1}^G w_h w_g f(\xi_g, \eta_h) \tag{11.123}$$

Di regola, si assume $G = H$, il che assicura uguale precisione nelle due direzioni. In tal caso, la (11.123) integra esattamente un polinomio di grado $2G - 1$ in ciascuna direzione.

Questa relazione è direttamente applicabile se l'elemento genitore è quadrato. Nel caso di elementi triangolari, occorre tener conto del fatto che i limiti di integrazione sono essi stessi funzioni del punto. Sono peraltro state sviluppate formule di quadratura che consentono di integrare direttamente su di un dominio triangolare di area unitaria una funzione $f(L_1, L_2, L_3)$. Esse presentano struttura analoga alla (121); precisamente

$$\int_{\hat{A}=1} f(L_1, L_2, L_3) d\hat{A} = \sum_{g=1}^G w_g f(L_{1g}, L_{2g}, L_{3g}) \tag{11.124}$$

dove $\hat{A} = 1$ è l'area dell'elemento genitore.

La posizione dei punti di integrazione nelle formule più semplici è schizzata in Figura 11.36 e i relativi valori sono riportati in Tabella 11.4 (per $G = 6$ questi vanno considerati puramente indicativi, in quanto cinque sole cifre significative non sono sempre in grado di assicurare una precisione adeguata; tabelle più complete si trovano in vari testi [4, 7]). Si osservi che i punti sono simmetricamente posizionati su di un triangolo equilatero (la molteplicità indica il numero di volte in cui i punti compaiono con valori delle coordinate permutati ciclicamente) e che per lo stesso valore di G sono a volte possibili collocazioni alternative anche se equivalenti. Con questi dati, la (11.124) integra esattamente polinomi di primo ($G = 1$), secondo ($G = 3$), terzo ($G = 4$) e quarto ($G = 6$) grado nelle coordinate intrinseche L_i (la presenza di un peso negativo sconsiglia l'uso della formula $G = 4$).

Si osservi che sia la (11.121) che la (11.124) integrano esattamente, per qualunque G , la funzione $f = 1$. La somma dei pesi deve quindi risultare uguale alla lunghezza dell'intervallo o all'area (unitaria) del triangolo genitore. Risulta infatti, nei due casi

$$\int_{-1}^1 d\xi = \sum_{g=1}^G w_g = 2 \quad \int_{\hat{A}} d\hat{A} = \sum_{g=1}^G w_g = 1 \tag{11.125a, b}$$

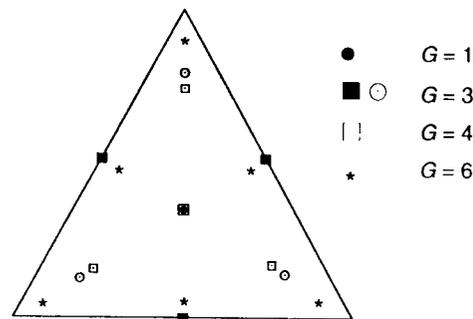


Figura 11.36

Tabella 11.4

G	molteplicità	L_{1g}	L_{2g}	L_{3g}	w_g
1	1	1/3	1/3	1/3	1
3a	3	2/3	1/6	1/6	1/3
3b	3	0	1/2	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	27/48
	3	6/10	2/10	2/10	25/48
6	3	.81685	.09158	.09158	.10995
	3	.10810	.44595	.44595	.22338

Quanto detto per elementi piani vale, con ovvie modifiche, per i loro equivalenti tridimensionali. Per i dati relativi a genitori a forma di tetraedro si rimanda a testi specialistici.

11.4.5 CONSIDERAZIONI GENERALI SUL PROCEDIMENTO

L'integrazione numerica rende operativamente possibile la formulazione isoparametrica. Il procedimento viene qui riassunto con riferimento al calcolo della matrice di rigidezza di elementi piani derivati da genitori quadrati. Le modifiche necessarie per la valutazione delle forze nodali e/o per il caso di genitori triangolari sono tuttavia abbastanza immediate. Le informazioni necessarie sono limitate ai valori X_j , Y_j ($j = 1, \dots, r$) delle coordinate dei nodi dell'elemento effettivo e alle espressioni delle derivate $\partial N_j / \partial \xi$, $\partial N_j / \partial \eta$ delle funzioni di forma dell'elemento genitore (per l'elemento S_4 , ad esempio, esse sono fornite dalle (11.116a)). Queste ultime vengono valutate nel punto di integrazione (ξ_g, η_h) e ciò permette di calcolare mediante la (11.103) la matrice Jacobiana $\mathbf{J}(\xi_g, \eta_h)$. Essa può essere numericamente invertita e su questa base si risale, attraverso la (11.104), ai valori di $\partial N_j / \partial x$, $\partial N_j / \partial y$ nel punto. Sostituendo nella (11.100), si definisce quindi la matrice $\hat{\mathbf{B}}(\xi_g, \eta_h)$. Pure immediato è il calcolo del determinante $J(\xi_g, \eta_h)$.

La matrice di rigidezza si ottiene approssimando l'integrale (11.106) mediante la (11.124). Risulta

$$\mathbf{k} \approx \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^G w_g w_h \mathbf{J}(\xi_g, \eta_h) \hat{\mathbf{G}}(\xi_g, \eta_h) \quad (11.126a)$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\xi_g, \eta_h) = t \hat{\mathbf{B}}'(\xi_g, \eta_h) d \hat{\mathbf{B}}(\xi_g, \eta_h) \quad (11.126b)$$

In generale, anche \mathbf{d} e t possono essere funzione del punto.

Il risultato ovviamente dipende dal numero G di punti usati per l'integrazione numerica della (11.106). Dal momento che le componenti della matrice integranda non sono espressioni polinomiali, le (11.126) comportano comunque un'approssimazione, che in linea di principio migliora al crescere di G . Peraltro, l'utilizzo di un numero troppo elevato di punti non solo aumenta l'onere computazionale ma produce anche elementi eccessivamente rigidi, soprattutto se la distorsione geometrica è notevole.

Il numero massimo di punti di fatto impiegato è quello che consente (per \mathbf{d} e t costanti) di integrare esattamente l'elemento genitore. Si parla in tal caso di *integrazione completa*, anche se per elementi distorti il risultato è comunque approssimato. Per gli elementi S_4 e S_8 un'integrazione completa richiede di operare, rispettivamente, su reticoli 2×2 e 3×3 . In alcuni casi può però rivelarsi preferibile ricorrere a integrazioni *ridotte*, basate su di un minor numero di punti, che compensano l'eccesso di rigidezza insito in geometrie distorte.

È quindi importante stabilire il numero minimo di punti necessario a non compromettere la validità dell'elemento. Con riferimento ad analisi elastiche è richiesto che la formula di integrazione calcoli esattamente il volume dell'elemento [4]. In elementi piani derivati da genitori quadrati, deve pertanto risultare, senza approssimazioni

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^G w_g w_h t(\xi_g, \eta_h) J(\xi_g, \eta_h) \quad (11.127)$$

Nell'elemento S_4 lo Jacobiano J è bilineare: se t è costante un unico punto di Gauss è quindi sufficiente ad assicurare il rispetto della condizione. Per l'elemento S_8 occorre invece operare su di un reticolo 2×2 .

Questi valori minimi non sono però sempre applicabili. L'integrazione ridotta annulla la rigidezza relativa ad alcuni modi deformativi e, se il numero di questi modi è elevato, la matrice di rigidezza dello schema discreto risulta mal condizionata, quando non addirittura singolare. Questo aspetto verrà esaminato in dettaglio nel prossimo capitolo; ci si limita qui ad affermare che un solo punto di integrazione è in genere inadeguato per l'elemento S_4 , mentre un'integrazione 2×2 produce solitamente buoni risultati per l'elemento S_8 , anche se geometrie particolari rendono preferibile un'integrazione completa. Per i due più semplici elementi derivati da genitori triangolari, il numero minimo di punti si rivela $G = 1$ (elemento T_3) e $G = 3$ (T_6) e assicura un'integrazione completa.

L'approccio isoparametrico formula le proprietà dell'elemento in coordinate globali. Si può quindi effettuare direttamente l'operazione di assemblaggio e risolvere il sistema che ne risulta per gli spostamenti nodali \mathbf{U} . Per completare la soluzione occorre ancora determinare lo stato di sforzo. Questo si calcola utilizzando l'equazione (11.76) che esprime il legame elastico, qui riscritta nella forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \mathbf{d}(\mathbf{B}(\xi)\mathbf{u} - \boldsymbol{\vartheta}(\xi) + \boldsymbol{\zeta}(\xi)) \quad (11.128)$$

dove $\mathbf{u} = \mathbf{L}_e \mathbf{U}$ è il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento.

L'andamento locale degli sforzi (11.128) può essere anche grossolanamente errato. La Figura 11.37 mostra quello in direzione x delle τ_{xy} in una mensola schematizzata con elementi S_8 . Le tensioni presentano variazioni paraboliche all'interno di ogni elemento e i loro valori possono essere considerati corretti solamente in media.

Operativamente, gli sforzi vengono calcolati solo in determinati punti, da cui si risale ai valori locali per interpolazione. È evidente che una cattiva scelta dei punti può portare a risultati inaccettabili; gli sforzi, tipicamente, sono molto male approssimati nei vertici dell'elemento e una ricostruzione dell'andamento a partire da questi valori è assolutamente inadeguata. Indagini effettuate con riferimento agli elementi di più comune impiego hanno consentito di identificare punti particolari in cui gli sforzi locali sono calcolati essenzialmente con la stessa precisione degli spostamenti nodali. In genere questi coincidono con i punti di Gauss necessari a assicurare la validità dell'ele-

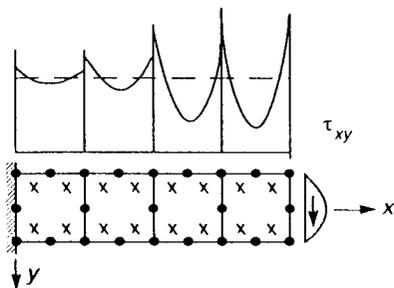


Figura 11.37

mento. In elementi quadrangolari, gli sforzi sono quindi accurati nel baricentro dell'elemento S_4 e nei punti del reticolo 2×2 per l'elemento S_8 (nell'esempio di Figura 11.37, essi sono indicati con \times). Diversi ragionamenti permettono di stabilire il carattere privilegiato di questi punti. Si può assumere un andamento più "liscio" per gli sforzi locali e minimizzare lo scarto quadratico medio rispetto alla (11.128) [9]; oppure ricercare i punti che darebbero gli stessi sforzi se gli spostamenti fossero di ordine più elevato [10]; o anche riconoscere che gli sforzi in questi punti assumono il significato di variabili generalizzate associate al modello cinematico [11]. In ogni caso, per essere attendibile, la ricostruzione del regime tensionale deve essere basata sui valori in questi punti, indipendentemente dal reticolo usato per integrare numericamente le proprietà dell'elemento.

Il metodo degli elementi finiti è per sua natura approssimato ed è quindi importante stimare l'errore connesso con la soluzione. Sono stati suggeriti a tal fine diversi procedimenti, che in genere si configurano come adattamenti di quelli citati nel capitolo precedente con riferimento al metodo di Rayleigh-Ritz. Un'indagine di convergenza effettuata inaffidando man mano il reticolo o aumentando, a parità di suddivisione, l'ordine degli elementi, comporta peraltro costi proibitivi ed è di fatto riservata a poche situazioni di particolare importanza. La decisione sull'adeguatezza dello schema discreto è in genere affidata al giudizio dell'utilizzatore, che gioca un ruolo determinante.

