

1.3. Considerazioni applicative

L'uso di scale logaritmiche per l'asse delle ampiezze dei componenti di una vibrazione è utile per la diagnosi dei difetti perché:

- le variazioni relative sono più visibili;
- ad una variazione di n dB alla sorgente corrisponderà una variazione di n dB in tutti i punti di misura, indipendentemente dal percorso di trasmissione del segnale e dal livello del segnale;
- tutti i criteri di valutazione della vibrazione considerano che uguali variazioni su scala logaritmica abbiano uguale rilevanza.

L'uso di scale logaritmiche per l'asse delle frequenze è utile per la diagnosi dei difetti perché:

- ♦ si riesce a visualizzare un ampio intervallo di frequenze (3 decadi), quindi difetti aventi frequenze molto diverse;
- ♦ la compensazione di velocità si riduce ad una semplice traslazione laterale dello spettro. Se varia la velocità dell'organo rotante, varia la frequenza; poiché a prodotti o quozienti corrispondono, in scala logaritmica, somme o differenze, ad una certa variazione percentuale di velocità corrisponderà una certa traslazione laterale dello spettro.

L'analisi a larghezza di banda costante si effettua con una scala delle frequenze lineare, fornisce un'uguale risoluzione su tutto l'asse delle frequenze (quindi una migliore risoluzione alle alte frequenze rispetto all'analisi ad ampiezza di banda percentuale costante), rende più facile l'identificazione di famiglie di armoniche e di bande laterali. Il suo limite è il fatto che il campo di frequenze analizzato è ristretto (tipicamente una decade e mezza).

L'analisi a larghezza di banda percentuale costante si effettua con una scala delle frequenze logaritmica. Grazie ad essa copre un ampio campo di frequenze (tipicamente 3 o 4 decadi) ed è quindi utile per la rilevazione dei difetti, perché è necessario poter analizzare contemporaneamente frequenze molto diverse. Nel caso dell'analisi delle risposte dinamiche di una struttura, la larghezza di banda dei picchi di risonanza è legata allo smorzamento; più precisamente il fattore di smorzamento è $\frac{1}{2Q}$ dove Q è il fattore di qualità, essendo $\frac{1}{Q} = \frac{\Delta f}{f_n}$ la larghezza di banda relativa di un picco di risonanza. Dove lo smorzamento è costante, le risonanze

avranno una Q costante; sarebbe quindi meglio usare un'analisi a Q costante. L'analisi a larghezza di banda percentuale costante è un'analisi a Q costante. Poiché però in genere questa tematica è affrontata su analizzatori FFT si deve necessariamente giungere ad un compromesso: analisi a larghezza di banda costante su scala logaritmica delle frequenze.

1.4. La rappresentazione logaritmica dei moti armonici

La rappresentazione dello spostamento, della velocità, dell'accelerazione, in funzione della frequenza, per moti sinusoidali, in un diagramma logaritmico su entrambi gli assi, è di grande utilità ed è usata spesso ad es. per esprimere le specificazioni, ossia le limitazioni operative, degli intervalli di funzionamento di trasduttori di vibrazioni o di eccitatori di vibrazioni. Se $x = x_p \sin 2\pi ft$, derivando si ottengono i valori di picco della velocità e dell'accelerazione:

$$v_p = 2\pi f x_p \quad a_p = 4\pi^2 f^2 x_p = 2\pi f v_p$$

Quindi v_p può essere espresso con le due seguenti espressioni logaritmiche:

$$\ln v_p = \ln 2\pi f + \ln x_p \quad \ln v_p = \ln a_p - \ln 2\pi f$$

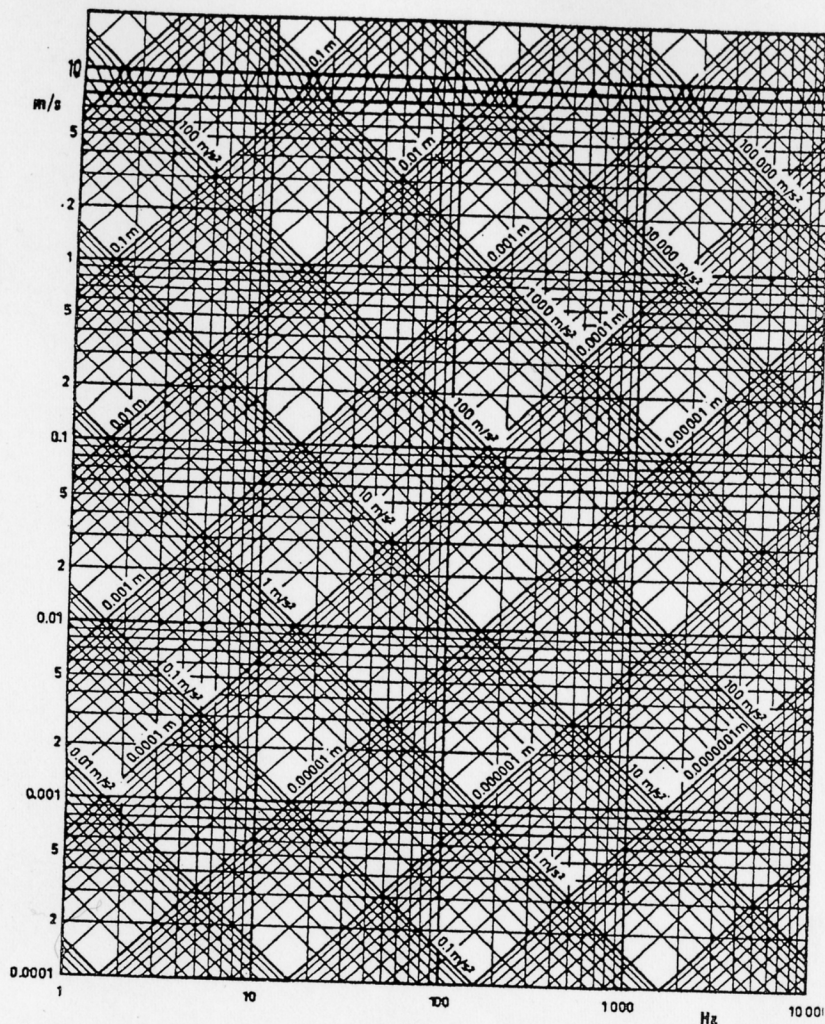
La prima, che corrisponde al caso in cui si fissa lo spostamento x_p , è dunque una retta con pendenza +1 nel piano velocità-frequenza in scala logaritmica su entrambi gli assi. La seconda, che corrisponde al caso in cui si fissa l'accelerazione a_p , è dunque una retta con pendenza -1 nello stesso piano. Il nomogramma della fig. 3 permette di ricavare i valori corrispondenti dello spostamento, della velocità, dell'accelerazione in moti sinusoidali di frequenza nota.

2. I segnali e l'analisi dei segnali

2.1. Analisi del segnale. Descrittori per l'analisi del segnale nel dominio del tempo

Si considerino inizialmente funzioni sinusoidali.

$$x(t) = x_p \sin(2\pi ft)$$



Detti $T = 1/f$ il periodo e f la frequenza, il valore medio nel periodo è nullo. x_p è il **valore di picco**.

Il valore medio assoluto x_m è il valore medio della semionda positiva del ciclo:

$$x_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} x_p \sin(2\pi ft) dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi f} x_p \sin(2\pi ft) d(2\pi ft) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x_p \sin \theta d\theta = 0,64 x_p$$

→ Il **valore efficace** x_{RMS} è la radice quadrata della media, in un ciclo, dei valori al quadrato:

$$x_{RMS} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T [x_p \sin(2\pi f t)]^2 dt \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi f} [x_p \sin(2\pi f t)]^2 d(2\pi f t) \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x_p \sin \theta)^2 d\theta \right]^{1/2} = \frac{x_p}{\sqrt{2}} = 0,71 x_p$$

od anche $x_{RMS} = 0,71x_p = 0,71 \cdot \frac{x_m}{0,64} = 1,11x_m$.

Il valore picco-picco x_{pp} è:

$$x_{pp} = 2x_p$$

Il fattore di cresta F_c è:

$$F_c = \frac{x_p}{x_{RMS}} = \sqrt{2}$$

Il fattore di forma F_f è:

$$F_f = \frac{x_{RMS}}{x_m} = 1,11$$

La fig. 4 mostra le grandezze indicate.
In generale:

In generale, passando a considerare segnali generici, non necessariamente sinusoidali, i descrittori che si usano per l'analisi dei segmenti di storie temporali acquisite sono:

- il massimo valore;
- il minimo valore;
- il valore estremo;
- la media;
- il valore RMS;
- il fattore di cresta $\left(\frac{\text{valore estremo}}{\text{valore RMS}} \right)$;
- i momenti statistici di ordine superiore (varianza, skewness, kurtosis).

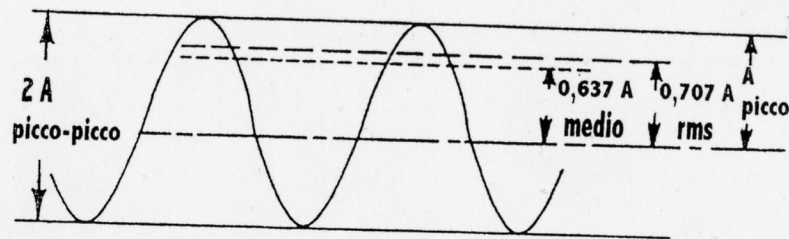


Fig. 4

Si distinguono momenti statistici intorno all'origine e momenti statistici intorno alla media (momenti centrali).

Per un insieme finito di N numeri reali $\{x_i\}$, l' n -esimo momento intorno all'origine è dato da

$$\nu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^n$$

Il momento di ordine 1 intorno all'origine è la media $\bar{x} = \nu_1$.
L' n -esimo momento centrale è dato da

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^n$$

Il momento centrale di ordine 2 è la **varianza** σ^2 . La radice quadrata della varianza è la **deviazione standard** σ .

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Per segnali aventi valor medio nullo la varianza è uguale al valor medio dei quadrati e la deviazione standard è il valore RMS.

Per poter effettuare validi confronti fra differenti insiemi di valori è più conveniente se i momenti statistici di ordine superiore sono normalizzati mediante l'appropriata potenza della deviazione standard.

$$\mu_n = \frac{1}{N\sigma^n} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^n$$

Il momento centrale di ordine 3, normalizzato, si chiama **skewness** o **fattore di asimmetria** (in francese vrillage) ed è una misura di asimmetria (v. fig. 5)

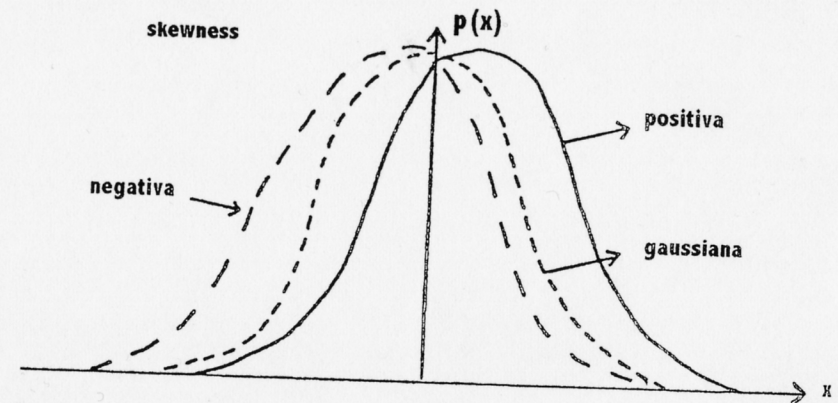


Fig. 5

$$\text{skewness} = \mu_3 = \frac{1}{N\sigma^3} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3$$

Se l'insieme di numeri ha una distribuzione gaussiana la skewness è zero; si noti però che anche altre distribuzioni casuali possono avere skewness nulla.

Una skewness zero implica che i valori, specialmente quelli più lontani dal valore medio, siano ugualmente distribuiti sui due lati.

Il momento centrale di ordine 4, normalizzato, si chiama **kurtosis** o **fattore di appiattimento** (in francese élargissement) ed è una misura di appiattimento nella distribuzione (v. fig. 6).

$$\text{kurtosis} = \mu_4 = \frac{1}{N\sigma^4} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4$$

In altre parole, se la maggior parte dei numeri hanno valori vicini alla media e solo pochi se ne discostano, la curva di distribuzione mostra un picco elevato intorno alla media e cade a zero rapidamente tutt'attorno da entrambi i lati. In questo caso la kurtosis ha un valore basso e la curva di distribuzione è detta **leptokurtica**.