Nello stabilire lo schema discreto si cerca, a parità di accuratezza, di minimizzare l'onere computazionale. È ovviamente più oneroso definire le proprietà di elementi di ordine elevato; d'altra parte elementi semplici richiedono suddivisioni più fitte e quindi sistemi risolvibili di maggiori dimensioni. Anche se è difficile stabilire regole a priori valide in qualunque circostanza, il compromesso più economico è solitamente fornito da elementi di ordine intermedio, quadratici (S_8, L_9, T_6) o al più cubici (S_{12}, T_{10}). Questi elementi, oltretutto, sono sufficientemente flessibili da consentire, se distorti isoparametricamente, un'adeguata rappresentazione di praticamente tutte le geometrie di interesse.

Può comunque rivelarsi necessario migliorare le prestazioni del modello almeno in certe zone, dove la soluzione trovata indica la presenza di particolari concentrazioni di sforzo. Particolarmente adatte a questo scopo sono le formulazioni gerarchiche che, senza modificare il reticolo e minimizzando l'onere associato alla ridefinizione delle proprietà degli elementi, consentono di concentrare selettivamente i gradi di libertà laddove si rivelano più necessari [15]. Questo e altri argomenti di carattere avanzato, a oggi non ancora tradotti in tutti i codici di calcolo di uso corrente, esulano peraltro dagli obiettivi di questa trattazione.

11.4.6 CENNI SULLE MODALITÀ OPERATIVE

Il successo del metodo degli elementi finiti è in larga misura dovuto alla sua capacità di trattare strutture affatto generali affidando quasi per intero al codice di calcolo l'onere non solo di risolvere ma anche di generare il sistema (11.75) a partire da pochi e semplici dati di ingresso.

Ciò è dovuto principalmente alla natura modulare della formulazione. Una struttura anche notevolmente complessa può essere schematizzata con pochi tipi di elementi tra loro diversi, ognuno dei quali si presenta più volte con le stesse caratteristiche. L'integrazione numerica consente di generarne la matrice di rigidità k e i vettori delle forze nodali p_0 e p_θ a partire da informazioni limitate alle proprietà elastiche del materiale, alle coordinate dei nodi dell'elemento e alle funzioni di forma del suo genitore. La ripetitività delle operazioni rende la formulazione particolarmente adatta all'implementazione in codici di calcolo. La programmazione si traduce in un numero estremamente ridotto di istruzioni e la semplicità ed efficienza del procedimento sono tali che risulta di fatto conveniente trattare come isoparametrici anche elementi di geometria non distorta, le cui proprietà potrebbero essere calcolate direttamente. Esempi di programmazione relativi a questa fase sono reperibili su vari testi [7, 16].

Semplici e ripetitive sono anche le operazioni di assemblaggio, che generano la matrice di rigidità e il vettore dei termini noti formalmente definiti dalle (11.74). Le matrici di connettività L_e , di dimensioni notevoli e in massima parte costituite da elementi nulli, rappresentano soltanto un artificio concettuale e non vengono mai esplicitamente introdotte. Come anche l'Esempio 11.11 mette in luce, i nodotti matriciali (11.74) collocano semplicemente nelle opportune posizioni di K e P i contributi dei singoli elementi, eliminando i termini relativi ai gradi di libertà vincolati e sommando algebricamente i rimanenti. Questa operazione può essere effettuata dal codice di calcolo a partire da pochi dati, forniti in modo più sintetico che non scrivendo per esteso le matrici di connettività.

L'assemblaggio viene effettuato operando in sequenza sulle matrici di rigidità e i vettori delle forze nodali dei singoli elementi. Gli aspetti essenziali del procedimento vengono ora illustrati con riferimento all'esempio di Figura 11.38, costituito da un assemblaggio di quattro elementi S_8 . Si consideri la seguente tabella

		KK							
nodo (j) →	elem (e) ↓	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2	3	6	7	9	10	11
2	2		3	4	5	7	8	11	12
3	3			9	10	11	14	15	17
4	4				11	12	13	15	16

(s)

Essa riporta il numero del nodo dello schema discreto $J = 1, \dots, R$ ($R = 21$ nell'esempio, Figura 11.38a) cui corrisponde il nodo $j = 1, \dots, r$ ($r = 8$, Figura 11.38b) di ogni elemento $e = 1, \dots, N$ ($N = 4$) di cui è costituita la struttura.

La tabella sostituisce le matrici di connettività, contenendone in forma compatta le stesse informazioni, e consente di generare la matrice di rigidità (11.74a) e il vettore delle forze

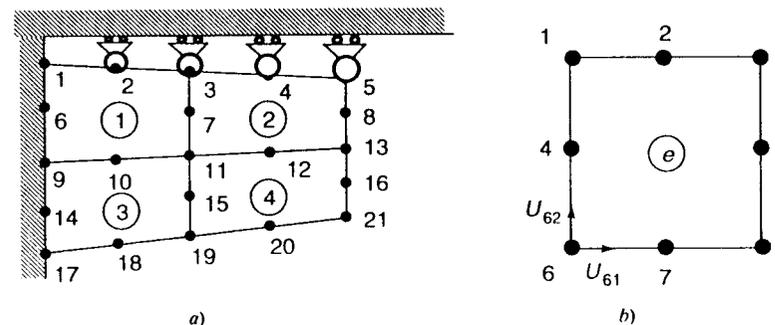


Figura 11.38

nodali equivalenti (11.74b). Nella sua versione concettualmente più semplice, l'algoritmo si riassume nella seguente sequenza di istruzioni FORTRAN [17]

```

DO 1 I = 1,NE
CALL ELEM
DO 2 J = 1,NNODE
MR1 = 2 * J - 1
MR2 = 2 * J
K1 = KK(I,J)
NR1 = 2 * K1 - 1
NR2 = 2 * K1
P(NR1) = P(NR1) + PE(MR1)
P(NR2) = P(NR2) + PE(MR2)
DO 2 K = 1,NNODE
MC1 = 2 * K - 1
MC2 = 2 * K
K2 = KK(I,K)
NC1 = 2 * K2 - 1
NC2 = 2 * K2
S(NR1,NC1) = S(NR1,NC1) + SE(MR1,MC1)
S(NR1,NC2) = S(NR1,NC2) + SE(MR1,MC2)
S(NR2,NC1) = S(NR2,NC1) + SE(MR2,MC1)
S(NR2,NC2) = S(NR2,NC2) + SE(MR2,MC2)
2 CONTINUE
1 CONTINUE

```

(t)

Si è indicato con NE (= 4 nell'esempio) il numero di elementi finiti e con NNODE (= 8) quello dei nodi di ognuno di essi. I dati tabulati nella (s) sono contenuti nella matrice KK(I,J), il cui indice di riga percorre gli elementi e quello di colonna i loro nodi. S (42 × 42) e P (42 × 1) sono la matrice di rigidezza e il vettore delle forze nodali equivalenti per la struttura (azzerati all'inizio del processo, inserendo in P i valori degli eventuali carichi direttamente applicati ai nodi). Le corrispondenti quantità per l'elemento finito sono contenute, rispettivamente, in SE (16 × 16) e PE (16 × 1) e vengono generate, elemento per elemento, dalla Subroutine ELEM. Gli indici di riga e colonna sono indicati con NRi, NCi per la struttura e con MRi, MCi per l'elemento. La (t) presuppone che ogni nodo presenti due gradi libertà e si applica quindi a elementi piani; la generalizzazione ad altri casi è comunque immediata.

I dati di ingresso nella (s) non contengono informazioni sui vincoli, che devono ancora essere imposti. A tal fine si consideri l'ulteriore tabella

		IVIN	
g.d.l. →	nodo (j) ↓	1 (x)	2 (y)
1	1	1	1
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	0	1
5	0	0	1
6	1	1	1
9	1	1	1
14	1	1	1
17	1	1	1

(u)

In essa, per ogni nodo vincolato della struttura, si è convenzionalmente indicato con 1 la presenza di un vincolo e con 0 quella di uno spostamento libero. È possibile su questa base imporre le condizioni di vincolo. Anziché modificare le dimensioni del sistema risolvente eliminando righe e colonne corrispondenti a gradi di libertà vincolati, si preferisce spesso

sostituirle con equazioni banali che impongano le condizioni di vincolo in soluzione, ad esempio operando come segue

```

NGDL = 2 * NNOD
DO 11 I = 1,NVIN
J = IVIN(I,1)
DO 12 I1 = 1,2
IF(IVIN(I,I1 + 1).EQ.0) GO TO 12
N = 2 * (J - 1) + I1
DO 13 I2 = 1,NGDL
S(I2,N) = 0.
S(N,I2) = 0.
13 CONTINUE
S(N,N) = 1.
P(N) = 0.
12 CONTINUE
11 CONTINUE

```

(v)

NGDL (= 42 nell'esempio) è il numero dei gradi di libertà della struttura priva di vincoli, in problemi piani pari al doppio del numero NNOD dei nodi. NVIN (= 9) è invece il numero dei nodi completamente o parzialmente vincolati, i cui indici sono contenuti nella prima colonna della matrice IVIN; le colonne successive contengono 1 o 0, a seconda che la componente di spostamento sia o meno impedita dal vincolo. La (v) identifica gli indici N corrispondenti ai gradi di libertà vincolati e sostituisce, nel sistema risolvente, l'equazione originaria con la condizione di vincolo $U_N = 0$. I gradi di libertà vincolati sono in genere solo una piccola percentuale del totale e la presenza di queste equazioni, a rigore inutili, non è fonte di inconvenienti.

Le istruzioni FORTRAN introdotte non vanno intese come suggerimenti per la programmazione ma solo come ausilio per illustrare il percorso logico del procedimento di assemblaggio. Per chi "lo parla correntemente", il linguaggio FORTRAN rappresenta infatti il modo più semplice e sintetico per cogliere il significato delle operazioni con cui il programma di calcolo genera il sistema risolvente (chi con questo linguaggio non avesse dimestichezza può tuttavia rassicurarsi: esso non verrà più utilizzato a fini esplicativi). Un buon codice di calcolo deve peraltro prevedere correttivi intesi a migliorarne l'efficienza. Le condizioni di vincolo possono essere imposte in vario modo e i diversi programmi adottano diverse strategie; accorgimenti particolari sono necessari per considerare vincoli che impongano cedimenti o che impediscano componenti di spostamento in direzioni diverse da quelle degli assi coordinati. Per i dettagli tecnici sulla programmazione e per la trattazione di aspetti particolari, si rimanda alla letteratura in materia [4,7,16]. Comunque, anche dalla rozza versione del procedimento qui illustrata traspare la possibilità di generare in modo automatico il sistema risolvente per strutture di tipo del tutto generale.

La soluzione della (11.75) è piuttosto impegnativa per le dimensioni spesso notevoli del sistema (l'adeguata modellazione di un problema realistico può richiedere anche alcune migliaia di gradi di libertà). Gli algoritmi cui più comunemente si fa riferimento sono basati sui metodi noti come *eliminazione di Gauss* o *triangolarizzazione di Cholesky*. Oltre che in testi di calcolo numerico, essi sono trattati nella letteratura relativa agli elementi finiti [7], cui ancora si rimanda per i dettagli del procedimento risolutivo.

Se utilizzati nella loro versione standard, l'efficienza di questi algoritmi decade molto rapidamente al crescere delle dimensioni del sistema. Essa può però venire notevolmente migliorata sfruttando alcune proprietà affatto generali della matrice di rigidezza, comuni a ogni schematizzazione a elementi finiti. La principale è il suo carattere *sparsa*, vale a dire la presenza di molti termini nulli in ogni sua riga e colonna.