Se invece il valore della kurtosis è elevato, la curva di distribuzione è allargata ed è detta **platokurtica**. Una curva di distribuzione gaussiana ha una kurtosis il cui valore è 3. La tab. 3 riporta alcuni valori tipici di kurtosis.

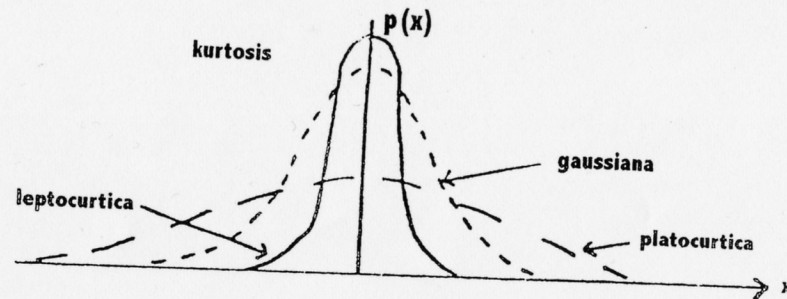


Fig. 6

Tab. 3

Segnale	Kurtosis
Seno	1,5
Onda quadra	1
Onda triangolare	1,75
Casuale	3
Urto	>3

Poiché la kurtosis usa la quarta potenza di ogni valore, l'effetto di un piccolo numero di valori elevati diviene già significativo. Questo può essere utile per la rivelazione dell'insorgere di difetti fin dal loro stadio iniziale.

Si definisce **funzione di autocorrelazione** $R_{xx}(\tau)$ di un segnale $x(t)$ il valore atteso del prodotto $x(t)x(t+\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)x(t+\tau)dt$$

Si definisce **funzione di mutua correlazione** $R_{xy}(\tau)$ di $x(t)$ e $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)y(t+\tau)dt$$

Per $\tau = 0$ si ha:

$$R_{xx}(\tau = 0) = E[x^2(t)]$$

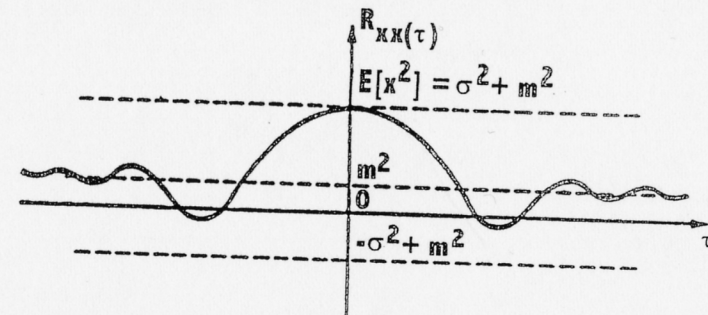


Fig. 7

cioè il valore assunto dalla funzione di autocorrelazione per $\tau = 0$ è il valore quadratico medio.

➔ Per un processo stazionario $R_{xx}(\tau)$ deve dipendere solo dal tempo di separazione τ e non dal tempo assoluto t e quindi:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t-\tau)x(t+\tau-\tau)] = E[x(t-\tau)x(t)] = E[x(t)x(t-\tau)] = R_{xx}(-\tau)$$

cioè $R_{xx}(\tau)$ è una funzione pari di τ (fig. 7): $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$.

Per una migliore comprensione della fig. 7 si ricordi che:

$$E[x] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$p(x)$ = densità di probabilità

$p(x) dx$ = frazione del tempo totale per la quale la $x(t)$ è compresa fra x e

$$x + dx = \frac{1}{T} (dt_1 + dt_2 + dt_3 + \dots) = \frac{1}{T} \sum dt$$

σ = deviazione standard di x

σ^2 = varianza di $x = E[(x - E[x])^2]$

Quindi:

$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] = E[x^2 - 2xE[x] + (E[x])^2] = E[x^2] - 2E[x]E[x] + (E[x])^2$$

ossia:

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

varianza = (deviazione standard)² = valore quadratico medio - (valor medio)²

Se si usa la notazione $E[x] = m$ si ha

$$E[x^2] = \sigma^2 + m^2$$

Nel caso particolare di distribuzione di probabilità normale, cioè gaussiana, il valor medio e la varianza sono legati alla densità di probabilità dalla

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Sempre per un processo stazionario:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t-\tau)y(t+\tau-\tau)] = E[x(t-\tau)y(t)] = E[y(t)x(t-\tau)] = R_{yx}(-\tau)$$

ed analogamente

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

ma in generale $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ non sono uguali e, a differenza dell'autocorrelazione, non sono neppure funzioni pari di τ (fig. 8).

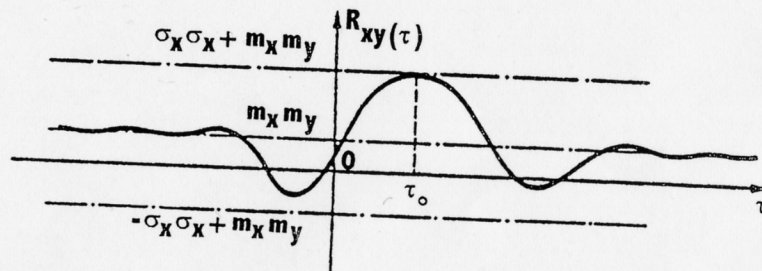


Fig. 8

2.2. Elementi di analisi del segnale nel dominio delle frequenze

2.2.1. La serie di Fourier

Si consideri una funzione periodica di periodo T . Se sono soddisfatte opportune condizioni, una funzione periodica può essere espressa come somma di seni e coseni.

Oltre alla periodicità, per l'esistenza della serie di Fourier devono essere soddisfatte le seguenti condizioni (condizioni di **Dirichlet**):

- ① se la funzione presenta discontinuità il loro numero deve essere finito in ciascun periodo;
- ② la funzione deve contenere un numero finito di massimi e minimi in ciascun periodo;
- ③ la funzione deve essere integrabile in valore assoluto in ogni periodo, cioè:

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

Esistono delle funzioni per le quali non esiste la serie di Fourier; tuttavia nei casi pratici di sistemi reali se la funzione è periodica le condizioni di Dirichlet sono sempre verificate.

La serie di Fourier a coefficienti reali è:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \cos \frac{2\pi i t}{T} + b_i \sin \frac{2\pi i t}{T} \right]$$

$$\text{frequenze} = f_i = \frac{i}{T} \\ i = 1, 2, \dots, \infty$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin \frac{2\pi k t}{T} dt$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Mediante le formule di Eulero, i seni ed i coseni possono essere espressi come esponenziali complessi.

Si ha quindi la serie di Fourier a coefficienti complessi:

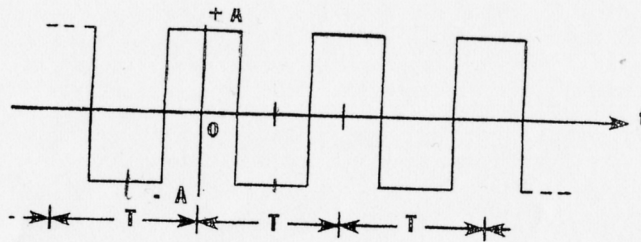


Fig. 9

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

$$x(k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \infty$$

Se ad esempio si considera l'onda quadra della fig. 9, essa soddisfa le condizioni di Dirichlet. Il suo valor medio è nullo, perciò:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0$$

Gli integrali che danno i coefficienti dei termini in seno nel caso in esame sono nulli, perciò la serie contiene solo i coseni:

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_0 t + \dots \right)$$

Se la precedente onda quadra è approssimata con un numero finito di termini nello sviluppo in serie, è ovvio che la ricostruzione dell'onda non è perfetta (fig. 10). All'aumentare del numero di termini considerati

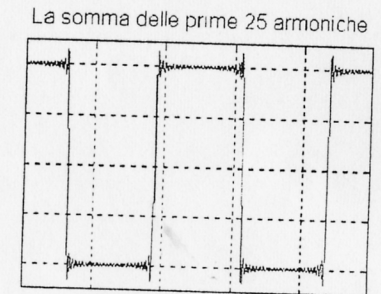
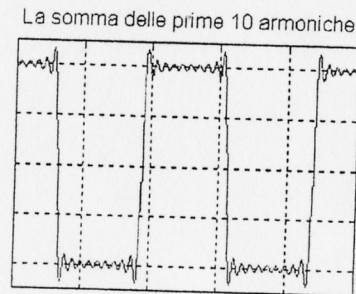
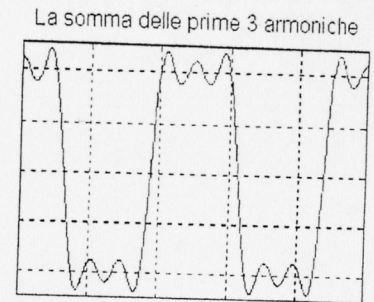
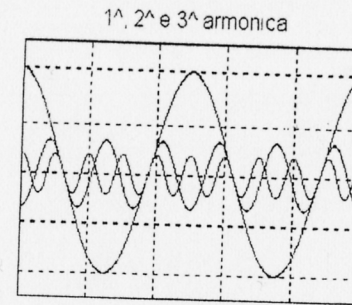


Fig. 10

le oscillazioni intorno alla forma d'onda teorica decadono più rapidamente ed hanno frequenza più elevata; Gibbs ha però dimostrato che la sovranelongazione massima è costante e pari all'8,95% della discontinuità originale del segnale. La sovranelongazione rimane costante a tale valore e non sparisce neppure considerando infiniti termini (fig. 11). Il fenomeno di Gibbs consiste dunque nel fatto che, quando esistono discontinuità nella forma d'onda originaria, la serie di Fourier fornisce la forma originale in tutti i punti eccettuate le discontinuità. Ad ogni discontinuità vi è sempre una sovranelongazione; essa vale l'8,95% dell'ampiezza della discontinuità.

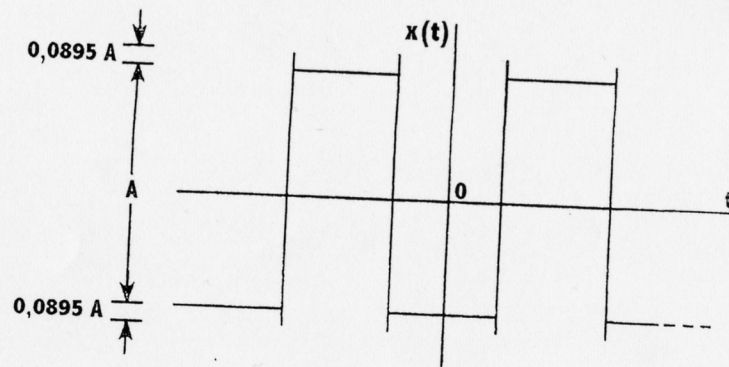
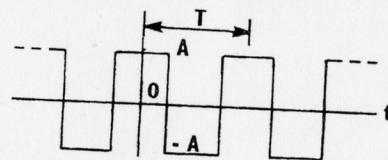
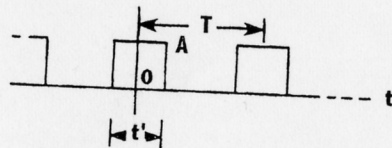


Fig. 11

Sviluppi in serie di Fourier di alcune forme d'onda comuni sono riportati nella fig. 12.