Tale proprietà consegue dal significato fisico delle componenti di K . Si è visto che K_{ij} rappresenta la forza nodale secondo il grado di libertà i che si genera imponendo $U_j = 1$ e $U_k = 0 \forall k \neq j$. È evidente che questa operazione coinvolge, in termini deformativi, solo gli elementi che concorrono nel punto in cui viene imposto lo spostamento unitario e quindi

induce forze nodali solo nei nodi che a questi elementi appartengono. La Figura 11.39 illustra questo aspetto per un assemblaggio di triangoli piani a tre nodi: quando si impone uno spostamento $U_1 = 1$ (nell'esempio, orizzontale) al nodo 1 tenendo fissi i nodi rimanenti, gli elementi esterni al perimetro ingrossato si mantengono indeformati; lo spostamento induce forze nodali solo nei cinque elementi interni, vale a dire nei nodi numerati da 1 a 6. Indipendentemente dal numero di gradi di libertà dell'intero schema discreto, la j -sima colonna della matrice \mathbf{K} conterrà quindi al più 12 termini non nulli (due per ogni nodo coinvolto).

La sparsità della matrice può essere sfruttata per ridurre sia l'occupazione di memoria richiesta che il numero di operazioni necessarie alla soluzione del sistema, evitando di memorizzare e manipolare elementi a priori nulli. Una giudiziosa numerazione dei nodi permette di addensare i termini non nulli di \mathbf{K} attorno alla sua diagonale principale, conferendo alla matrice la struttura detta a *banda*. I termini esterni alla banda sono certamente nulli e possono essere omissi. La simmetria della matrice consente inoltre di memorizzare solo la cosiddetta *semibanda* (Figura 11.40).

È questo l'accorgimento più semplice e classico, ma non sempre il più efficace. È evidente che una buona numerazione dei nodi può ridurre le dimensioni della semibanda ma non può evitare la presenza di termini nulli anche al suo interno. Tecniche specifiche consentono ulteriori risparmi. La letteratura è ricchissima di studi sugli algoritmi risolutivi per sistemi sparsi, molti dei quali specificamente sviluppati per modelli a elementi finiti. Già nel 1977 un lavoro di sintesi riportava ben 604 riferimenti bibliografici in materia [18].

In presenza di un numero di equazioni particolarmente elevato può essere necessario operare attraverso soluzioni parziali di *sottostrutture*, ognuna delle quali rappresenta una sorta di *superelemento finito* il cui assemblaggio ricostruisce la struttura originaria. La trattazione di questo e altri analoghi argomenti, importanti ma tutto sommato di dettaglio, esula dallo scopo di questo testo.

11.5 NONLINEARITÀ DEL MATERIALE

11.5.1 METODI RISOLUTIVI PER PROBLEMI NONLINEARI

11.5.1.1 Il metodo di Newton-Raphson

La trattazione del metodo degli elementi finiti è stata fin qui confinata nell'ambito lineare. La versatilità del procedimento e la sua adattabilità alle diverse situazioni

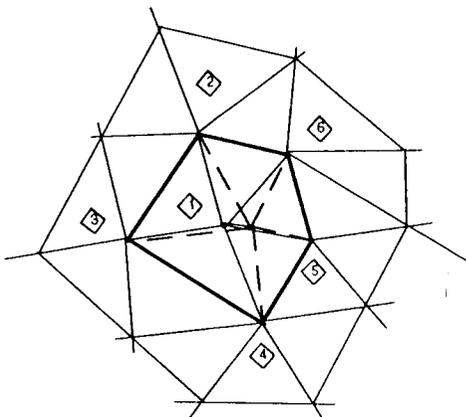


Figura 11.39

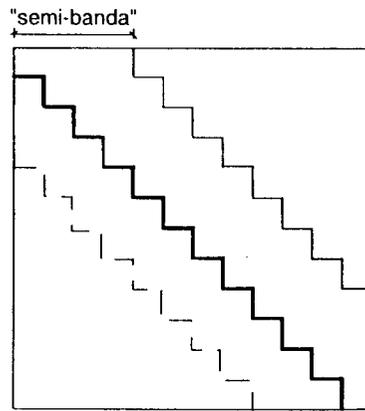


Figura 11.40

inducono tuttavia il desiderio di estendere la formulazione anche a problemi non lineari, di fatto non affrontabili con approcci tradizionali.

Le nonlinearità di natura geometrica, legate alla necessità di rimuovere l'ipotesi di piccoli spostamenti, intervengono già a livello di legame deformazioni-spostamenti e richiedono una revisione abbastanza sostanziale della formulazione. Esse non verranno qui esaminate. Si accennerà invece a quelle indotte dal comportamento del materiale, che possono essere incorporate in modo concettualmente semplice associando alle relazioni cinematiche e statiche riassunte in Tabella 11.2, in luogo del legame lineare (11.62), quello relativo al materiale in considerazione.

Alla formulazione del problema, si premette l'illustrazione procedimento da cui traggono origine le tecniche più comunemente utilizzate per la sua soluzione. Si consideri il seguente sistema di equazioni nonlineari

$$\mathbf{P} = \Psi(\mathbf{U}) \tag{11.129a}$$

Esso può equivalentemente scriversi

$$\Phi(\mathbf{U}) = \Psi(\mathbf{U}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \tag{11.129b}$$

dove \mathbf{P} e \mathbf{U} indicano sempre i vettori delle forze e degli spostamenti nodali (nel caso lineare è $\Psi = \mathbf{K}\mathbf{U}$ e queste relazioni si riconducono alla (11.75)). Nelle (11.129) le nonlinearità possono essere di ordine più o meno elevato ma, indipendentemente da questo aspetto, la loro stessa presenza esige che la soluzione venga affrontata con un atteggiamento radicalmente diverso: mentre un sistema lineare può essere risolto con algoritmi standard su cui si interviene al solo scopo di migliorarne l'efficienza, senza un'attenta analisi delle strategie di soluzione un problema nonlineare di dimensioni realistiche può risultare non trattabile.

Si supponga che le componenti di Ψ siano funzioni differenziabili di \mathbf{U} e si immagini di conoscere una soluzione approssimata \mathbf{U}^n della (11.129b). Sviluppando questa relazione in serie di Taylor attorno a \mathbf{U}^n e troncando al termine del primo ordine si ottiene

$$\Phi(\mathbf{U}^{n+1}) \approx \Phi(\mathbf{U}^n) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}^n} \{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n\} = \mathbf{0} \tag{11.130}$$

È questo un sistema lineare che consente il calcolo di un valore aggiornato \mathbf{U}^{n+1} per gli spostamenti nodali e si configura come elemento di un processo iterativo per la soluzione della (11.129). Si introduca la matrice

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{U}} \right] = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{U}} \right] \quad K_{Tij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial U_j} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial U_j} \tag{11.131}$$

e si ponga, per semplicità di scrittura

$$\Psi^n = \Psi(\mathbf{U}^n) \quad \Phi^n = \Phi(\mathbf{U}^n) \quad \mathbf{K}_T^n = \mathbf{K}_T(\mathbf{U}^n) \tag{11.132a-c}$$

$$\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n \tag{11.133}$$

La soluzione della (11.130) allora si scrive, simbolicamente

$$\Delta U^n = -(\mathbf{K}_T^n)^{-1} \Phi^n = (\mathbf{K}_T^n)^{-1} (\mathbf{P} - \Psi^n) \quad \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}^n \quad (11.134a, b)$$

Il processo viene iterato aggiornando ogni volta le quantità (11.131), (11.132) e termina quando il vettore

$$\Phi^n = \Psi^n - \mathbf{P} \quad (11.135a)$$

diviene sufficientemente piccolo. Vale a dire, quando risulta

$$\|\Phi^n\| < \alpha \quad (11.135b)$$

dove $\|\Phi\|$ è un'opportuna norma del vettore (tipicamente, il suo modulo o il massimo valore assoluto delle sue componenti) e α un'assegnata tolleranza. Gli spostamenti nodali (11.134b) rappresentano allora la soluzione della (11.129), a meno di un errore controllato da α .

Il metodo è associato nella letteratura ai nomi di *Newton-Raphson*. Il significato delle successive operazioni è illustrato in Figura 11.41a per un caso unidimensionale. La sua applicazione può rivelarsi onerosa in quanto ogni iterazione richiede di ridefinire la matrice dei coefficienti \mathbf{K}_T^n e quindi di risolvere un diverso sistema di equazioni lineari. Ciò può essere evitato ricorrendo a una versione modificata del metodo, che consiste semplicemente nell'assumere, indipendentemente dall'iterazione corrente

$$\mathbf{K}_T^n = \mathbf{K}_T^0 \quad (11.136a)$$

col che la (11.134a) diviene

$$\Delta \mathbf{U}^n = (\mathbf{K}_T^0)^{-1} (\mathbf{P} - \Psi^n) \quad (11.136b)$$

Il processo risolutivo si configura adesso come illustrato in Figura 11.41b. A ogni iterazione si aggiorna solamente il vettore dei termini noti. La fase più onerosa del calcolo è quella che opera sulla matrice dei coefficienti ed è ora eseguita un'unica volta (di regola, triangolarizzando la matrice); le successive soluzioni (11.136b) si calcolano poi per sostituzione diretta. È peraltro evidente dal confronto in Figura 11.41 come il procedimento modificato comporti un numero di iterazioni significativamente maggiore, soprattutto se si richiede una precisione elevata.

La convergenza del metodo di Newton-Raphson non è garantita in ogni circostanza, ma normalmente si verifica se il vettore di partenza non è molto discosto dalla soluzione. Ciò può consigliare di suddividere la storia di carico in intervalli di ampiezza non eccessiva, di modo che la prima iterazione rappresenti già una ragionevole approssimazione del valore finale; in tal caso, la matrice dei coefficienti (11.131) viene solitamente calcolata all'inizio del passo e mantenuta costante al suo interno.

ESEMPIO 11.12 Si consideri la funzione quadratica

$$\Psi(U) = 200U - 4U^2 \quad (a)$$

da cui si ottiene

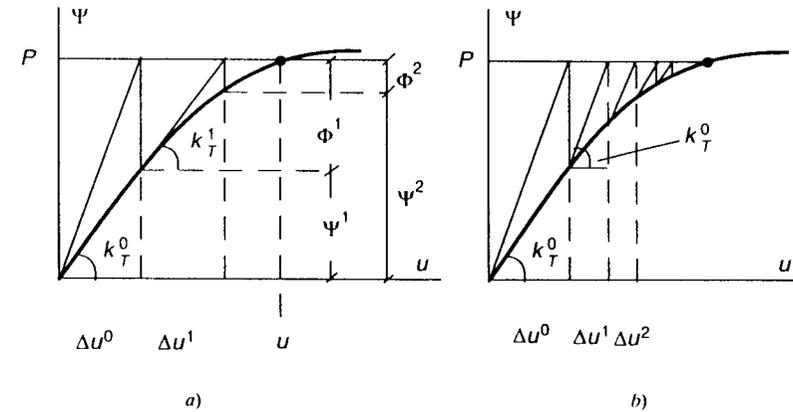


Figura 11.41

$$K_T(U) = \frac{d\Psi}{dU} = 200 - 8U \quad K_T^0 = K_T(0) = 200 \quad (b1, 2)$$

Il metodo viene applicato alla soluzione dell'equazione

$$\Psi(U) = P = 1500 \quad (c)$$

I risultati delle successive iterazioni sono riportati in Tabella 11.5. Nella versione originaria del metodo la soluzione viene raggiunta in cinque iterazioni, contro le 15 richieste, a parità di accuratezza, da quella modificata. Peraltro, oltre la metà di queste riguarda fasi che apportano correzioni molto modeste: per $n = 6$ il valore di Ψ^n avvicina infatti P già a meno dello 0.1%.