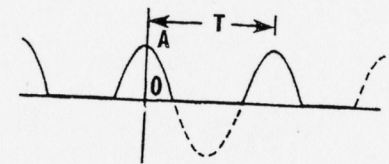
$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7 \omega_0 t + \dots \right)$$



$$x(t) = A \left[k + \frac{2}{\pi} \left(\sin k \pi \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2k \pi \cos 2 \omega_0 t + \frac{1}{n} \sin n k \pi \cos n \omega_0 t + \dots \right) \right]$$

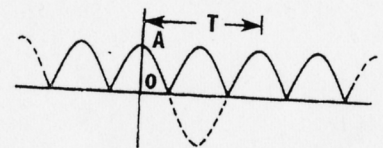
$$k = t_0 / T$$

Fig. 12



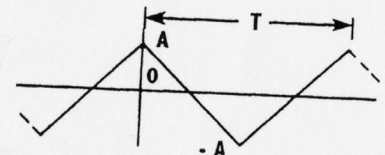
$$x(t) = \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_0 t + \frac{2}{3} \cos 2 \omega_0 t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega_0 t + \frac{2}{35} \cos 6 \omega_0 t - \dots + (-1)^{n/2+1} \frac{2}{n^2 - 1} \cos n \omega_0 t \dots \right)$$

n pari

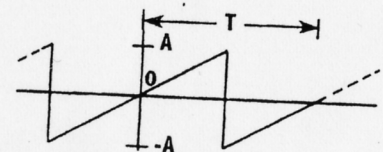


$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2 \omega_0 t - \frac{2}{15} \cos 4 \omega_0 t + \frac{2}{35} \cos 6 \omega_0 t - \dots + (-1)^{(n/2)+1} \frac{2}{n^2 - 1} \cos n \omega_0 t \dots \right)$$

n pari



$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3 \omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5 \omega_0 t + \dots \right)$$



$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t - \frac{1}{4} \sin 4 \omega_0 t + \dots \right)$$

Fig. 12 - Segue

2.2.2. La trasformata di Fourier

Una funzione non periodica $x(t)$ viene trattata come periodica con periodo infinito.

$$T X(k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

La frequenza delle armoniche è k/T e la loro spaziatura è $1/T$. Per $T \rightarrow \infty$ la frequenza tende a divenire una funzione continua:

$$f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{k}{T}$$

Definendo:

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T X(k)$$

si ha:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

detta **trasformata diretta di Fourier** della $x(t)$ od anche spettro della $x(t)$. Essa è anche detta trasformata integrale di Fourier ed esprime il segnale nel dominio delle frequenze a partire da quello nel dominio del tempo.

$X(f)$ esiste se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{condizione di Dirichlet}$$

Per ricavare la trasformata inversa si moltiplica e divide per T la serie di Fourier a coefficienti complessi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T X(k) e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \frac{1}{T}$$

$$df = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{T} - \frac{k}{T} \right) = \frac{1}{T}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{trasformata inversa di Fourier}$$

Essa esprime il segnale nel dominio del tempo, a partire da quello nel dominio delle frequenze.

Ovviamente, se invece della frequenza si considera la pulsazione ω :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

La trasformata di Fourier è una funzione complessa, rappresentabile in forma polare (modulo e fase) o in forma rettangolare complessa (parte reale e parte immaginaria)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \text{Re}(f) + j \text{Im}(f)$$

La fig. 13 riporta ad esempio la trasformata di Fourier di un segnale rettangolare che ha inizio al tempo $t = 0$.

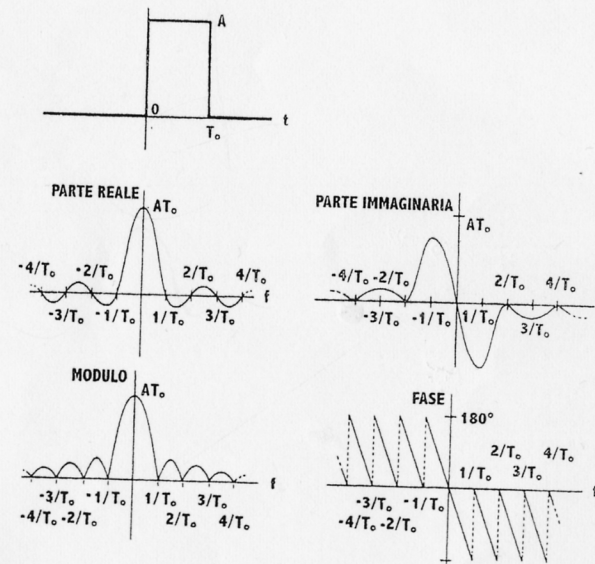


Fig. 13

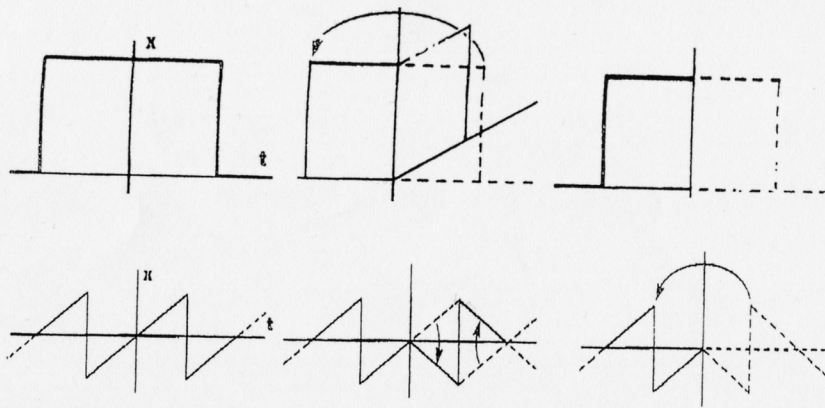


Fig. 14

Per definizione una funzione del tempo è detta:

funzione pari (o simmetrica) se $x(t) = x(-t)$
funzione dispari (o antisimmetrica) se $x(t) = -x(-t)$

In altri termini, la forma d'onda corrispondente ai tempi negativi si ottiene per le funzioni pari mediante un ribaltamento intorno all'asse delle ordinate, per le funzioni dispari con un ribaltamento attorno all'asse delle ascisse (cioè dei tempi), seguito da un ribaltamento attorno all'asse delle ordinate (fig. 14).

Considerando le funzioni nel dominio del tempo come pari o dispari o come somma di parti pari o dispari, si possono predire alcune caratteristiche delle forme d'onda nel dominio delle frequenze. Una qualunque funzione $x(t)$ può essere scomposta in una parte pari $x_p(t)$ ed in una parte dispari $x_d(t)$. Infatti:

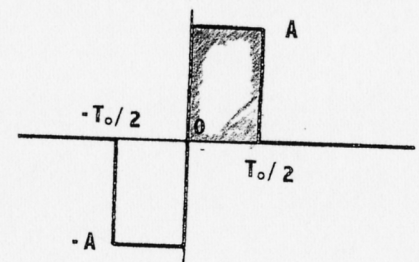
$$x(t) = x_p(t) + x_d(t)$$

$$x(-t) = x_p(-t) + x_d(-t) = x_p(t) - x_d(t)$$

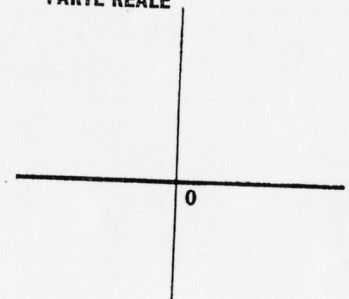
$$x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_d(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

La fig. 15 mostra la trasformata di Fourier di una funzione *dispari* del tempo. La parte reale (cioè la parte cosinusoidale) è zero, la parte immaginaria (cioè la parte sinusoidale) è diversa da zero ed è una funzione dispari della frequenza; la fase vale sempre $\pm\pi/2$.



PARTE REALE



PARTE IMMAGINARIA

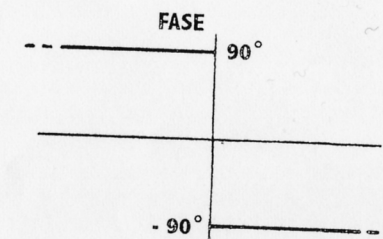
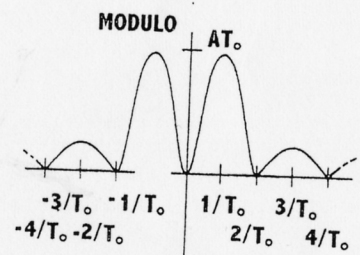
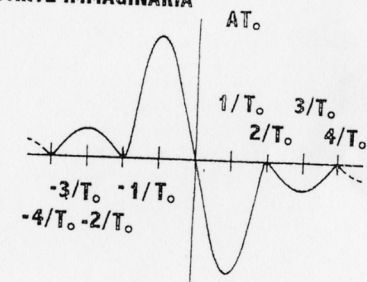


Fig. 15

La fig. 16 mostra la trasformata di Fourier di una funzione *pari* del tempo. La fase vale sempre $\pm\pi$, la parte immaginaria è quindi sempre nulla, la parte reale è una funzione pari della frequenza.

Funzioni dispari nel dominio del tempo si trasformano in funzioni dispari ed immaginarie nel dominio delle frequenze, funzioni pari nel dominio del tempo si trasformano in funzioni pari e reali nel dominio delle frequenze.

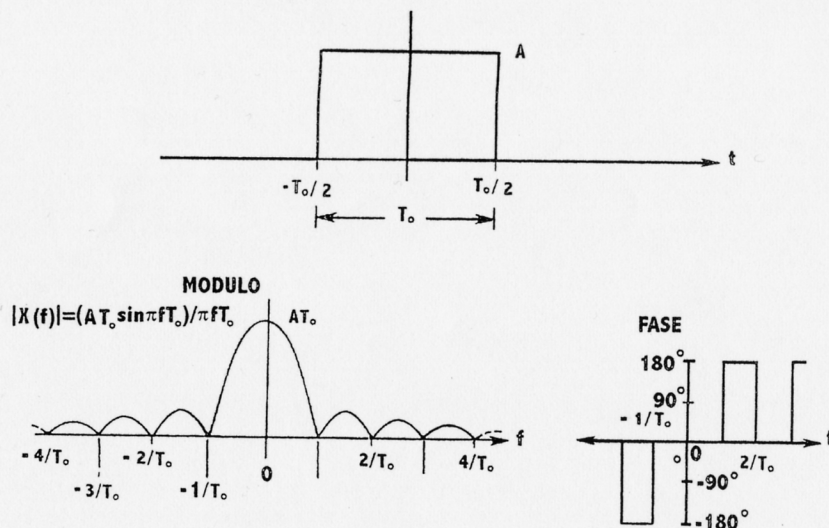


Fig. 16

Se invece di usare la notazione polare si usa quella rettangolare si possono agevolmente trovare le trasformate di funzioni come somme di funzioni pari $x_p(t)$ e dispari $x_d(t)$ del tempo, come indicato nella fig. 17.

Procedendo analiticamente, se $x(t) = x_p(t) + x_d(t)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x_p(t) + x_d(t)] [\cos 2\pi f t - j \sin 2\pi f t] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \cos 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \sin 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \sin 2\pi f t dt \end{aligned}$$

e ricordando che:

- l'integrale di una funzione dispari (cioè antisimmetrica) è zero
- il prodotto di due funzioni pari (cioè simmetriche) o di due funzioni dispari (cioè antisimmetriche) è pari (cioè simmetrico)
- il prodotto di una funzione dispari (cioè antisimmetrica) e di una funzione pari (cioè simmetrica) è dispari (cioè antisimmetrica)
- il seno è una funzione dispari (cioè antisimmetrica)
- il coseno è una funzione pari (cioè, simmetrica)

il secondo e il terzo integrale si annullano e quindi:

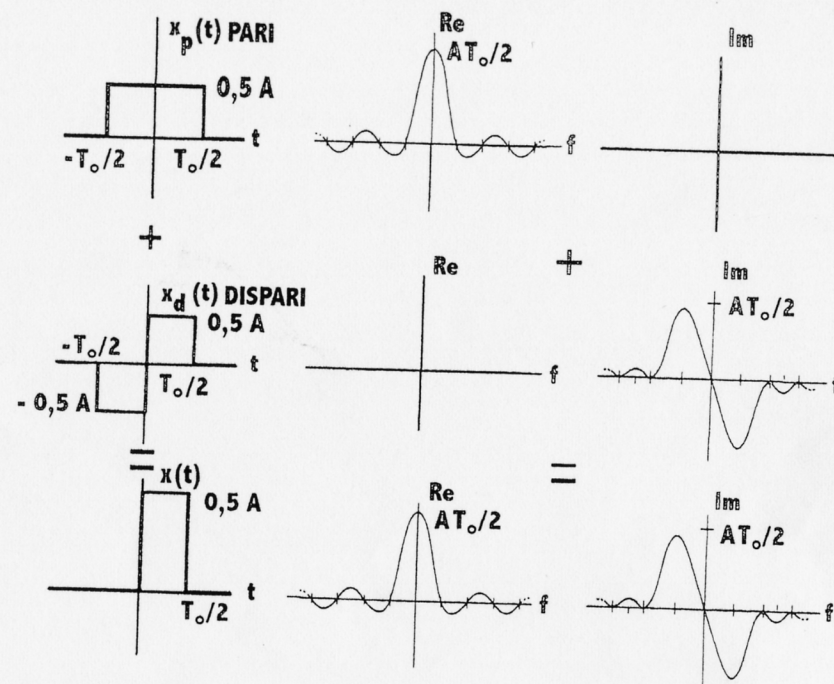


Fig. 17

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \sin 2\pi f t dt$$

Se poi $x(t)$ è pari allora $x_d = 0$, $x_p(t) = x(t)$ e quindi la trasformata di Fourier di una funzione pari è

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t) \cos 2\pi f t dt$$

Ad es. la funzione di autocorrelazione è una funzione pari.

Si vogliano ora determinare le trasformate del seno e del coseno.

L'impulso di Dirac $\delta(t-t_0)$ [tale notazione indica il valore della funzione al tempo t quando l'impulso è applicato al tempo t_0] è un impulso di ampiezza tendente a infinito, durata tendente a zero, area unitaria. Quando utilizzato all'interno di un integrale esso assume il ruolo di un operatore che valuta la funzione integranda per uno specifico valore della variabile. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

Analogamente accade nel dominio delle frequenze; se la funzione è l'esponenziale si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \delta(f - f_0) df = e^{j2\pi f_0 t}$$

ma il primo membro è anche la trasformata inversa di Fourier di $\delta(f - f_0)$ e quindi:

$$\mathcal{F}^{-1} \delta(f - f_0) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t$$

Analogamente:

$$\mathcal{F}^{-1} \delta(f + f_0) = \mathcal{F}^{-1} \delta[f - (-f_0)] = e^{-j2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t$$

La trasformata inversa della somma è perciò:

$$\mathcal{F}^{-1} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t + \cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t = 2 \cos 2\pi f_0 t$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} e^{j2\pi ft} df = \cos 2\pi f_0 t$$

e perciò la trasformata di Fourier di $\cos 2\pi f_0 t$ è la somma delle due funzioni delta $\delta(f - f_0)$ e $\delta(f + f_0)$ ciascuna moltiplicata per $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{F} \cos 2\pi f_0 t = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Si noti che si tratta di una funzione reale (conformemente al fatto che il coseno è una funzione pari). Essa è riportata nella fig. 18.

Procedendo in modo analogo si ricava:

$$\mathcal{F} \sin 2\pi f_0 t = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$$

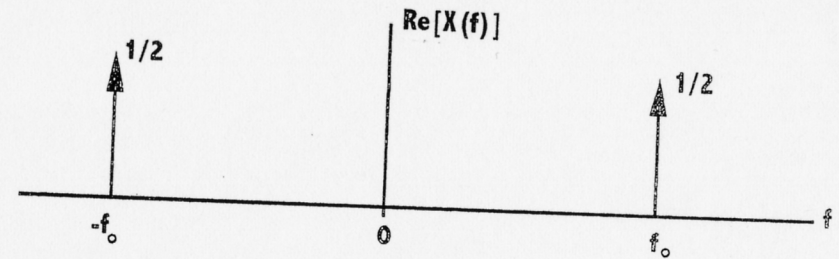


Fig. 18

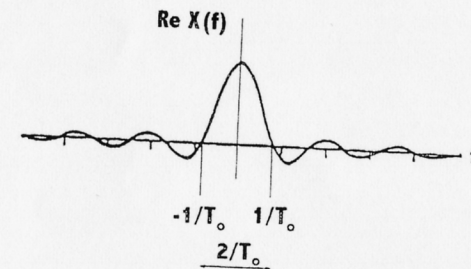
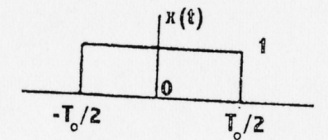


Fig. 19

Si noti che si tratta di una funzione puramente immaginaria (conformemente al fatto che il seno è una funzione dispari).

Si voglia calcolare la **trasformata della funzione rettangolare** (o uniforme o boxcar function), talora indicata con **rect** $\left(\frac{t}{T_0}\right)$; essa è (fig. 19):

$$u(t) = 1 \quad \text{per } -\frac{T_0}{2} \leq t < \frac{T_0}{2}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)] &= \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)\right] = U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T_0}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{T_0}{2}} \right) = \\ &= \frac{-2j \sin 2\pi f \frac{T_0}{2}}{-j2\pi f} = \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f}\end{aligned}$$

od anche, chiamando $\text{sinc}(f T_0) = \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f T_0}$ (un'espressione del tipo $\frac{\sin x}{x}$ è detta **sinc kernel**)

$$\mathcal{F}[u(t)] = T_0 \text{sinc}(f T_0)$$

Il suo massimo si ha per $f = 0$ e può essere trovato con la regola di L'Hospital:

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\sin \pi f T_0}{\pi f} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{df}(\sin \pi f T_0)}{\frac{d}{df}(\pi f)} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\pi T_0 \cos \pi f T_0}{\pi} = T_0$$

La funzione si annulla la prima volta per

$$\pi f T_0 = \pm \pi$$

cioè per

$$f = \pm \frac{1}{T_0}$$

La larghezza del lobo centrale è dunque $2/T_0$; ciò mostra che l'intervallo nel dominio delle frequenze è inversamente proporzionale alla durata del dominio nel tempo.

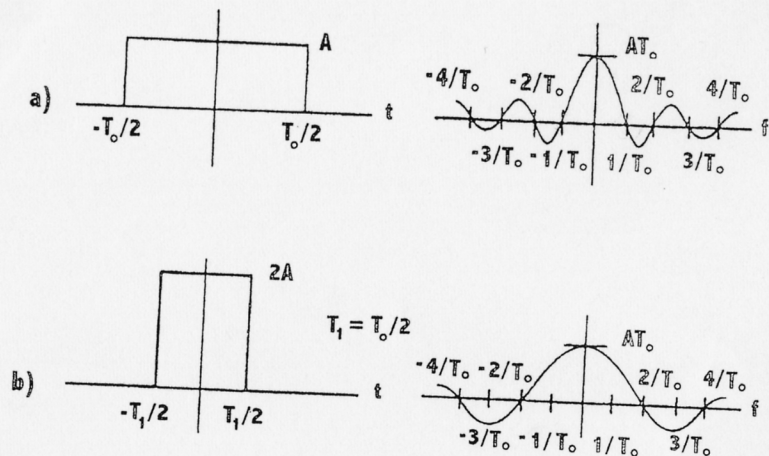


Fig. 20

Più in generale si può considerare la fig. 20.

La fig. 20a mostra che un'espansione dei tempi comporta un'alterazione sia in ampiezza sia in frequenza nel dominio delle frequenze, con crescita delle ampiezze e contrazione delle frequenze.

L'opposto accade per una contrazione dei tempi.

La fig. 20b mostra che un'espansione delle frequenze comporta un'alterazione sia in ampiezza sia in durata del dominio del tempo, con crescita delle ampiezze e contrazione della durata temporale.

L'opposto accade per una contrazione delle frequenze.

Si voglia ora calcolare la **trasformata di una convoluzione**. Si indichi con $*$ il simbolo della convoluzione:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$$

$$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)Y(f-u)du$$

Si ha :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t) * y(t)] &= X(f)Y(f) \\ \mathcal{F}[x(t) \cdot y(t)] &= X(f) * Y(f)\end{aligned}$$

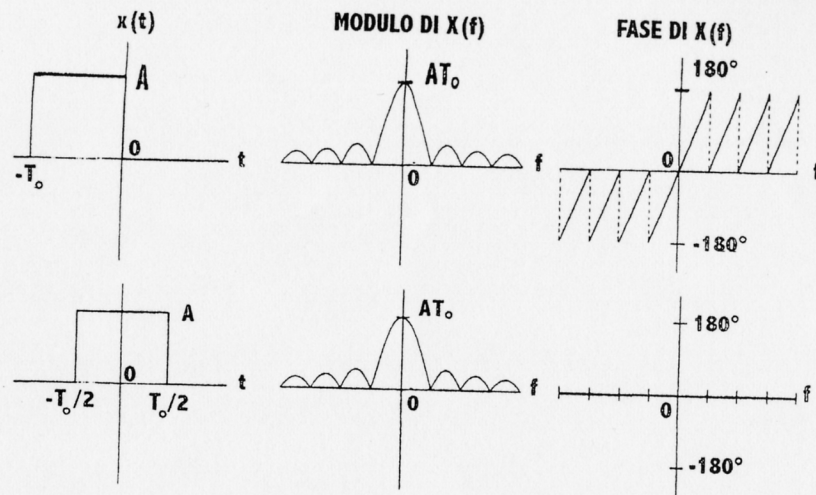


Fig. 21

cioè la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate e la trasformata del prodotto è la convoluzione delle trasformate. La prima relazione sarà utile ad esempio per ricavare la risposta di un sistema lineare a partire dalla risposta all'impulso, la seconda ad esempio quando si applicherà una qualche forma di finestrazione ad un segnale temporale.

Se si effettua una traslazione temporale di un segnale (fig. 21), essa ovviamente incide solo sulla fase e non sull'ampiezza e sull'andamento in funzione della frequenza della trasformata.

La traslazione temporale della funzione permette di trarre vantaggio dalla simmetria della stessa.

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

Ponendo $\tau = t - t_0$ si ha:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f(t_0 + \tau)} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

cioè un ritardo nel dominio del tempo corrisponde a moltiplicare per un esponenziale complesso nel dominio delle frequenze, cioè, come si è detto, ad una variazione della fase.

Se invece si effettua una traslazione nel dominio delle frequenze, introdotta una nuova variabile $z = f - f_0$ si ha

$$dz = df$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\delta(X(f - f_0))] &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(z) e^{j2\pi z t} e^{j2\pi f_0 t} dz = \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} X(z) e^{j2\pi z t} dz = e^{j2\pi f_0 t} x(t) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X[f - (-f_0)]\} = \mathcal{F}^{-1} X(f + f_0) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(f - f_0) + X(f + f_0)] = (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) x(t) = \frac{\cos 2\pi f_0 t}{2} x(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}\right] = \cos 2\pi f_0 t x(t)$$

È questo il caso di una modulazione di ampiezza.

Se allo spettro $X(f)$ di una funzione rettangolare applichiamo una traslazione positiva ed una negativa nel dominio delle frequenze e sommiamo, questo produce una modulazione del segnale costante della funzione rettangolare con frequenza pari alla traslazione f_0 applicata (fig. 22).

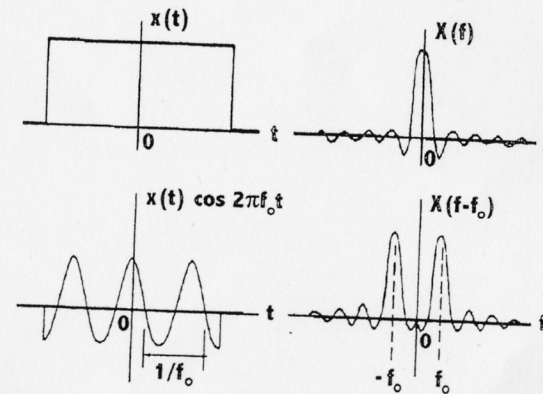


Fig. 22

Analogamente si può osservare quanto segue. Se una funzione $x(t)$ viene rilevata solo per un intervallo di tempo finito T_0 , questo equivale ad applicarle una funzione rettangolare $u(t)$ cioè a considerare il prodotto:

$$x_f(t) = x(t) u(t).$$

Al prodotto delle funzioni nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione delle trasformate nel dominio delle frequenze:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_f(t)] &= X_f(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) U(f - \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) \frac{\sin \pi(f - \eta)T_0}{\pi(f - \eta)} d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - \eta) \frac{\sin \pi \eta T_0}{\pi \eta} d\eta \end{aligned}$$

dove è sfruttata la proprietà commutativa delle convoluzioni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

Se in particolare la $x(t)$ è una cosinusoide di ampiezza unitaria e frequenza f_0 si ha:

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e quindi la trasformata di Fourier di una funzione coseno acquisita per un tempo finito T_0 è:

$$\mathcal{F}[x_f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \frac{\sin \pi(f - \eta)T_0}{\pi(f - \eta)} d\eta =$$

poiché come si è visto la funzione delta all'interno di un integrale di convoluzione agisce come un operatore che valuta l'altra funzione per il valore associato della variabile:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{\sin \pi(f - f_0)T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi(f + f_0)T_0}{\pi(f + f_0)} = \\ &= \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi(f - f_0)T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi(f + f_0)T_0}{\pi(f + f_0)} \end{aligned}$$

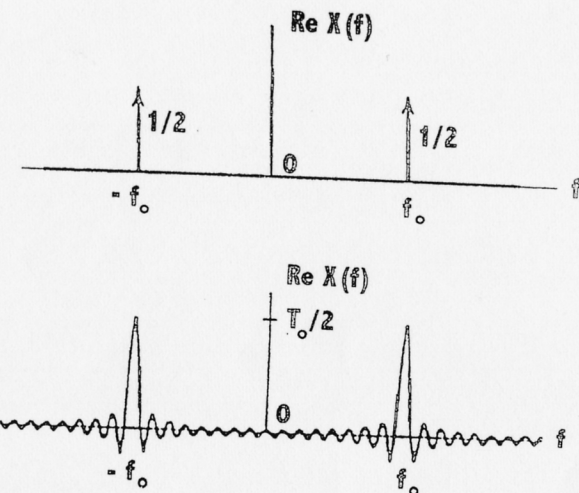


Fig. 23

Le funzioni $T_0 \frac{\sin x}{x}$ sono centrate attorno a $\pm f_0$ ed il lobo principale ha ampiezza T_0 e larghezza $2/T_0$. Se T_0 è abbastanza grande, la larghezza di tale lobo e dei lobi adiacenti significativi è sufficientemente piccola perché si possa trascurare l'effetto della sovrapposizione delle due funzioni $\frac{\sin x}{x}$ in corrispondenza dei massimi dei lobi centrali. Poiché nel nostro caso nell'espressione della trasformata vi era anche il fattore $\frac{1}{2}$, si potrà ritenere che l'ampiezza dei massimi della trasformata valga $T_0/2$ (fig. 23).