11.5.1.2 Applicazioni strutturali - Il comportamento elastico nonlineare

Nei problemi di analisi strutturale, il sistema risolvete (11.129) è costituito dall'equazione di equilibrio nodale (11.61), in cui gli sforzi locali σ_e in ogni elemento vengono espressi in funzione degli spostamenti nodali. Il comportamento elastico nonlineare rappresenta il caso più semplice e permette di ottenere senza difficoltà un'espressione esplicita per $\Psi(\mathbf{U})$. In assenza di deformazioni e sforzi iniziali, il legame simbolicamente si esprime

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad (11.137)$$

D'altra parte, per la (11.56b) si può scrivere

$$\sigma_e = \sigma_e(\epsilon_e = \mathbf{B}L_e \mathbf{U}) = \sigma_e(\mathbf{U}) \quad (e = 1, \dots, N) \quad (11.138)$$

Introducendo nella (61) si ottiene quindi

$$\Psi(\mathbf{U}) = \sum_{e=1}^N L_e^t \psi_e(\mathbf{U}) \quad \psi_e(\mathbf{U}) = \int_{V_e} \mathbf{B}^t \sigma_e(\mathbf{U}) dV \quad (e = 1, \dots, N) \quad (11.139a, b)$$

Tabella 11.5

a) Metodo di Newton-Raphson					
n	U ⁿ	K _T ⁿ	Φ ⁿ	-Ψ ⁿ = P - Φ ⁿ	ΔU ⁿ
0	.0	200.0	.0	1500.0	7.500
1	7.500	140.0	1275.0	225.0	1.607
2	9.107	127.143	1489.668	10.332	.081
3	9.188	126.493	1499.974	.026	.0002
4	9.189	126.491	1500.000	.000	.000
b) Metodo di Newton-Raphson modificato					
n	U ⁿ	K _T ⁿ	Φ ⁿ	-Ψ ⁿ = P - Φ ⁿ	ΔU ⁿ
0	.0	200.	.0	1500.0	7.500
1	7.500	.	1275.0	225.0	1.125
2	8.625	.	1427.438	72.563	.363
3	8.988	.	1474.439	25.561	.128
4	9.116	.	1490.745	9.225	.046
5	9.162	.	1496.617	3.383	.017
6	9.179	.	1498.759	1.241	.006
7	9.185	.	1499.544	.456	.002
13	9.189	.	1499.999	.001	.000006
14	9.189	200.	1500.000	.0004	.000002

il che consente di scrivere la (11.129).

L'espressione (11.131) della matrice dei coefficienti K_T può ora esprimersi

$$K_T = \frac{\partial \Psi}{\partial U} = \sum_{e=1}^N L_e' \int_{V_e} B' \frac{\partial \sigma_e}{\partial U} dV = \sum_{e=1}^N L_e' \int_{V_e} B' \frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon_e} \frac{\partial \epsilon_e}{\partial U} dV \quad (d)$$

La quantità

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon_e} = d_{Te} \quad (11.140)$$

definisce la matrice dei moduli elastici tangenti del *materiale*. Se, come di regola, al legame (11.137) è associata un'energia di deformazione convessa, tale matrice risulta simmetrica e definita positiva. Dalla (11.56b) inoltre si evince $\partial \epsilon_e / \partial U = B L_e$. Il calcolo della (d) si decompone allora nelle due operazioni seguenti

$$K_T = \sum_{e=1}^N L_e' k_{Te} L_e \quad k_{Te} = \int_{V_e} B' d_{Te} B dV \quad (e = 1, \dots, N) \quad (11.141a, b)$$

La matrice K_T è nota come *rigidezza tangente* dello schema discreto, denominazione giustificata dalle (11.141), che la calcolano in funzione dei moduli tangenti (11.140). Nel caso lineare risulta ovviamente sempre $K_T = K$. Nelle Ψ definite dalla (11.139) si riconosce invece il vettore delle forze nodali in equilibrio, nel senso globale definito dalla (11.61), con gli sforzi associati agli spostamenti nodali U attraverso il legame del materiale.

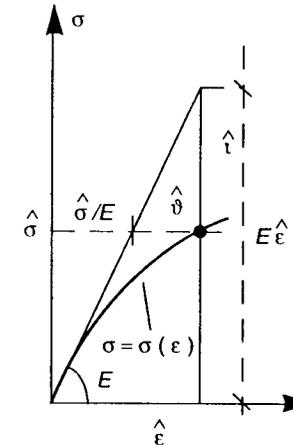


Figura 11.42

Il confronto delle (11.141), (11.139) con le analoghe relazioni relative al caso lineare mostra che sia la matrice K_T che il vettore Ψ possono essere costruiti elemento per elemento e successivamente assemblati con la procedura usuale. Le (11.141b), (11.139b), che definiscono la rigidezza tangente e le forze nodali dei singoli elementi, sono però meno innocenti di quanto non appaiano a uno sguardo superficiale. Se si eccettuano i modelli più semplici, le deformazioni variano nell'elemento e , di conseguenza, risulta $d_T = d_T(x)$ e $\sigma_e = \sigma_e(x)$. Esplicitare l'espressione analitica di queste quantità, in cui le non linearità del legame si associano alla dipendenza dal punto, è impresa chiaramente proibitiva; il calcolo può essere eseguito solo in via approssimata, ricorrendo all'integrazione numerica.

Il vettore Φ^n definito dalla (11.135a) si configura come un carico residuo, la cui norma misura la violazione nell'equilibrio associata alla soluzione corrente e che le successive iterazioni hanno il compito di ricondurre all'interno di una tolleranza assegnata. Questa interpretazione consente di derivare strategie di soluzione alternative, che attribuiscono un preciso significato meccanico alle forze residue.

11.5.1.3 I metodi delle deformazioni e degli sforzi iniziali

È possibile concepire le deviazioni dalla linearità nel comportamento del materiale come *deformazioni* o *sforzi iniziali* applicati, in aggiunta ai carichi, su di una struttura elastica-lineare. Per chiarire l'affermazione, si consideri il legame uniassiale di Figura 11.42. Se biunivoco, esso può essere espresso in entrambe le sue forme diretta e inversa. Simbolicamente

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad \epsilon = \epsilon(\sigma) \quad (11.142a, b)$$

(la (11.142a) particularizza la (11.137) al caso uniassiale). Il modulo elastico E è fornito dalla pendenza iniziale della curva. Precisamente

$$E = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (11.143)$$

Si supponga dapprima che il problema sia staticamente determinato. Il valore dello sforzo $\hat{\sigma}$ è allora dettato dall'equilibrio e non dipende dal particolare legame costitutivo. È evidente che la deformazione a esso associata può essere ottenuta sommando al valore $\hat{\sigma}/E$, che conseguirebbe se il comportamento fosse lineare, la *deformazione iniziale*

$$\hat{\vartheta} = \varepsilon(\hat{\sigma}) - \frac{1}{E} \hat{\sigma} \quad (11.144a)$$

La soluzione del problema effettivo può allora essere ottenuta applicando alla struttura supposta elastica-lineare, in aggiunta ai carichi esterni la deformazione iniziale (11.144a).

Si immagini adesso di operare a deformazioni imposte, di modo che il valore di $\hat{\varepsilon}$ non dipenda dal legame costitutivo. Lo sforzo effettivamente associato a $\hat{\varepsilon}$ attraverso la curva che descrive il comportamento nonlineare del materiale si può esprimere sommando algebricamente alla quantità $E\hat{\varepsilon}$, che conseguirebbe in caso di linearità del legame, lo sforzo iniziale

$$\hat{\zeta} = \sigma(\hat{\varepsilon}) - E\hat{\varepsilon} \quad (11.144b)$$

La soluzione del problema può ancora essere ottenuta operando su di una struttura linearmente elastica, soggetta alle ulteriori azioni esterne costituite dallo sforzo iniziale (11.144b).

In generale, né gli sforzi né le deformazioni finali sono noti a monte della soluzione del problema ed è quindi impossibile stabilire a priori il valore corretto delle quantità (11.144). Si può tuttavia calcolarlo iterativamente, mediante procedimenti noti rispettivamente come metodi *delle deformazioni e degli sforzi iniziali*. Alla loro trattazione generale, se ne premette l'illustrazione con riferimento a un esempio.

ESEMPIO 11.13 Si consideri la struttura di Figura 11.43a. Il materiale di cui sono costituite le due aste deformabili presenti il comportamento uniassiale bilineare di Figura 11.43b. Il problema era stato risolto nel Capitolo 6 considerando il materiale come elasto-plastico (Esempio 6.1). Si era tuttavia constatato come sotto carico monotamente crescente le plasticizzazioni presentassero carattere progressivo. In tal caso l'irreversibilità del comportamento non gioca alcun ruolo; il legame può quindi essere considerato come reversibile e espresso analiticamente in termini finiti. Le sue forme diretta e inversa (11.142) risultano

$$\sigma_e = \begin{cases} E\varepsilon_e & \varepsilon_e \leq \varepsilon_0 \\ \frac{1}{5}(4\sigma_0 + E\varepsilon_e) & \varepsilon_e \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (11.145a)$$

$$\varepsilon_e = \begin{cases} \frac{1}{E} \sigma_e & \sigma_e \leq \sigma_0 \\ \frac{1}{E}(5\sigma_e - 4\sigma_0) & \sigma_e \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (11.145b)$$

Verrà considerato il particolare valore del carico

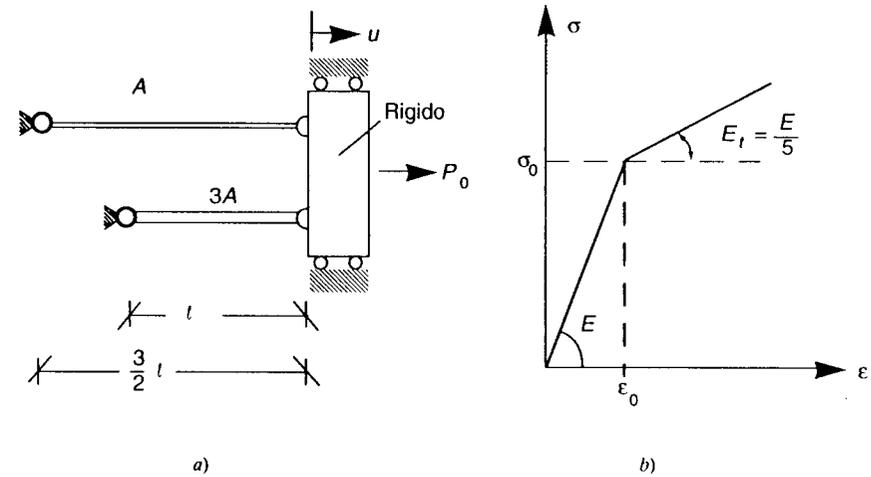


Figura 11.43

$$P_0 = 4A\sigma_0 \quad (e)$$

cui corrisponde la soluzione

$$U = 1.2632 \varepsilon_0 l \quad \varepsilon_1 = 1.2632 \varepsilon_0 \quad \varepsilon_2 = .8421 \varepsilon_0 \quad (f1-3)$$

$$\sigma_1 = 1.0526 \sigma_0 \quad \sigma_2 = .8421 \sigma_0$$

U rappresenta lo spostamento del blocco rigido. Le deformazioni, costanti in ogni barra, sono a esso legate dalle relazioni

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{l} U \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{3l} U \quad (g1,2)$$

e gli sforzi conseguono attraverso il legame diretto (11.145a). La soluzione ovviamente soddisfa la condizione di equilibrio globale

$$P_0 = 3A\sigma_1 + A\sigma_2 \quad (h)$$

In questa situazione, deviazioni dalla linearità si riscontrano solo nell'asta ①.

Ogni barra viene schematizzata con un elemento biella a due nodi. Lo spostamento del primo è impedito dalle cerniere e quello del secondo si identifica con U , che costituisce l'unico grado di libertà dello schema discreto. Ad assemblaggio effettuato, le matrici $B L_e$ sono allora le quantità che si desumono dalle (g).

La soluzione viene affrontata considerando il problema come linearmente elastico, incorporando le deviazioni dalla linearità nel comportamento in deformazioni o sforzi iniziali. Il legame del materiale è allora espresso dalla (11.62) che, nel caso uniassiale, si scrive

$$\sigma_e = E(\varepsilon_e - \vartheta_e) + \zeta_e \quad (i)$$

Per l'esempio in esame, la rigidità elastica della struttura risulta

$$K = \sum_{e=1}^2 L_e' \left[\int_{V_e} \mathbf{B}'^t d\mathbf{B} dV \right] L_e = \frac{E \cdot 3A}{\ell} + \frac{EA}{(3\ell/2)} = \frac{11}{3} \frac{EA}{\ell} \quad (i)$$

mentre la forza nodale si scrive

$$P = P_0 + P_\theta \quad (k)$$

con P_0 dato dalla (e) e

$$P_\theta = \sum_{e=1}^2 L_e' \left\{ \int_{V_e} \mathbf{B}'^t (d\vartheta_e - \zeta_e) \right\} dV = 3A(E\vartheta_1 - \zeta_1) + A(E\vartheta_2 - \zeta_2) \quad (l)$$

Il procedimento inizia col calcolo della risposta elastica della struttura soggetta al solo carico esterno ($P = P_0$, $P_\theta = 0$). È allora

$$U^0 = \frac{1}{K} P_0 = 1.091 \varepsilon_0 \ell \quad (11.146a)$$

Dalle (g) e dal legame lineare (i) si ottiene successivamente

$$\varepsilon_1^0 = 1.091 \varepsilon_0 \quad \varepsilon_2^0 = .727 \varepsilon_0 \quad (11.146b)$$

$$\sigma_1^0 = E\varepsilon_1^0 = 1.091 \sigma_0 \quad \sigma_2^0 = E\varepsilon_2^0 = .727 \sigma_0 \quad (11.146c)$$

Dal momento che risulta $\sigma_1^0 > \sigma_0$, questa soluzione non rispetta l'effettivo legame costitutivo (11.145). I due procedimenti si differenziano per il modo con cui le necessarie correzioni vengono introdotte.

A) *Metodo delle deformazioni iniziali.* Per chiarezza di simbologia, si indicano con ε le deformazioni che conseguono a U attraverso il legame deformazioni-spostamenti (g) e con η quella associate agli sforzi attraverso il *legame inverso* (11.145b). Da quest'ultima relazione si ottiene, con riferimento alle (11.146c)

$$\eta_1^0 = \frac{1}{E} (5\sigma_1^0 - 4\sigma_0) = 1.455 \varepsilon_0 \quad \eta_2^0 = \frac{1}{E} \sigma_2^0 = .727 \varepsilon_0 = \varepsilon_2^0$$

Rispetto alle deformazioni (11.146b) calcolate nel primo passo del procedimento, si riscontra nell'asta ① la differenza

$$\vartheta_1^0 = \eta_1^0 - \varepsilon_1^0 = .364 \varepsilon_0 \quad (m1)$$

Questa quantità viene considerata come una deformazione iniziale, applicata alla struttura come ulteriore azione sollecitante. Alla (m1) corrisponde, attraverso la (l), la forza nodale aggiuntiva

$$P_\theta^1 = 3EA\vartheta_1^0 = 1.091 A\sigma_0 \quad (m2)$$

Stante la linearità del problema, è sufficiente calcolare la soluzione dovuta alle (m) e sovrapporla alle (11.147). Si ottiene, per lo spostamento

$$\Delta U^1 = \frac{1}{K} P_\theta^1 = .298 \varepsilon_0 \ell \quad U^1 = U^0 + \Delta U^1 = 1.388 \varepsilon_0 \ell \quad (n1)$$

e quindi, dalle (g)

$$\varepsilon_1^1 = 1.388 \varepsilon_0 \quad \varepsilon_2^1 = .926 \varepsilon_0 \quad (n2)$$

Tenendo conto della (m1), il legame lineare (i) fornisce allora, per gli sforzi

$$\sigma_1^1 = E(\varepsilon_1^1 - \vartheta_1^0) = 1.025 \sigma_0 \quad \sigma_2^1 = E\varepsilon_2^1 = .926 \sigma_0 \quad (n3)$$

A questi valori corrispondono, sempre attraverso il legame inverso (11.145b), le deformazioni

$$\eta_1^1 = \frac{1}{E} (5\sigma_1^1 - 4\sigma_0) = 1.124 \varepsilon_0 \quad \eta_2^1 = \frac{1}{E} \sigma_2^1 = .926 \varepsilon_0 = \varepsilon_2^1 \quad (o1)$$

Rispetto alle (n2), si riscontra nell'asta ① la differenza

$$\Delta \vartheta_1^1 = \eta_1^1 - \varepsilon_1^1 = -.262 \varepsilon_0 \quad (o2)$$

Il valore aggiornato della deformazione iniziale è quindi

$$\vartheta_1^1 = \vartheta_1^0 + \Delta \vartheta_1^1 = .099 \varepsilon_0 \quad (o3)$$

Si calcola ora la risposta della struttura, supposta sempre linearmente elastica, alla deformazione iniziale (o2) e si sovrappone il risultato alle (n). Il procedimento viene iterato fino a che gli incrementi $|\Delta \vartheta_1^n|$ divengono sufficientemente piccoli. Nell'esempio, l'asta ② si mantiene sempre in campo lineare durante il processo iterativo. Questo si articola quindi nella seguente sequenza di operazioni

$$\begin{aligned} \Delta P_\theta^n &= 3EA\Delta \vartheta_1^{n-1} & \Delta U^n &= \frac{1}{K} \Delta P_\theta^n, & U^n &= U^{n-1} + \Delta U^n \\ \varepsilon_1^n &= \frac{1}{\ell} U^n, & \varepsilon_2^n &= \frac{2}{3\ell} U^n & \sigma_1^n &= E(\varepsilon_1^n - \vartheta_1^{n-1}), & \sigma_2^n &= E\varepsilon_2^n \\ \eta_1^n &= \frac{1}{E} (5\sigma_1^n - 4\sigma_0) & \Delta \vartheta_1^n &= \eta_1^n - \varepsilon_1^n, & \vartheta_1^n &= \vartheta_1^{n-1} + \Delta \vartheta_1^n \end{aligned} \quad (11.147)$$

I risultati così ottenuti sono riassunti in Tabella 11.6a. Il calcolo è stato troncato per $n = 19$, quando si è ottenuto $|\Delta P_\theta^n| < .001 \times P_0$.

B) *Metodo degli sforzi iniziali.* Si indichino ora gli sforzi con σ se derivati attraverso il legame lineare (i) e con s se calcolati mediante il legame nonlineare *diretto* (11.145a). Questo associa alle deformazioni (11.146b) i valori

$$s_1^0 = \frac{1}{5} (4\sigma_0 + E\varepsilon_1^0) = 1.018 \sigma_0 \quad s_2^0 = E\varepsilon_2^0 = .727 \sigma_0 = \sigma_2^0$$

Rispetto agli sforzi (11.146c) calcolati nel passo iniziale del procedimento, si riscontra, nella sola asta ①, la differenza

$$\zeta_1^0 = s_1^0 - \sigma_1^0 = -.073 \sigma_0 \quad (p1)$$

Tale quantità è concepibile come uno sforzo iniziale, ulteriore azione sollecitante da applicarsi alla struttura. La forza nodale che a essa consegue attraverso la (l) risulta

$$P_\theta^1 = -3A\zeta_1^0 = .218 A\sigma_0 \quad (p2)$$

Si calcola ora la risposta dello schema discreto soggetto alle (p). Si ottiene, successivamente

Tabella 11.6

a) Deformazioni iniziali						
n	$\Delta P_n/A\sigma_0$	$U/\epsilon_0\ell$	σ_1/σ_0	σ_2/σ_0	η_1/ϵ_0	θ_1/ϵ_0
0	4.	1.091	1.091	.727	1.455	.364
1	1.091	1.388	1.025	.926	1.124	.099
2	-.793	1.172	1.073	.781	1.364	.292
3	.577	1.329	1.038	.886	1.190	.152
4	-.420	1.215	1.063	.810	1.317	.253
5	.305	1.298	1.045	.865	1.224	.179
16	-.0092	1.2621	1.0529	.8414	1.2643	.2155
17	.0067	1.2639	1.0525	.8426	1.2623	.2098
18	-.0049	1.2626	1.0528	.8417	1.2638	.2110
19	.0035	1.2636	1.0525	.8424	1.2627	.2102
esatto	-	1.2632	1.0526	.8421	1.2632	.2106

b) Sforzi iniziali						
n	$\Delta P_n/A\sigma_0$	$U/\epsilon_0\ell$	σ_1/σ_0	σ_2/σ_0	s_1/σ_0	ζ_1/σ_0
0	4.	1.091	1.091	.727	1.018	-.073
1	.218	1.150	1.078	.767	1.030	-.120
2	.143	1.189	1.069	.793	1.038	-.151
3	.093	1.215	1.063	.810	1.043	-.172
4	.061	1.232	1.060	.821	1.046	-.185
9	.0074	1.2594	1.0535	.8396	1.0519	-.2075
10	.0048	1.2607	1.0532	.8404	1.0521	-.2085
11	.0031	1.2615	1.0530	.8410	1.0523	-.2092
esatto	-	1.2632	1.0526	.8421	1.0526	-.2106

$$\Delta U^1 = \frac{1}{K} P_\theta^1 = .059 \epsilon_0 \ell \quad U^1 = U^0 + \Delta U^1 = 1.150 \epsilon_0 \ell \quad (q1)$$

$$\epsilon_1^1 = 1.150 \epsilon_0 \quad \epsilon_2^1 = .767 \epsilon_0 \quad (q2)$$

$$\sigma_1^1 = E\epsilon_1^1 + \zeta_1^0 = 1.078 \sigma_0 \quad \sigma_2^1 = E\epsilon_2^1 = .767 \sigma_0 \quad (q3)$$

Alle (q2) corrispondono attraverso il legame diretto (11.145a) gli sforzi

$$s_1^1 = \frac{1}{5} (4\sigma_0 + E\epsilon_1^1) = 1.031 \sigma_0 \quad s_2^1 = E\epsilon_2^1 = .767 \sigma_0 = \sigma_2^1 \quad (r1)$$

Il confronto con le (q3) mostra che nell'asta ① si riscontra ancora una differenza. Precisamente

$$\Delta \zeta_1^1 = s_1^1 - \sigma_1^1 = -.048 \sigma_0 \quad (r2)$$

Per cui lo sforzo iniziale diviene

$$\zeta_1^1 = \zeta_1^0 + \Delta \zeta_1^1 = -.120 \sigma_0 \quad (r3)$$

Il procedimento viene proseguito iterativamente, calcolando a ogni passo la risposta elastica dello schema discreto agli incrementi di sforzo iniziale $\Delta \zeta_1^{n-1}$ che man mano risultano e sovrapponendo la soluzione alla precedente. Tenendo conto che, nell'e-

sempio, sforzi iniziali si producono solo nell'asta ①, il procedimento si articola nelle operazioni seguenti

$$\Delta P_\theta^n = -3A\Delta \zeta_1^{n-1} \quad \Delta U^n = \frac{1}{K} \Delta P_\theta^n, \quad U^n = U^{n-1} + \Delta U^n$$

$$\epsilon_1^n = \frac{1}{\ell} U^n, \quad \epsilon_2^n = \frac{2}{3\ell} U^n \quad \sigma_1^n = E\epsilon_1^n + \zeta_1^{n-1} \quad \sigma_2^n = E\epsilon_2^n$$

$$s_1^n = \frac{1}{5} (4\sigma_0 + E\epsilon_1^n) \quad \Delta \zeta_1^n = s_1^n - \sigma_1^n, \quad \zeta_1^n = \zeta_1^{n-1} + \Delta \zeta_1^n \quad (11.148)$$

I risultati sono riassunti in Tabella 11.6b. Il calcolo è stato terminato per $n = 11$, quando si è ottenuto $|\Delta P_\theta^n| \leq .001 \times P_0$.