Tale figura rappresenta dunque la trasformata di una cosinusoide di ampiezza unitaria e frequenza f_0 , troncata con una acquisizione dal tempo $-T_0/2$ al tempo $T_0/2$.

Quanto sopra esposto è ulteriormente illustrato nella fig. 24, che si riferisce a una cosinusoide di ampiezza A acquisita attraverso una finestra di osservazione rettangolare da $-T_0/2$ a $+T_0/2$.

È interessante ancora notare che se la trasformata della funzione rettangolare $u(t)$ viene divisa per due e scritta come somma delle due metà:

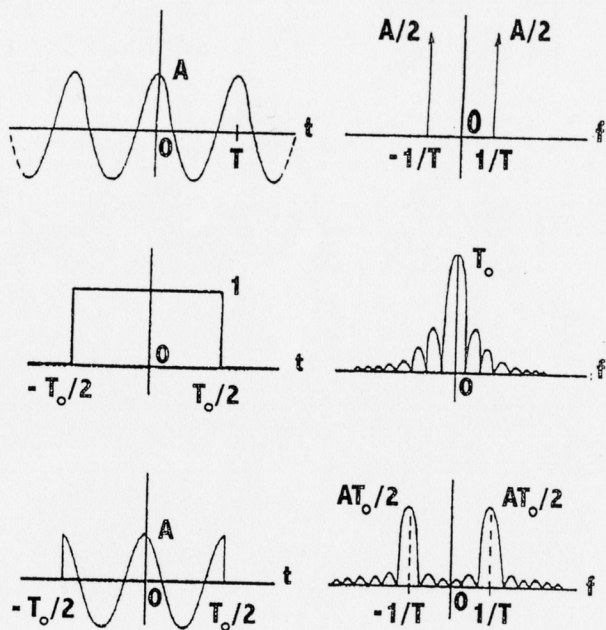


Fig. 24

$$\mathcal{F}[x_f(t)] = \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2} T_0 \frac{\sin \pi f T_0}{\pi(f + f_0)}$$

si vede che la moltiplicazione del segnale della funzione rettangolare per una cosinusoide ha prodotto la traslazione rispettivamente di $\pm f_0$ della curva a lobi della funzione rettangolare. A tali traslazioni nel dominio delle frequenze corrisponde, come si è detto, una modulazione nel dominio del tempo ed infatti $x_f(t) = u(t) x(t)$ è l'espressione della funzione rettangolare modulata in ampiezza dalla cosinusoide.

È molto importante osservare un altro fenomeno: l'applicazione di una finestra temporale al segnale, cioè il troncamento temporale di una acquisizione, ha prodotto il fenomeno del **leakage**.

Con riferimento alla precedente fig. 24, relativa ad una finestra rettangolare, la trasformata di Fourier della cosinusoide (costituita da due impulsi) non coincide esattamente con la trasformata di Fourier della cosinusoide troncata, che si è allargata su lobi per effetto della convoluzione con

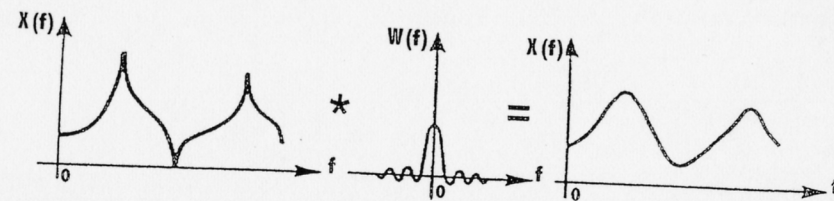


Fig. 25

la finestra temporale. La potenza in un intervallo di frequenze si è sparsa (*leakage* = *dispersione*, perdita) nelle regioni di frequenza adiacenti, con alterazioni quindi di ampiezze e frequenze. L'entità del leakage dipende dalla forma della funzione della finestra temporale, detta anche funzione di pesatura $w(t)$ (weighting function), della quale si fa la convoluzione con il segnale (fig. 25).

Le tabb. 4 e 5 raccolgono alcune utili trasformate di Fourier. È interessante notare che curve a campana nel dominio del tempo danno luogo a curve a campana nel dominio delle frequenze.

Si noti che l'integrale di Fourier di una funzione di campionamento fornisce a sua volta una funzione di campionamento, cioè, un altro andamento a pettine.

Per quanto riguarda i simboli si ricorda che si indica:

$f_s = 1/\Delta t$ la frequenza di campionamento

$\text{comb}_{\Delta t}$ l'infinita serie di impulsi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$

$\text{rep}_{f_s}[x(f)]$ la ripetizione di $x(f)$ ogni f_s unità come definito dalla convoluzione $x(f) * \text{comb}_{f_s}$

2.2.3. La trasformata discreta di Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform)

Se i segnali, ancorché analogici in origine, sono acquisiti e processati in forma digitale, si presentano sotto forma di sequenze finite di valori numerici derivanti dal campionamento e dalla digitalizzazione effettuati dal convertitore analogico-digitale. Si opera su queste sequenze finite di dati mediante DFT e FFT. La Fast Fourier Transform (FFT) è semplicemente un efficiente schema di calcolo per la valutazione della DFT. Entrambe operano su sequenze di valori discreti equispaziati, in un intervallo finito.

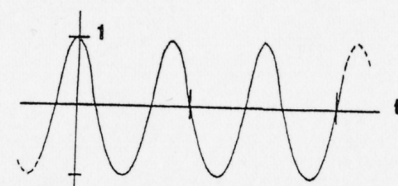
Tab. 4 - Relazioni funzionali

Funzione	Trasformata di Fourier
$x(t)$	$X(f)$
$\mathcal{F}^{-1}[X(f)]$	$\mathcal{F}[X(t)]$
$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$
$y(t)$	$Y(f)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
$\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)Y(f-\eta)d\eta$
$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
$x(t)e^{j2\pi ft_0}$	$X(f-f_0)$
$(d/dt)x(t)$	$j2\pi fX(f)$
$-j2\pi tx(t)$	$(d/df)X(f)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$X(f)/(j2\pi f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(f)$ purché $X(0)=0$
$x(t)/(-j2\pi f) + \frac{1}{2}x(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^f X(f)df$
$Qsinc(t/Q)$	$rect(f/Q)$
$rect(t/Q)$	$Qsinc(fQ)$
$comb_{\Delta t}$	$f_s comb_f$
$comb_{\Delta t}x(t)$	$f_s rep_{f_s}[X(f)]$
$rep_{1/T}[x(t)]$	$(f_s/T) comb_{1/T}X(f)$
$rep_{1/T}[comb_{\Delta t}x(t)]$	$(1/T) comb_{1/T} rep_{f_s}[X(f)]$
$X^*(t)$	$X^*(-f)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$	(relazione di Parseval)

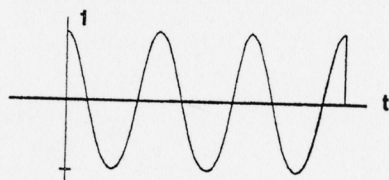
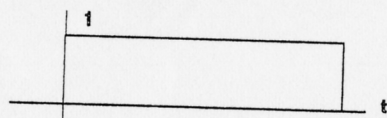
Tab. 5 - Trasformate di Fourier di specifiche funzioni

$x(t)$	$X(f)$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$
$\cos(2\pi f_0 t)x(t)$	$\frac{1}{2}[X(f+f_0) + X(f-f_0)]$
$x(t) = \begin{cases} 1 - T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$	$\frac{\sin \pi f T_0}{\pi f}$
$rect(t/T_0)$	$T_0 \text{sinc}(fT_0)$
$T_0 \text{sinc}(t/T_0)$	$rect(f/T_0)$
$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\frac{1}{2}\delta(t) - 1/(j2\pi t)$	$u(f)$
$\delta(t)$	$X(f) = 1$ per ogni f
$x(t) = 1$ per ogni t	$\delta(f)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}$
$\exp\left(\frac{-t^2}{2a^2}\right)$	$\sqrt{2\pi a^2} \exp\left(\frac{-(2\pi fa)^2}{2}\right)$
$\frac{2\sin 2\pi Bt}{2\pi t}$	$x(f) = \begin{cases} 1 - B \leq f < B \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

La DFT è periodica con periodo N , essendo N il numero di punti, cioè di valori acquisiti. Il suo calcolo comporta N^2 moltiplicazioni di numeri complessi. Se si adotta un numero di campioni pari ad una potenza di 2, cioè $N=2^k$, si può utilizzare un algoritmo (FFT) che comporta solo $N \log_2 N$ moltiplicazioni. Ad es. per $N=1024$ (cioè $k=10$), le moltiplicazioni sono $1024 \cdot 10$ anziché $1024 \cdot 1024$, cioè il tempo è circa 1/100 di quello necessario per una DFT. All'aumentare del numero N di campioni (128,



FINESTRA RETTANGOLARE



CAMPIONAMENTO

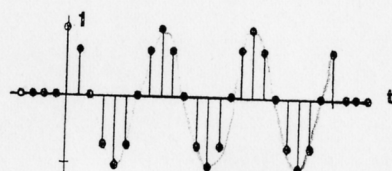
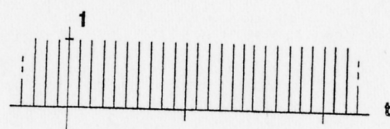


Fig. 26

512, 1024, 2048) a parità di frequenza di campionamento aumenta la risoluzione in frequenza.

Le operazioni di finestratura e di campionamento dei segnali possono essere visti come prodotti di funzioni temporali (fig. 26).

La DFT è calcolata da una funzione temporale usando N campioni presi ai tempi $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$, dove Δt è l'intervallo di campionamento.

Per la serie di Fourier si aveva:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

essendo $x(t)$ una funzione periodica di periodo T .

La DFT opera solo su una piccola parte del segnale temporale e la tratta come parte di un segnale periodico.

$$t \rightarrow n\Delta t \quad dt \rightarrow \Delta t \quad x(t) = x(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt \rightarrow \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n\Delta t}{N\Delta t}} \Delta t$$

Restringendo k ad essere uno degli interi $0, 1, 2, \dots, (N-1)$ si ha la **trasformata discreta di Fourier**:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

I valori corrispondenti di frequenza sono

$$f = \frac{k}{T}$$

Analogamente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \quad t \rightarrow n\Delta t \quad ; \quad T \rightarrow N\Delta t$$

e la **trasformata discreta inversa di Fourier** è:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

Altri autori definiscono la DFT e l'inversa ricavandole, anziché, dalla serie di Fourier, a partire dall'integrale di Fourier (cioè come campionamento di una funzione continua), considerando però il segnale periodico con periodo pari alla finestra di osservazione, sostituendo quindi ad f_i valori discreti $f_k = k/N \Delta t$, sostituendo ad x_i valori discreti $x(n)$, sostituendo agli integrali le sommatorie e considerando solo gli N termini da 0 ad $N-1$. Secondo tale definizione di ha:

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$x(n\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k \frac{n}{N}}$$

Tali definizioni differiscono da quelle precedenti solo per un fattore di scala dato dal coefficiente che è davanti alle sommatorie (e per le unità di misura).