La Figura 11.44 illustra la porzione significativa del diagramma $\sigma - \epsilon$ relativo all'asta ①, indicando il percorso seguito nelle prime iterazioni dai metodi delle deformazioni (Figura 11.44a) e degli sforzi (Figura 11.44b) iniziali. In entrambi i casi, la soluzione trovata a ogni iterazione soddisfa non solo la congruenza (comunque verificata in un approccio agli spostamenti) ma anche l'equazione di equilibrio globale (h), come è facile constatare esaminando i valori riportati in Tabella 11.6; essa però non rispetta il legame costitutivo nell'asta ①, dove viene ecceduto il limite di proporzionalità. I due procedimenti riportano il punto sull'effettiva curva del materiale calcolando, il primo le deformazioni che corrispondono al valore corrente dello sforzo e il secondo lo sforzo che consegue a quello della deformazione. L'equilibrio viene così violato e la misura di tale violazione è espressa dalla forza nodale ΔP_θ , la cui entità viene man mano ridotta nel corso del processo iterativo. Essa ha lo stesso significato del carico residuo

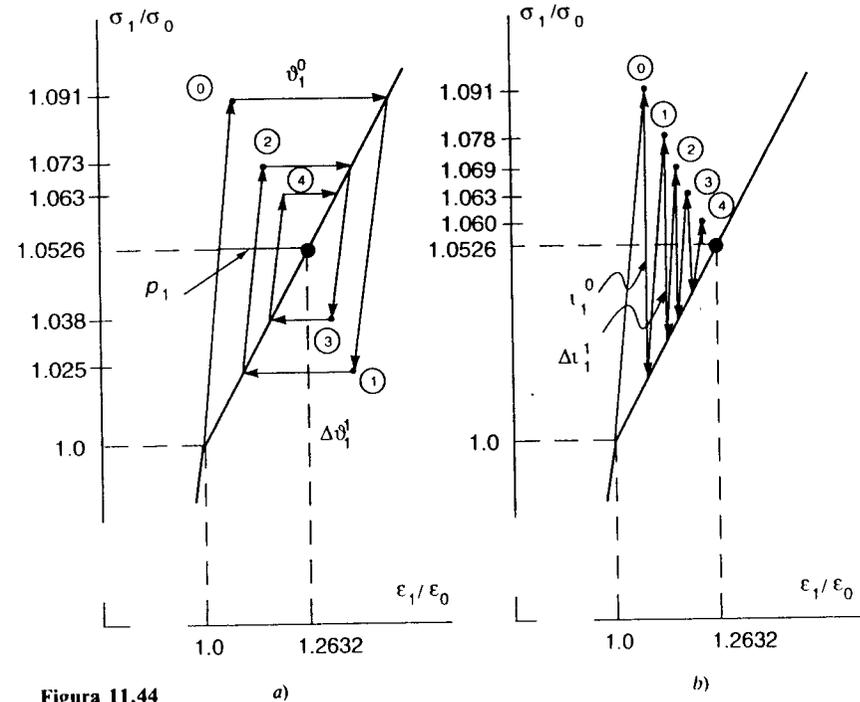


Figura 11.44

Φ^n introdotto con riferimento al metodo di Newton-Raphson. In effetti, in quanto operano con matrice di rigidezza costante, entrambi i procedimenti si configurano come particolari applicazioni della versione modificata del metodo, in cui le forze residue sono associate a deformazioni e sforzi iniziali, anziché calcolate a partire dalla (11.139).

È facile estendere a un contesto più generale quanto fatto per l'esempio precedente. La soluzione elastica della struttura soggetta alla condizione di carico rappresentata, nello spirito del metodo degli elementi finiti, dal vettore \mathbf{P} delle forze nodali, si scrive simbolicamente

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e^0 = \mathbf{B} \mathbf{L}_e \mathbf{U}^0 \quad \boldsymbol{\sigma}_e^0 = \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon}_e^0 \quad (11.149a-c)$$

dove \mathbf{d} rappresenta, al solito, la matrice delle costanti elastiche del materiale e \mathbf{K} è la matrice di rigidezza elastica dello schema discreto.

In alcune parti della struttura, gli sforzi e le deformazioni così calcolati non rispetteranno l'effettivo legame del materiale e devono essere iterativamente corretti. A ogni iterazione n si calcola, successivamente

$$\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{K}^{-1} \Phi^n \quad \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1} + \Delta \mathbf{U}^n \quad (11.150a, b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e^n = \mathbf{B} \mathbf{L}_e \mathbf{U}^n \quad \boldsymbol{\sigma}_e^n = \mathbf{d}(\boldsymbol{\varepsilon}_e^n - \boldsymbol{\vartheta}_e^n) + \boldsymbol{\zeta}_e^n \quad (11.150c, d)$$

dove $\boldsymbol{\vartheta}_e$ e $\boldsymbol{\zeta}_e$ rappresentano deformazioni e sforzi iniziali, a partire dai quali si calcolano i carichi residui Φ^n .

A) *Metodo delle deformazioni iniziali.* È richiesta un'espressione del legame nonlineare inverso, di cui la (11.145b) costituisce un esempio. Se definibile, tale legame può esprimersi simbolicamente nella forma

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (11.151)$$

dove le deformazioni sono state indicate con $\boldsymbol{\eta}$ per distinguerle da quelle calcolate tramite la (11.150c). A valle delle (11.150), ogni iterazione richiede allora di calcolare, in sequenza

$$\boldsymbol{\eta}_e^n = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}_e^n) \quad \Delta \boldsymbol{\vartheta}_e^n = \boldsymbol{\eta}_e^n - \boldsymbol{\varepsilon}_e^n \quad \boldsymbol{\vartheta}_e^n = \boldsymbol{\vartheta}_e^{n-1} + \Delta \boldsymbol{\vartheta}_e^n \quad (11.152a-c)$$

$$\Phi^{n+1} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}_e^t \int_{V_e} \mathbf{B}^t \mathbf{d} \Delta \boldsymbol{\vartheta}_e^n dV \quad (11.152d)$$

Ciò permette di passare all'iterazione successiva. Nella (11.150d) ovviamente si pone $\boldsymbol{\zeta}_e^n = \mathbf{0}$.

B) *Metodo degli sforzi iniziali.* Occorre ora un'espressione del legame nonlineare diretto, di cui la (11.145a) costituisce un esempio. Se definibile, essa può scriversi

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (11.153)$$

dove gli sforzi sono stati indicati con \mathbf{s} per distinguerli dalle analoghe quantità calcolate

attraverso la (11.150d). Le (11.152) sono allora sostituite dalle operazioni seguenti

$$\mathbf{s}_e^n = \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}_e^n) \quad \Delta \boldsymbol{\zeta}_e^n = \mathbf{s}_e^n - \boldsymbol{\sigma}_e^n \quad \boldsymbol{\zeta}_e^n = \boldsymbol{\zeta}_e^{n-1} + \Delta \boldsymbol{\zeta}_e^n \quad (11.154a-c)$$

$$\Phi^{n+1} = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}_e^t \int_{V_e} \mathbf{B}^t \Delta \boldsymbol{\zeta}_e^n dV \quad (11.154d)$$

Si procede quindi all'iterazione successiva. Nella (11.150d) si pone adesso $\boldsymbol{\vartheta}_e^n = \mathbf{0}$.

Entrambi i procedimenti terminano quando un'opportuna norma $\|\Phi^n\|$ del vettore dei carichi residui diviene minore di una tolleranza assegnata, solitamente relazionata all'entità $\|\mathbf{P}\|$ dei carichi esterni.

Quanto detto costituisce la versione più semplice dei metodi, che applica direttamente il valore finale del carico. Per problemi realistici, un tale modo di procedere difficilmente giungerebbe a convergenza e, se anche questo fosse il caso, richiederebbe un numero notevolissimo di iterazioni. Si preferisce quindi suddividere il processo di carico in una sequenza di passi. Le relazioni si mantengono inalterate, a patto di considerare le quantità in gioco come riferite alla transizione dalla situazione all'inizio del passo (nota in quanto risultato del calcolo relativo ai passi precedenti) alla situazione finale. In tal caso, si opera spesso con riferimento alla matrice tangente all'inizio del passo; nella (11.153d) la matrice elastica \mathbf{d} va allora sostituita con \mathbf{d}_T .

11.5.2 IL COMPORTAMENTO ELASTO-PLASTICO

11.5.2.1 Legame incrementale

Nel caso di condizioni di plasticità regolari (ad esempio, quella di Huber-Henky-von Mises), il legame elasto-plastico incrementale *associato* si riassume nelle relazioni (vedi Paragrafo 3.4)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{d} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{se } \varphi < 0 \quad (11.155a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{d}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - n \dot{\lambda}), \quad \dot{\varphi} = n^t \dot{\boldsymbol{\sigma}} - h \dot{\lambda}, \quad \dot{\varphi} \geq 0, \quad \dot{\varphi} \leq 0, \quad \dot{\varphi} \dot{\lambda} = 0 \quad \text{se } \varphi = 0 \quad (11.155b)$$

dove, si ricorda, $\varphi \leq 0$ definisce il dominio elastico istantaneo del materiale. φ è funzione del valore di sforzo corrente e della storia precedente. Nei punti $\mathbf{x} \in V_E$, in cui φ è strettamente negativo, la risposta incrementale è elastica. Nella rimanente parte V_P del mezzo, dove è $\varphi = 0$, possono invece prodursi incrementi di deformazione plastica $\dot{\boldsymbol{p}} = n \dot{\lambda}$. $n = \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma}$ è la normale uscente alla superficie $\varphi = 0$ nel punto rappresentativo dello stato di sforzo all'inizio del processo incrementale, $\dot{\lambda}$ il moltiplicatore plastico e h il parametro di incrudimento. Le ultime tre delle (11.155b) evidenziano una possibile alternativa nella risposta del materiale che, per $\varphi = 0$, può comportare o plasticizzazione ($\dot{\lambda} > 0$) o ritorno in campo elastico ($\dot{\lambda} < 0$). Questo aspetto (in gergo *alternativa carico-scarico*) riflette la natura irreversibile del comportamento.

Si è anche visto nel Capitolo 3 che per $h > n^t \mathbf{d} n$ il legame diretto $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ è univocamente definito. La (11.155b) si traduce allora nelle (3.105, 3.106), qui riscritte nella forma

$$\dot{\sigma} = \mathbf{d}_p \dot{\epsilon} \quad \mathbf{d}_p = \begin{cases} \mathbf{d} & \text{se } \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} \leq 0 \\ \mathbf{d} - \mathbf{d} \mathbf{n} (\mathbf{h} + \mathbf{n}' \mathbf{d} \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}' \mathbf{d} & \text{se } \mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} > 0 \end{cases} \quad (11.156a)$$

dove \mathbf{d}_p indica la matrice che governa il comportamento del materiale nel processo incrementale. Il legame inverso $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\dot{\sigma})$ è invece univocamente definito solo per $h > 0$. In tal caso si possono stabilire le (3.108, 3.109), che si scrivono anche

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{a}_p \dot{\sigma} \quad \mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{se } \mathbf{n}' \dot{\sigma} \leq 0 \\ \mathbf{a} - \mathbf{n} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{n}' & \text{se } \mathbf{n}' \dot{\sigma} > 0 \end{cases} \quad (11.156b)$$

dove $\mathbf{a} = \mathbf{d}_p^{-1}$ quando definibile.

11.5.2.2 Soluzione per elementi finiti

La formulazione del problema elasto-plastico associa al legame (11.156) le equazioni che governano l'equilibrio e la congruenza del mezzo, scritte in termini incrementali. La natura irreversibile del comportamento pone tuttavia alcuni problemi quando si vuole affrontare l'analisi mediante un approccio numerico, quale quello a elementi finiti.

Innanzitutto, non è a rigore possibile definire univocamente la matrice di rigidità tangente all'inizio del passo. In linea di principio, questa matrice si scrive

$$\mathbf{K}_p = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{k}_{pe} \mathbf{L}_e \quad \mathbf{k}_{pe} = \int_{V_e} \mathbf{B}' \mathbf{d}_p \mathbf{B} dV \quad (11.157a, b)$$

dove \mathbf{d}_p è espressa dalla (11.156a). Tale definizione, peraltro, incorpora l'alternativa carico-scarico e una scelta tra le due possibili espressioni per \mathbf{d}_p implica un'ipotesi sulla risposta nel passo. Nel caso di carichi monotonamente crescenti, si assume solitamente che le zone potenzialmente plasticizzabili non subiscano ritorni in campo elastico (che, cioè, risulti $\mathbf{n}' \mathbf{d} \dot{\epsilon} > 0$ ovunque in V_p). Questa ipotesi può essere modificata a posteriori se il risultato si rivela contraddittorio, ma ciò richiede un nuovo calcolo della soluzione, che può essere necessario effettuare più volte e senza alcuna garanzia di convergenza. A differenza del caso elastico non-lineare, il legame elasto-plastico non è differenziabile, e ciò impedisce di definire senza ambiguità la rigidità tangente.

In secondo luogo non si può evitare di sostituire il processo incrementale con un passo di carico di ampiezza finita. Questa può essere molto ridotta ma (anche prescindendo dall'onere computazionale associato alla soluzione di un numero notevole di passi) la semplice sostituzione dell'incremento infinitesimo con uno finito comporta un errore. È quindi necessario sostituire il legame incrementale (11.156) con relazioni nonlineari che approssimino il comportamento del materiale su di un passo finito.

Tali relazioni potrebbero essere ottenute integrando le (11.156) lungo particolari percorsi, a esempio *olonomi* (Paragrafo 6.3). Peraltro, espressioni esplicite sono disponibili solo per alcune condizioni di plasticità e particolari leggi di incrudimento [19] e una formulazione che non voglia vincolarsi a casi specifici deve basarsi su strategie alternative. È qui che i metodi degli sforzi e delle deformazioni iniziali presentano il loro principale vantaggio rispetto all'applicazione diretta del metodo di Newton-Raphson, eventualmente modificato. L'interpretazione meccanica di cui sono suscettibili le operazioni a essi relative si rivela infatti molto utile al fine di stabilire le modalità operative.

Il metodo delle deformazioni iniziali, (per una sua trattazione più completa, si veda [20]) si rifà all'approccio alla Colonnetti del problema elasto-plastico (Paragrafo 6.1.3.3), che considera le deformazioni plastiche alla stregua di un qualunque effetto deformativo di natura anelastica, agente su di una struttura elasto-lineare. Le deformazioni plastiche non sono note a priori e il procedimento le valuta iterativamente. È facile constatare che nell'Esempio 11.13 precedente i successivi ϑ'_i convergono all'effettivo valore p_1 della deformazione plastica nell'asta ① (Figura 11.44a).

Benché concettualmente spontaneo, il metodo è soggetto a forti limitazioni. Il calcolo delle deformazioni iniziali richiede l'utilizzo del legame elasto-plastico nella sua forma inversa, univocamente definita solo per materiali incrudenti. Se infatti il legame prevede un limite superiore al livello tensionale e se lo sforzo calcolato in un'iterazione lo eccede, non esistono deformazioni iniziali a esso associate. La convergenza del metodo è comunque molto lenta, come l'esempio, pur riferito a un materiale con incrudimento tutt'altro che piccolo, evidenzia. Se l'incrudimento è modesto, la convergenza, se pur sussiste, diviene penosa.

Il metodo degli sforzi iniziali (introdotto in [21]) è solitamente preferito. Esso utilizza il legame diretto, univocamente definito anche per materiali idealmente elasto-plastici o *softening* (purché sia $h > \mathbf{n}' \mathbf{d} \mathbf{n}$). Il suo significato può essere compreso considerando una struttura plasticizzata solo in zone molto limitate: il regime deformativo è allora, nella sostanza, governato dalla risposta elastica della parte più considerevole del mezzo e le deformazioni calcolate elasticamente possono essere, in prima approssimazione, ritenute valide ovunque; gli sforzi che a esse conseguono, laddove eccedono il limite di snervamento, vengono ricondotti al rispetto del legame costitutivo. È questo il primo passo del procedimento. La correzione comporta una violazione dell'equilibrio, man mano ridotta nelle successive iterazioni. Chiaramente, se le deformazioni plastiche coinvolgono zone estese o se, pur localizzate, sono notevoli, la soluzione elastica è un'approssimazione grossolana anche in termini deformativi e la ricostruzione della risposta effettiva può richiedere un numero molto elevato di iterazioni.

Il preciso significato meccanico attribuibile nei due metodi alle forze residue consente di operare, sia pure in via approssimata, senza definire esplicitamente un legame in termini finiti. Ci si accontenta spesso di imporre che gli sforzi in soluzione rispettino la condizione di plasticità $\varphi \leq 0$. In presenza di incrudimento, la legge di evoluzione di φ viene di regola espressa in termini di sforzi e deformazioni efficaci (Paragrafo 6.3.2) o di analoghe misure invarianti dei regimi tensionale e deformativo [4,22]. Non esiste un unico modo per ricondurre lo stato di sforzo al rispetto della condizione di plasticità e le diverse strategie danno luogo a risultati diversi. Operando in termini di sforzi iniziali, la soluzione è solitamente adeguata per quanto riguarda il livello globale di sollecitazione, ma non altrettanto per le singole componenti di sforzo; ancora meno attendibili risultano i valori delle deformazioni plastiche. I dettagli operativi sono comunque piuttosto delicati e richiedono di distinguere tra i vari casi che possono verificarsi (tipicamente, tra punti plasticizzabili all'inizio del passo e punti originariamente elastici che giungono a snervamento nel passo stesso). Essi sono descritti esaurientemente in [22], dove si possono trovare anche esempi di programmazione.

Va osservato che il procedimento, non essendo in grado di rappresentare l'alternativa carico-scarico insita nell'irreversibilità del comportamento, assume di fatto un comportamento elastico non-lineare nel passo. Eventuali ritorni in campo elastico successivi alla produzione di deformazioni permanenti sono al più possibili all'inizio del passo, ma all'interno di ognuno di questi il comportamento è inevitabilmente reversibile.

Un ulteriore problema è legato all'integrazione numerica, senza cui non è concepibile il calcolo della matrice di rigidità tangente all'inizio del passo e del vettore dei carichi residui a ogni iterazione. La (11.157b) viene approssimata dalla relazione

$$\mathbf{k}_p \approx \sum_{g=1}^G w_g J(\xi_g) \hat{\mathbf{B}}'(\xi_g) \mathbf{d}_p(\xi_g) \hat{\mathbf{B}}(\xi_g) \quad (11.158a)$$

dove ξ_g indica la coordinata del g -esimo punto di Gauss, w_g il peso a esso relativo e J è lo Jacobiano della trasformazione (11.103). In modo analogo, le forze residue (11.152d), (11.154d) si calcolano per ogni elemento scrivendo, rispettivamente per i metodi delle deformazioni e degli sforzi iniziali

$$\beta_c \approx \sum_{g=1}^G w_g J(\xi_g) \hat{\mathbf{B}}'(\xi_g) \mathbf{d}_p(\xi_g) \Delta \mathcal{V}_c(\xi_g) \quad \beta_c \approx \sum_{g=1}^G w_g J(\xi_g) \hat{\mathbf{B}}'(\xi_g) \Delta \zeta_c(\xi_g)$$

Tali contributi vengono poi assemblati seguendo il procedimento generale, simbolicamente espresso dalle relazioni

$$\mathbf{K}_p = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \mathbf{k}_p \mathbf{L}_e \quad \Phi = \sum_{e=1}^N \mathbf{L}'_e \beta_e \quad (s1, 2)$$

Le (11.158) richiedono la conoscenza di \mathbf{d}_p e delle deformazioni o sforzi iniziali nei punti di Gauss e spontaneamente suggeriscono di imporre il legame costitutivo del materiale limitatamente a tali punti [23]. Il calcolo risulta semplice, ma la scelta dei punti di integrazione si rivela cruciale. Un'integrazione completa produce spesso soluzioni irrealisticamente rigide. L'integrazione ridotta può eliminare l'inconveniente, ma non è sempre applicabile: annullando la rigidità di alcuni modi deformativi, essa infatti riduce il *grado di iperstaticità* dello schema discreto e quindi la sua capacità di ridistribuire gli sforzi che, in campo elasto-plastico, è indispensabile sia adeguatamente rappresentata.

Questo comportamento può essere compreso se si immagina di basare la formulazione a elementi finiti del problema elasto-plastico sul teorema di estremo a due campi (6.27-29). Occorre allora introdurre un modello, oltre che per gli spostamenti, per i moltiplicatori plastici λ (a rigore, nonnegativi in V_p). È possibile dimostrare che le (11.158) sottintendono per λ (e quindi per le deformazioni plastiche) un'interpolazione polinomiale sui punti di Gauss. Se il loro numero è tale da assicurare l'integrazione completa, le deformazioni plastiche risultano di grado più elevato che non le deformazioni totali e l'eccesso di rigidità che spesso si riscontra è attribuibile al conflitto tra i due andamenti [24]. La trattazione di questo aspetto esula ovviamente dalla natura introduttiva di questo capitolo (per un esempio degli inconvenienti che possono verificarsi, si veda l'Esercizio 11.16).

Molto di quanto detto per il comportamento elasto-plastico si applica anche a altri legami nonlineari. Il comportamento elasto-plastico è forse uno dei più delicati; altri legami, a esempio quelli basati su modelli reologici, possono essere esplicitati in almeno una delle due forme diretta o inversa (nel secondo caso, il metodo delle deformazioni iniziali diviene preferibile) con notevoli vantaggi operativi, al punto che è a volte conveniente riguardare il problema elasto-plastico come situazione limite di un problema elasto-viscoplastico e affrontarne la soluzione con algoritmi relativi a questo comportamento [4].

Le nonlineari del materiale possono quindi essere facilmente incorporate nel meto-

do degli elementi finiti, associando alle relazioni cinematiche e statiche del modello (Tabella 11.2) il particolare legame costitutivo in considerazione. Quanto detto però evidenzia come il procedimento sia solo illusoriamente semplice: senza una buona consapevolezza delle implicazioni delle singole operazioni, risulta difficile stabilire la portata delle approssimazioni introdotte e quindi la qualità della soluzione. Questo fatto, peraltro, non deve scoraggiare l'utilizzo del metodo in questo ambito. Se consapevolmente applicato, esso consente di ottenere soluzioni ingegneristicamente adeguate per problemi altrimenti non affrontabili.