Si noti che la dimensione della *trasformata integrale di Fourier* è quella del segnale moltiplicata per il tempo; è quindi una densità di distribuzione, espressa in unità ingegneristiche moltiplicate per un tempo, cioè divise per la frequenza: EU/Hz (avendo indicato con EU le Engineering Units). Invece le dimensioni della *serie di Fourier* sono quelle del segnale $x(t)$, cioè le unità di misura sono EU. Le dimensioni della *trasformata discreta di Fourier* dipendono da come essa è stata definita: se la definizione è quella usuale ricavata dalla serie di Fourier le unità di misura sono EU, se la definizione è quella ricavata dalla trasformata continua di Fourier le unità di misura sono EU/Hz.

La fig. 27 mostra la derivazione della DFT dalla trasformata integrale di Fourier: al campionamento e alla finestratura nel dominio del tempo corrispondono due successive operazioni di convoluzione nel dominio delle frequenze, al campionamento nel dominio delle frequenze corrisponde una convoluzione nel dominio del tempo che dà luogo alla periodicità del segnale temporale campionato.

I coefficienti della DFT sono tali che:

$$X(N-k) = X^*(k)$$

dove * indica complesso coniugato.

Infatti:

$$\begin{aligned} X(N-k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(N-k)\frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n} e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\cos 2\pi n - j \sin 2\pi n) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} = \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \right]^* = X^*(k) \end{aligned}$$

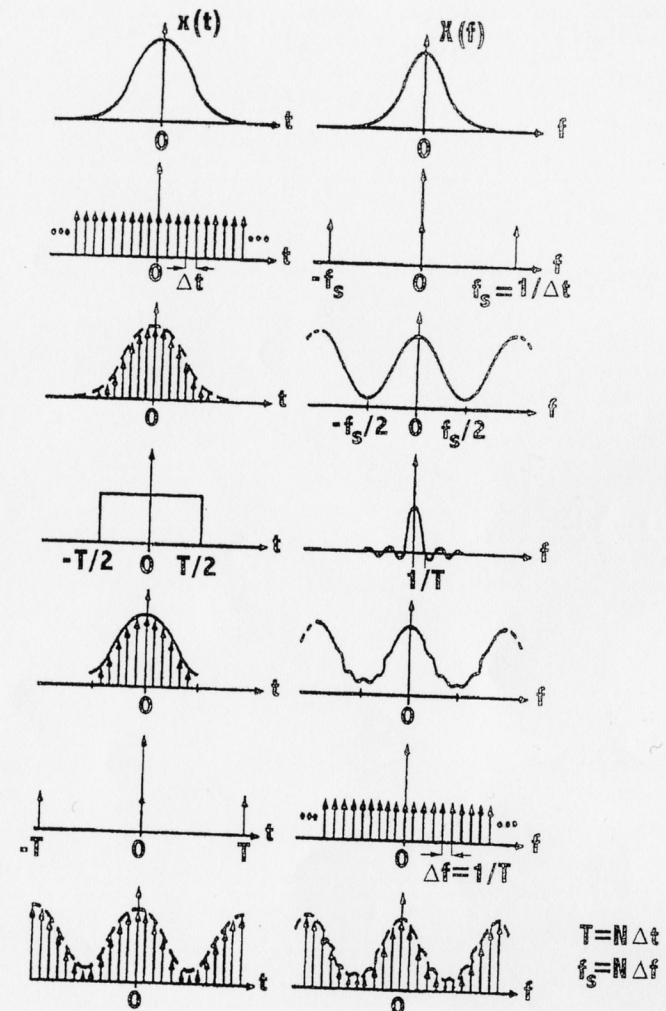


Fig. 27

perciò $N/2$ degli N valori trovati con una DFT si ottengono dai precedenti $N/2$, cioè, non corrispondono ad un reale contenuto del segnale originario in corrispondenza della frequenza $f(N-k)$.

Si mostrerà fra poco che i k nell'intervallo $0 \div \frac{N}{2}$ corrispondono all'intervallo di frequenze da zero alla frequenza di Nyquist $F = \frac{1}{2\Delta t}$ (*folding frequency*; v. dopo) e che quelli nell'intervallo $\frac{N}{2} \div N$ corrispondono alle frequenze negative.

$$\text{Infatti la frequenza corrispondente a } k = \frac{N}{2} \text{ è } f = \frac{k}{T} = \frac{N/2}{T} = \frac{N/2}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}.$$

Se si valutano gli $X(k)$ e gli $x(n)$ per valori dell'indice esterni all'intervallo $0 \div N - 1$ si riscontra la proprietà periodica della DFT (circularità) cioè, la ripetizione dei coefficienti ad intervalli di N (fig. 28).

Infatti per i intero:

$$X(k + iN) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(k+iN)\frac{n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} e^{-j2\pi iN\frac{n}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} (\cos 2\pi i n - j \sin 2\pi i n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} = X(k)$$

Nella fig. 28 $N=16$ e la frequenza di Nyquist corrisponde a $k = N/2 = 8$. Analogamente:

$$x(n + iN) = x(n)$$

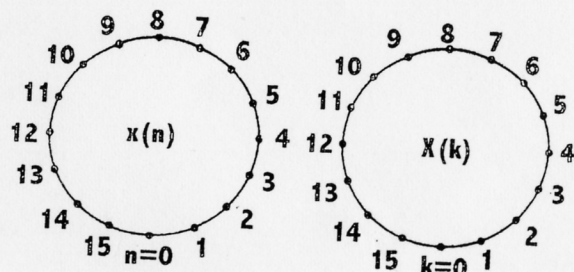


Fig. 28

Ciò apparirà evidente dalla trattazione sull'aliasing che seguirà, in quanto punti sfasati di N punti fra loro corrispondono a sfasamenti di frequenza pari a $f_s = 2F$ (f_s = **frequenza di campionamento** = **sampling rate**, F = **frequenza di ripiegamento** = **Folding frequency** = **Frequenza di Nyquist**) e sinusoidi di frequenza che differiscono fra loro di $f_s = 2F$ (o di multipli interi di $2F$) sono viste come identiche fra loro nel campionamento.

Se si valutano gli $X(k)$ per indici negativi si ha:

$$X(-p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(-p)\frac{n}{N}} =$$

e moltiplicando per $e^{-j2\pi\frac{N}{N}}$, che vale 1, l'espressione diviene:

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(-p)\frac{n}{N}} e^{-j2\pi\frac{N}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(N-p)\frac{n}{N}} = X(N-p)$$

cioè il generico $X(N-p)$, che corrisponde alla frequenza $\frac{N-p}{T}$, è uguale

a $X(-p)$, che corrisponde alla frequenza negativa $-\frac{p}{T}$, come si era anticipato.

2.2.4. L'aliasing

Si forniranno inizialmente alcune considerazioni generali, cui si farà seguire la trattazione teorica dettagliata. Il fenomeno dell'aliasing è il risultato della discretizzazione di un segnale continuo originario, campionato con una frequenza di campionamento troppo bassa. La digitalizzazione di un segnale di alta frequenza in tal caso produce esattamente lo stesso insieme di valori discreti che si ottengono digitalizzando un segnale di bassa frequenza. Se una sinusoide è campionata ad intervalli Δt e la sua frequenza è maggiore di $\frac{1}{2\Delta t}$ essa appare come una frequenza più bassa.

La fig. 29 mostra un esempio: la frequenza di campionamento è $f_s = \frac{1}{\Delta t} = 120$ Hz.

$$F = \text{folding frequency} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2} f_s = 60 \text{ Hz}$$

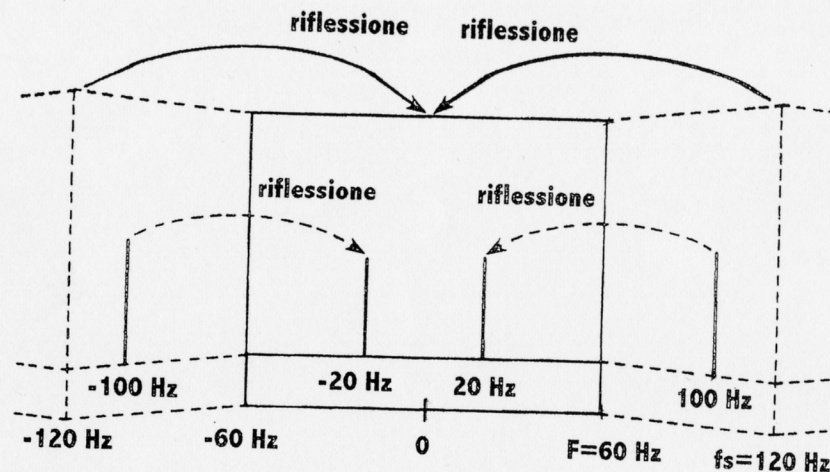


Fig. 29

Un componente del segnale a 100 Hz, cioè 40 Hz al di sopra della F , appare come un segnale a 20 Hz, cioè 40 Hz al di sotto della F , cioè come riflesso specularmente rispetto alla frequenza F .

Prima di svolgere la trattazione teorica completa (che indichi anche cosa accade per segnali di frequenza maggiore di f_s) si esamini l'esempio della fig. 30 per comprendere l'aspetto fisico del fenomeno.

Se ad esempio la sinusoidale di fig. 30 è campionata con 9 campionamenti al secondo, cioè con $f_s = 9$ Hz, ma compie 8 oscillazioni in un secondo, cioè ha $f = 8$ Hz, il segnale campionato appare come una sinusoidale con frequenza 1 Hz (fig. 30a). Si ha:

f_s = frequenza di campionamento = 9 Hz

F = folding frequency = frequenza di Nyquist = $f_s/2 = 4,5$ Hz

f = frequenza del segnale = 8 Hz

Il segnale ha una frequenza che è situata $f - F = 8 - 4,5 = 3,5$ Hz al di sopra della frequenza di Nyquist ed è quindi visto come un segnale 3,5 Hz al di sotto di questa, cioè con una frequenza $4,5 - 3,5 = 1$ Hz.

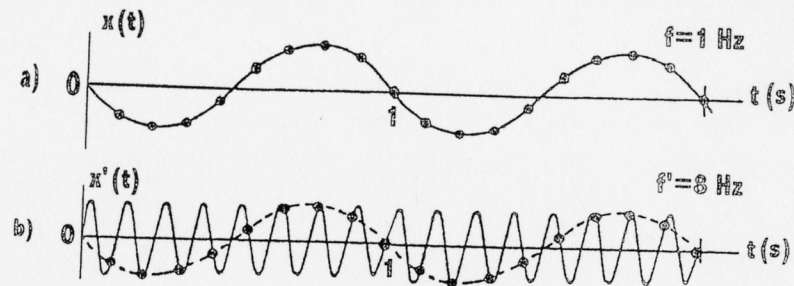
Per analizzare più in dettaglio il fenomeno dell'aliasing occorre innanzitutto ricordare il **teorema del campionamento di Shannon**:

se $x(t)$ è definita per $-\infty < t < \infty$

se $X(f)$, trasformata di Fourier di $x(t)$, esiste

se $X(f)$ è a banda limitata, cioè $|X(f)| = 0$ per $|f| > f_{\text{sup}}$

allora se la frequenza di campionamento f_s è tale che $f_s \geq 2 f_{\text{sup}}$ la $x(t)$ può essere ricostruita in modo univoco dalla sequenza campionata $x(i)$, con discordanze, se ve ne sono, in punti isolati.



frequenza di campionamento $f_s = 9$ Hz

Fig. 30

In altri termini occorre campionare a frequenza almeno doppia della più alta frequenza del segnale, cioè, la più alta frequenza del segnale deve essere minore o uguale alla frequenza di Nyquist (folding frequency) $F = f_s/2$.

Esaminiamo ora cosa accade se è presente una frequenza superiore alla frequenza di Nyquist.

Si consideri la sinusoidale:

$$x(t) = \sin 2\pi f_0 t$$

con

$$f_0 > F$$

dove

$$F = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}$$

La frequenza f_0 è dunque A volte la frequenza F , essendo A un coefficiente maggiore di 1, in generale composto da una parte intera i e da una parte decimale d (< 1):

$$f_0 = AF \pm (i + d) F = (i + d) \frac{1}{2\Delta t}$$

$$\sin 2\pi f_0 t = \sin 2\pi \frac{i+d}{2\Delta t} n\Delta t = \sin \pi(i+d)n = \sin \pi n \cos \pi d n + \cos \pi n \sin \pi d n = \\ = \cos \pi n \sin \pi d n$$

poiché $\sin \pi n = 0$ per tutti gli n ; l'intero i può essere pari o dispari.