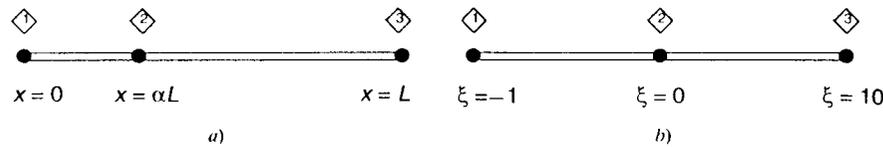


Figura 11.E13

si ottengono con $G = 2$ (assumere sempre $\alpha = 1/3$; non si suggerisce l'uso di questo elemento per il problema in esame)

11.14 In Figura 11.E14a è illustrato un elemento monodimensionale per problemi assialsimmetrici (deformazione piana); esso ha raggio medio R e lunghezza $2h$. La sola componente di spostamento diversa da zero è quella radiale $s = s(r)$, da cui conseguono le deformazioni

$$\epsilon_r = \frac{ds}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{s}{r} \quad (\epsilon_z = 0)$$

a) Determinare la matrice di rigidità dell'elemento assumendo il modello

$$s(r) = a_1 + a_2 \frac{r}{2h}$$

e identificando gli spostamenti nodali con i valori agli estremi ($u_1 = s(R-h)$ e $u_2 = s(R+h)$). Integrare numericamente con $G = 1$.

b) Calcolare la risposta di un cilindro di raggi interno $a = 1$ ed esterno $b = 2$, soggetto a pressione interna p e schematizzato con due elementi di questo tipo (Figura 11.E14b); confrontare i risultati (spostamenti nodali e sforzi nel punto di Gauss di ogni elemento) con quelli esatti (4.111) e (4.110). Assumere $\nu = .3$.

11.15 Risolvere coi metodi di Newton-Raphson e di Newton-Raphson modificato le seguenti equazioni nonlineari, di cui viene data la soluzione a cinque cifre significative

$$\Phi_1(U) = \sqrt{5 + U^2} - \frac{3}{2} e^{U'} = 0 \quad (U = .41629)$$

$$\Phi_2(U) = \frac{U - U^2}{\sqrt{1 + U}} - 0.1 = 0 \quad (U = .12032)$$

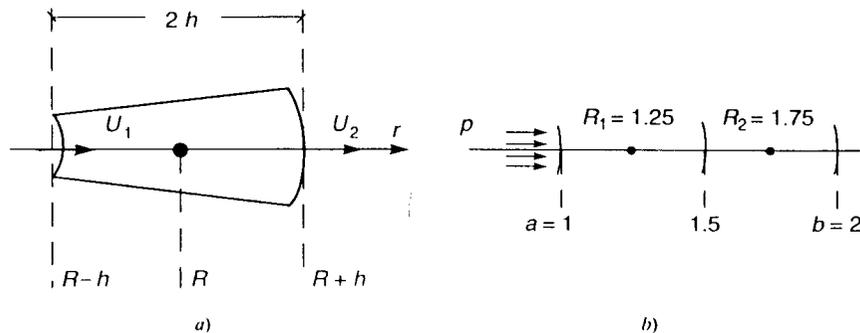


Figura 11.E14

$$\Phi_3(U) = U + \frac{1}{8} U^3 - 3.0 = 0 \quad (U = 2.0000)$$

11.16 L'elemento biella a tre nodi in Figura 11.E16a è costituito da un materiale elasto-plastico con comportamento bilineare (Figura 11.E16b). Se ne calcolino le matrici di rigidità elasto-plastiche usando $G = 2$ e $G = 3$. Supporre nei due casi

- $G = 2$: punto 1 plastico, punto 2 elastico
- $G = 3$: punto 1 plastico, punti 2,3 elastici

Si consideri inoltre l'asta in Figura 11.E16c, soggetta al peso proprio $n = (A\sigma_0/2l)$ per unità di lunghezza e a una forza F all'estremo libero, crescente da zero. Supponendo il materiale idealmente elasto-plastico ($\alpha = 0$), calcolare l'evoluzione fino a collasso della struttura controllando la plasticità sia in due che in tre punti di Gauss.

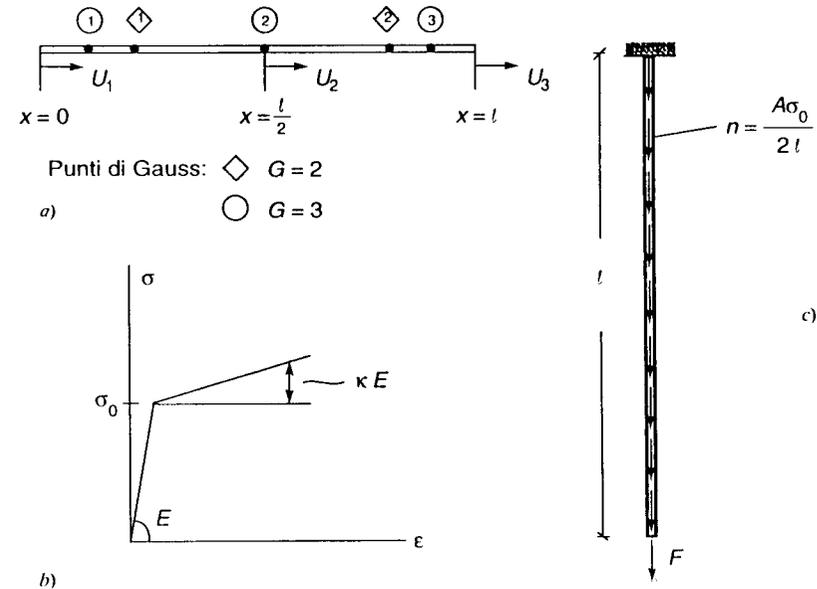


Figura 11.E16

BIBLIOGRAFIA

- [1] NORRIS C.H., WILBUR J.B., *Elementary Structural Analysis*, 2^a ed., McGraw-Hill, New York, 1960.
- [2] HRENNIKOFF A., Solutions of problems of elasticity by the framework method, *J. Appl. Mech.*, 8, p.A169 (1941)
- [3] TURNER M.J., CLOUGH R.W., MARTIN H.C., TOPP L.J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.*, 23, p.805 (1956)
- [4] ZIENCKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The Finite Element Method*, 2 vol., McGraw-Hill, Londra, 1988-1991.

- [5] ARGYRIS J.H., KELSEY S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, Londra, 1960.
- [6] BATHE K.J., *Finite Element Procedures in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Int., Londra, 1982.
- [7] COOK R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2^a ed., John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [8] STRANG G., FIX G.J., *An analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [9] HINTON E., CAMPBELL J.S., Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least square method, *Int.J.Num.Meth. Engng*, **8**, p.461 (1974).
- [10] BARLOW J., Optimal stress locations in finite element models, *Int.J. Num.Meth.Engng*, **10**, p.243 (1976).
- [11] CORRADI L., On stress computation in displacement finite element models, *Comp.Meth.Appl.Mech.Engng*, **54**, p. 325 (1986).
- [12] BARLOW J., More on optimal stress points - Reduced integration, element distortions and error estimation, *Int.J.Num.Meth.Engng*, **28**, p.1487 (1989).
- [13] MORLEY L.S.D., The constant moment plate bending element, *J.Strain Anal.*, **6**, p. 20 (1971).
- [14] GOLUB G.H., WELSH J.H., Calculation of Gauss quadrature rules, *Math.Comp.*, **23**, p. 221 (1969).
- [15] PEANO A.G., Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending, *Comp.Meth.Appl.*, **2**, p. 99 (1976).
- [16] HINTON E., OWEN D.R.J., *An introduction to finite element computation*, Pineridge Press Limited, Swansea, G.B., 1979.
- [17] TEZCAN S.S., Computer analysis of plane and space structures, *Proc.ASCE, J.Strct.Div.*, **92**, p.143 (1966).
- [18] DUFF I.S., A survey of sparse matrix research, *Proc.IEEE*, **65**, p. 500 (1977).
- [19] MARTIN J.B., *Plasticity - Fundamentals and general results*, MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [20] ARGYRIS J.H., Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua, *J.Roy.Aero.Soc.*, **32**, p. 700 (1974).
- [21] ZIENKIEWICZ O.C., VALLIAPPAN S., KING I.P., Elasto-plastic solutions of engineering problems - Initial stress, finite element approach, *Int.J. Num.Meth.Engng*, **1**, p.75 (1969).
- [22] OWEN D.R.J., HINTON E., *Finite elements in plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, G.B., 1980.
- [23] NAYAK G.C., ZIENKIEWICZ O.C., Elasto-plastic stress analysis - A generalization for various constitutive relations including strain softening, *Int.J.Num.Meth.Engng*, **5**, p. 113 (1972).
- [24] CORRADI L., Finite element modelling of the elastic-plastic problem, in: *Mathematical programming methods in structural plasticity*, ed. D. Lloyd Smith, p. 255, Springer Verlag, Vienna, 1990.

Il metodo degli elementi finiti: sviluppi ulteriori

12.1 LIMITAZIONI DELL'APPROCCIO AGLI SPOSTAMENTI

12.1.1 INTRODUZIONE

Nella pratica applicativa, l'approccio agli spostamenti gode di una posizione di privilegio quasi assoluto, al punto che questa versione del procedimento viene a volte inconsapevolmente identificata con il metodo degli elementi finiti nella sua interezza. Ciò è dovuto non solo alla sua generalità e facilità di applicazione, ma anche alla sua semplicità concettuale. L'approccio agli spostamenti, infatti, generalizza in maniera spontanea e diretta l'idea della modellazione cinematica alla base delle classiche teorie strutturali, pervenendo a una formulazione estremamente versatile, traducibile in algoritmi gestibili in modo molto efficiente da strumenti di calcolo automatico.

Molte delle proprietà delle teorie strutturali si trasferiscono pressoché inalterate nel nuovo contesto. Purtroppo a volte si trasferiscono anche gli inconvenienti. Quello più frequentemente riscontrato è l'eccesso di rigidità, dovuto ai vincoli che un modello cinematico fatalmente introduce nel problema originario. I modelli flessionali di trave o di piastra trascurano il contributo delle deformazioni taglianti e producono quindi soluzioni più rigide che non le formulazioni che le considerano; l'effetto è marginale se la trave è snella o la piastra sottile, ma può divenire sensibile in caso contrario. Anche uno schema ad elementi finiti basato su di un modello agli spostamenti può presentare rigidità eccessiva, talvolta al punto di non essere in grado di rappresentare neppure gli aspetti essenziali del comportamento strutturale.

12.1.2 PROBLEMI "VINCOLATI"

ESEMPIO 12.1 Si inizia a discutere il fenomeno con riferimento alla mensola a sezione costante in Figura 12.1a. Il problema era già stato risolto in precedenza (Esempio 7.2) e si era ottenuto per lo spostamento trasversale all'estremo libero il valore

$$f = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\beta} \right) \quad \beta = L^2 \frac{GA}{EI} \quad (12.1a, b)$$

Il termine $3/\beta$ rappresenta il contributo percentuale delle deformazioni taglianti, che diviene rapidamente trascurabile al crescere di β e quindi, a parità di sezione, di L . L'esempio era stato in effetti utilizzato per legittimare l'introduzione del modello puramente flessionale di trave.

Si vuole ora trovare una soluzione a elementi finiti del problema, basata sul modello