Se i è pari $\cos \pi n = 1$
e quindi:

$$x(n) = \sin \pi d n$$

Se i è dispari $\cos \pi n = (-1)^n$
infatti $\cos \pi n$ vale -1 per n dispari e $+1$ per n pari e quindi

$$x(n) = (-1)^n \sin \pi d n$$

Se i è pari dunque:

$$x(n) = \sin \pi d n = \sin \frac{2}{2} \pi d n \frac{\Delta t}{\Delta t} = \sin 2\pi \frac{d}{2\Delta t} n\Delta t = \sin \pi f_0 n\Delta t$$

avendo chiamato

$$f_0' = \frac{d}{2\Delta t} = d \cdot F$$

la frequenza che effettivamente appare dal segnale campionato.

Così ad esempio segnali aventi frequenza $2,25 F$, $4,25 F$, $6,25 F$, ecc. appaiono tutti come segnali di frequenza $0,25 F$.

Se i è dispari

$$x(n) = (-1)^n \sin \pi d n = \cos \pi n \sin \pi d n =$$

ed aggiungendo un termine nullo (perché $\sin \pi n = 0$)

$$= \cos \pi n \sin \pi d n - \sin \pi n \cos \pi d n = \\ = -(-\cos \pi n \sin \pi d n + \sin \pi n \cos \pi d n) = \\ = -\sin(\pi n - \pi d n) = -\sin \pi n (1 - d) = \\ = -\sin \frac{2}{2} \pi n (1 - d) \frac{\Delta t}{\Delta t} = -\sin 2\pi f_0'' n\Delta t$$

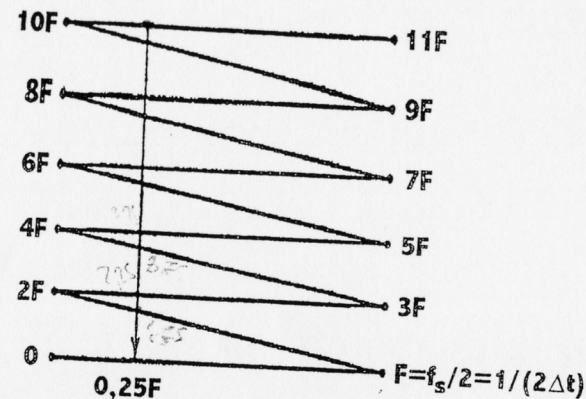


Fig. 31

avendo chiamato

$$f_0'' = \frac{1-d}{2\Delta t} = (1-d)F = d \cdot F$$

la frequenza che effettivamente appare nel segnale campionato.

Così ad esempio segnali aventi frequenza $1,75 F$, $3,75 F$, $5,75 F$, ecc. appaiono tutti come segnali aventi frequenza $0,25 F$. Infatti $F - d \cdot F = F - 0,75 F = 0,25 F$.

In conclusione i risultati generali ottenuti possono essere sintetizzati come riportato nella fig. 31: la scala delle frequenze è ripiegata a fisarmonica e la frequenza che effettivamente appare per effetto dell'aliasing si ottiene per riflessioni, alternativamente attorno all'estremo F , $3F$, $5F$, ... ed attorno all'estremo 0 , $2F$, $4F$, ...

Un altro modo che talora è usato per esprimere gli importanti contenuti della fig. 31 è dato dalla fig. 32.

Per non incorrere nei problemi di aliasing occorre rimuovere dal segnale analogico di ingresso tutti i componenti di frequenza superiore alla frequenza di Nyquist, cioè, filtrare il segnale prima dell'acquisizione con un filtro passa-basso. Un filtro **anti-aliasing** è dunque un filtro passa-basso. Piuttosto che con un taglio netto di tutte le frequenze al di sopra di un certo valore, tutti i filtri attenuano le frequenze secondo una curva la cui pendenza (roll-off), più o meno grande, viene usualmente definita in dB/ottava. Come i dB sono un modo conveniente per esprimere il

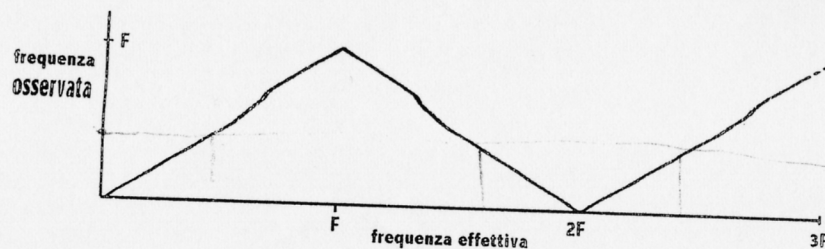


Fig. 32

rapporto fra ampiezze, l'ottava è un metodo conveniente per esprimere il rapporto fra frequenze. Un'ottava corrisponde a un intervallo di frequenze il cui rapporto è pari a due. Idealmente si vorrebbe che la transizione di un filtro fosse uno spigolo vivo, in realtà è una curva di pendenza crescente. Per ottenere una discesa della curva del filtro più rapida possibile, il "roll-off" generalmente comincia all'interno della banda passante desiderata, che in genere è specificata come scostamenti di -3dB (cioè 0,707 volte l'ingresso).

Con riferimento alla fig. 33, relativa a tre filtri con la stessa attenuazione finale di 24 dB/ottava , il **filtro di Butterworth** ha la risposta più piatta all'interno della banda passante, che paga con un lento roll-off iniziale. Il **filtro di Chebyshev** ha il roll-off iniziale più ripido, che paga con oscillazioni nella banda passante. Tutti i filtri, inoltre, introducono sempre un'alterazione della fase. Il **filtro di Bessell** è quello che ha il cambiamento di fase più lineare. Si noti che, pur avendo le tre curve la stessa pendenza finale (andamenti paralleli per frequenze sufficientemente alte), confrontando i valori corrispondenti alla prima ottava a destra della frequenza di taglio si riscontra una differenza di ben 25 dB fra le attenuazioni del filtro di Bessell e di quello di Chebyshev.

Poiché, dunque, i filtri sono inevitabilmente meno che perfetti ed hanno una pendenza di taglio finita, è necessario scartare anche le misure spettrali nell'intorno della frequenza di Nyquist. Ecco perché, una trasformata di Fourier su un'acquisizione di 1024 punti non dà luogo a uno spettro di 512 punti sul display di un analizzatore di Fourier: solo le prime $250\div400$ linee sono esenti da contaminazione per imperfetto anti-aliasing; uno spettro di frequenze a 400 linee è tipico per un segnale campionato con 1024 punti.

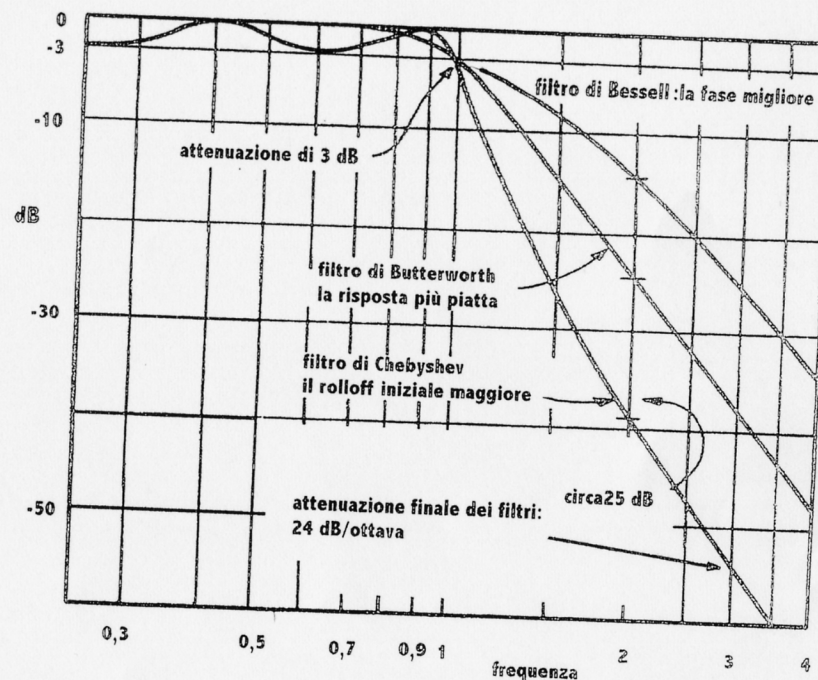


Fig. 33

2.2.5. Il leakage

Parlando di segnali continui si è già mostrato come il troncamento temporale di un segnale produca **leakage**. Si vuol esaminare ora come il campionamento incide sul leakage.

La fig. 34 mostra in a) un caso in cui il leakage non appare, in b) un caso in cui esso è invece evidente.

Il campionamento nel dominio delle frequenze produce il cosiddetto "**effetto palizzata**" (**picket-fence effect**). Se si pensa alla DFT come ottenuta per campionamento dell'integrale di Fourier, si comprende come il campionamento, a seconda di come posiziona le osservazioni rispetto allo spettro continuo, può nel caso più favorevole rilevare solo il massimo del lobo centrale e gli zeri degli altri lobi e quindi non rilevare il leakage presente nella fig. 35; nel caso più sfavorevole può far perdere il massimo del lobo centrale, evidenziandone i fianchi e rilevare i massimi dei lobi la-

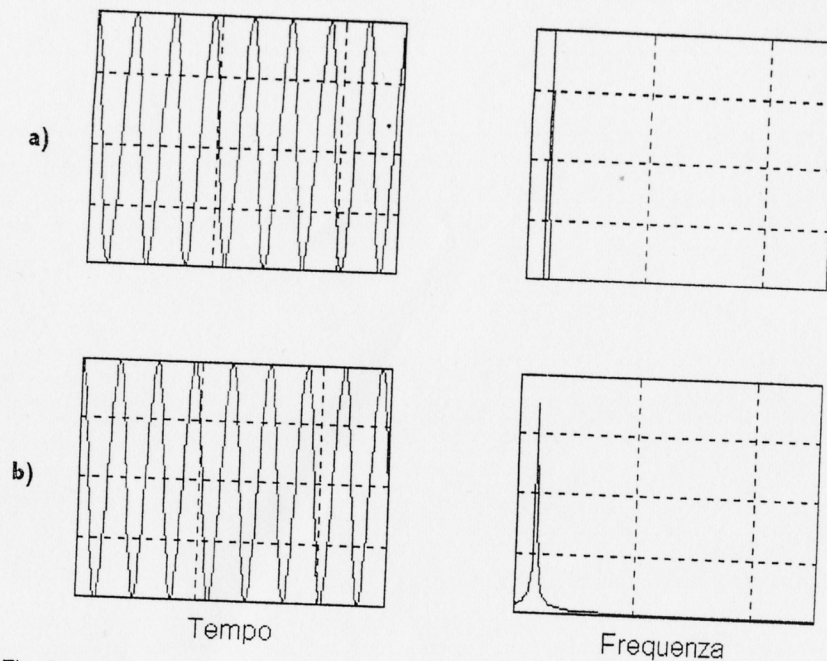


Fig. 34

terali. Il primo caso si manifesta quando la finestra temporale di osservazione contiene esattamente un numero intero di periodi, il secondo caso si manifesta quando la finestra di osservazione contiene un numero intero di periodi più un ulteriore semiperiodo. Nel caso generale la finestra di osservazione contiene un numero non intero di periodi ed i campionamenti cadono sfasati rispetto al massimo lobo centrale e agli zeri dei vari lobi.

Si consideri ad esempio la fig. 36, che prende in esame una cosinusoide di frequenza tale che un numero intero di periodi corrisponda esattamente alla finestra di osservazione. Il campionamento nel tempo corrisponde al prodotto della funzione per un treno di impulsi.

Siccome la trasformata di un treno di impulsi distanti temporalmente di Δt è un treno di impulsi distanti $\frac{1}{\Delta t}$ nel campo delle frequenze e al prodotto di funzioni nel dominio del tempo corrisponde la convoluzione nel dominio delle frequenze, e siccome gli intervalli $\frac{1}{\Delta t}$ sono tali che nell'in-

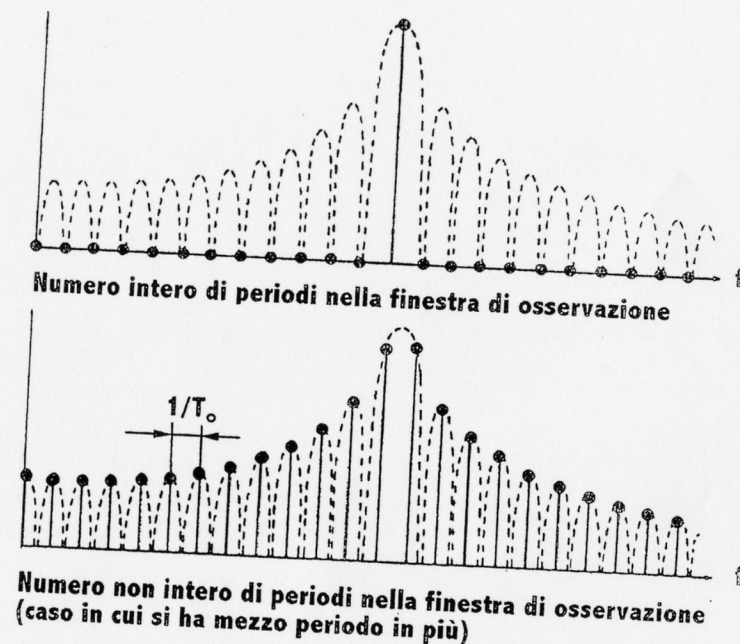


Fig. 35

tervallo definito da $\pm F = \pm \frac{1}{2\Delta t}$ (frequenza di Nyquist) si risente solo l'impulso centrale (quello per $f = 0$), la trasformata è ancora la curva a lobi punteggiata. Quando si passa alla DFT, tale curva viene vista con l'effetto palizzata e le frequenze che vengono viste sono $f_k = \frac{k}{N\Delta t}$ cioè i punti campionati hanno ascisse $0, \frac{1}{N\Delta t}, \frac{2}{N\Delta t}, \dots$ e distano fra loro di $1/T$.

I lobi laterali distano fra loro di $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{N\Delta t}$ è tale è pure la distanza fra il massimo e gli zeri del lobo principale. La posizione del massimo del lobo principale è data da $1/T$.

Se T_0 è multiplo intero di T cioè, se $T_0 = mT$ (m intero) si ha $\frac{1}{T_0} = m \frac{1}{T}$ e perciò i campionamenti in frequenza cascano in corri-

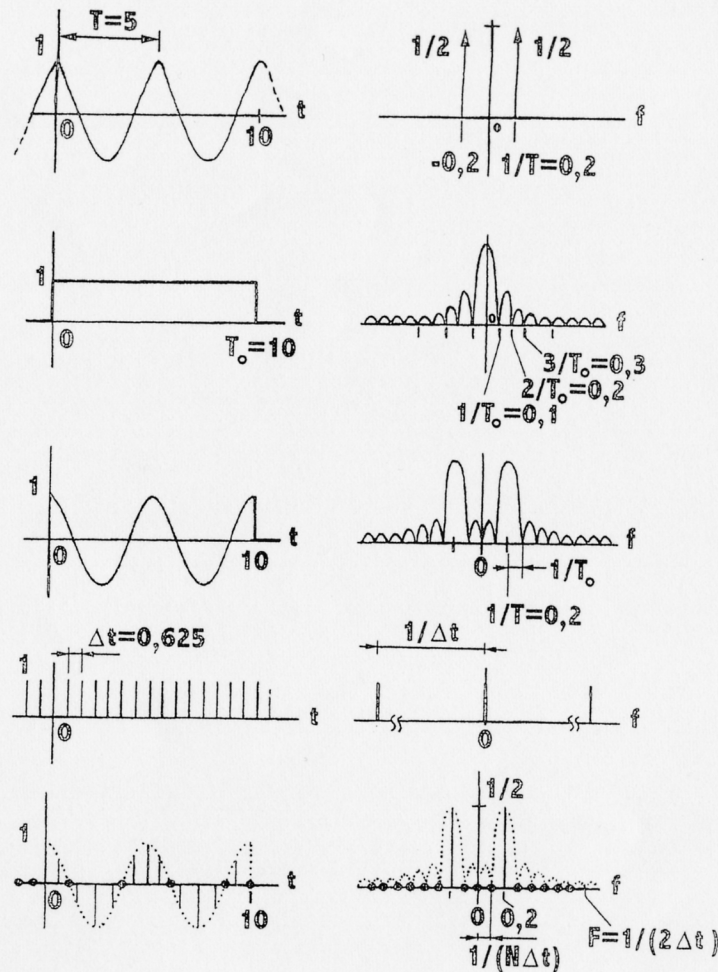


Fig. 36

spondenza del massimo del lobo principale e quindi anche in corrispondenza dello zero di tutti i lobi.

Se invece T_0 non è un multiplo intero di T si ha uno sfasamento fra picco e zeri e campionamenti, come indicato nella fig. 37, che, a parità di T_0 ha un T minore rispetto alla fig. 36 (si ha mezza cosinusoide in più nella finestra temporale).

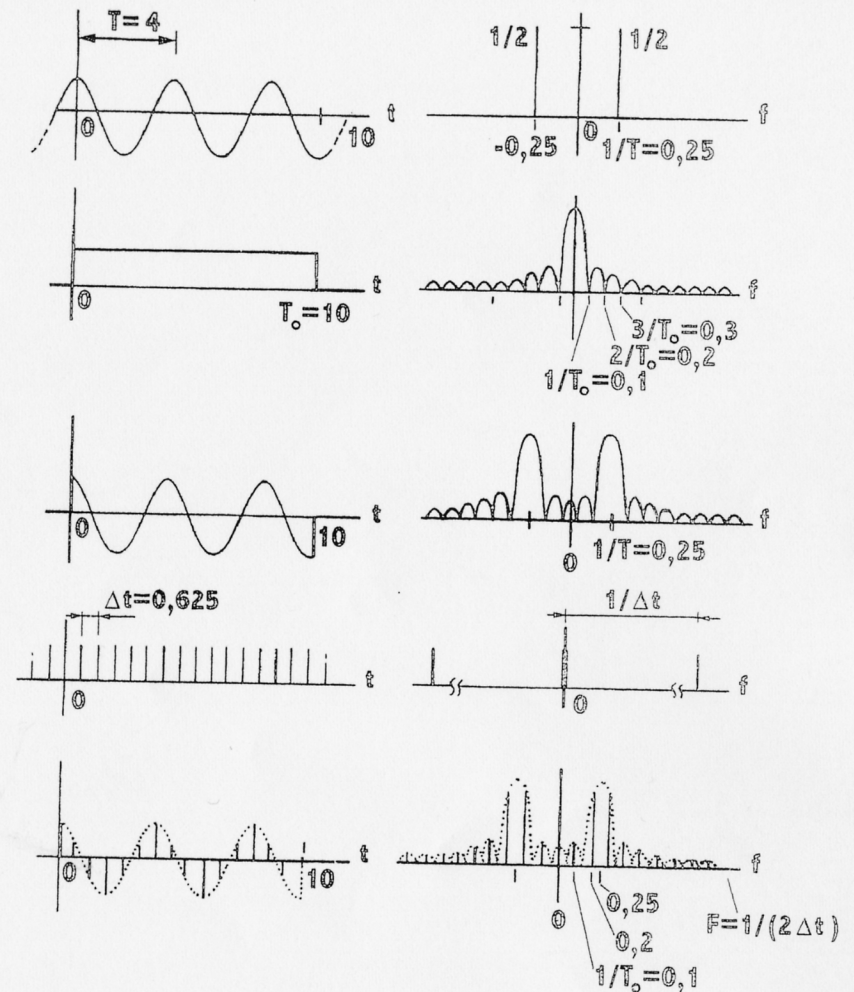


Fig. 37

Il fatto che per T_0 multiplo esatto di T si ottengano esattamente solo gli impulsi come nel caso della serie di Fourier non deve stupire, perché la periodicità supposta dalla DFT fa sì che in realtà si stia esaminando un segnale cosinusoidale che prosegue senza discontinuità anche fuori dalla finestra di campionamento (fig. 38a). Se invece T_0 non è un multiplo esatto

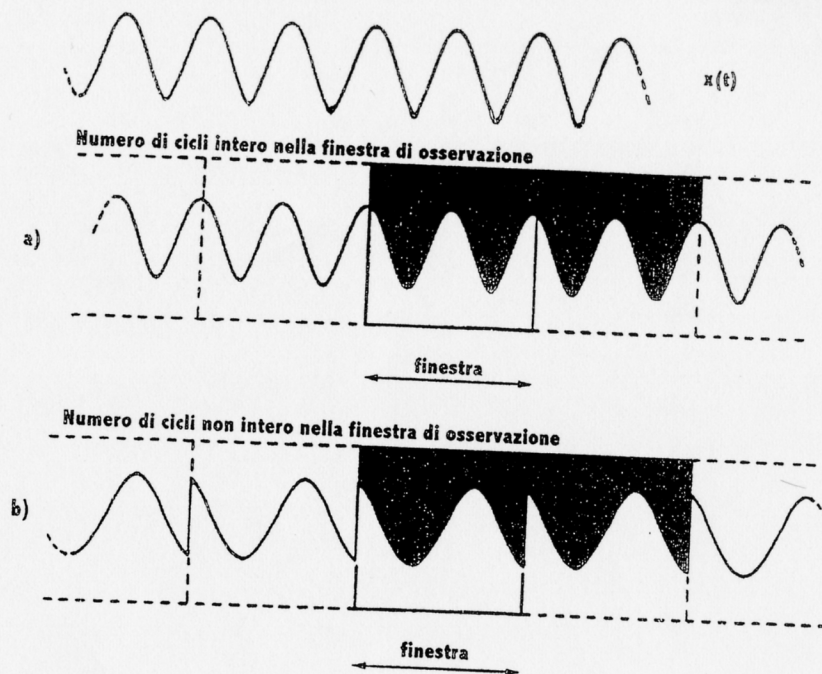


Fig. 38

di T , la DFT analizza il segnale periodico indicato nella fig. 38b, che è diverso dall'originario.

Si esaminino ora i **rimedi per il leakage**.

Un primo metodo potrebbe essere quello di scartare la parte finale di un'acquisizione effettuata, mantenendo solo i punti relativi a un numero finito di cicli (fig. 39a). La difficoltà nasce però quando l'algoritmo per la FFT prevede uno specifico numero di valori campionati; per esempio un algoritmo basato sulle potenze di 2 può trasformare solo records composti da 2, 4, 8, 16, ... 2^n punti.

Una soluzione alternativa, per quanto più complessa, potrebbe essere quella di mantenere il numero di punti, quello previsto dall'algoritmo (512 nella fig. 39b), ed interpolare l'andamento corrispondente a un numero finito di cicli con un numero di punti diverso (512 anziché, 410 nella fig. 39b), ad esempio, con un' interpolazione lineare.

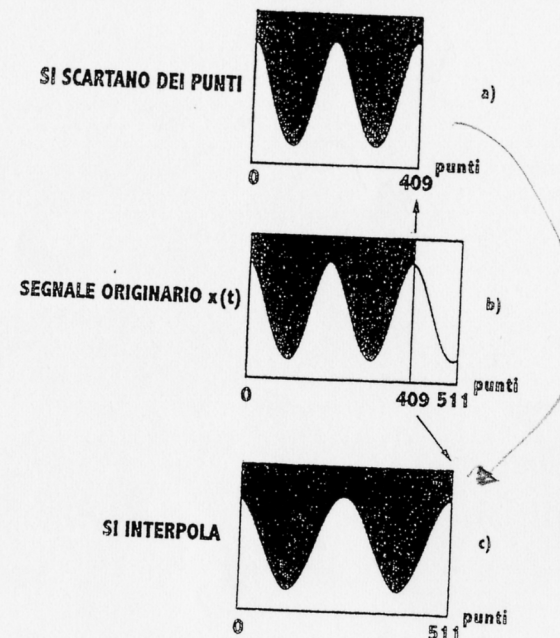


Fig. 39



Fig. 40

✱ Si può posizionare la finestra temporale in modo che i dati inizino e terminino allo stesso livello (fig. 40); l'eliminazione di tale discontinuità può non eliminare interamente il leakage, ma certo giova a ridurlo.

Per ridurre le discontinuità agli estremi della finestra e ridurre il leakage si possono usare delle finestre temporali (*weighting functions*) diverse da quella rettangolare, tali da attenuare le parti iniziale e finale della acquisizione temporale (fig. 41).

Le finestre temporali definiscono l'ampiezza nell'intervallo $0 \leq t \leq T_0$, al di fuori del quale l'ampiezza è nulla. La finestra di Hanning è del tipo coseno al quadrato, poiché $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$. Infatti, se si sposta l'origine dei tempi nell'istante $t = T_0/2$ per definire l'intervallo di tempo fra $-T_0/2$ e $T_0/2$ anziché fra 0 e T_0 e se si chiama τ il nuovo tempo, si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{T_0}{2} \quad t = \tau + \frac{T_0}{2} \\ \cos \frac{2\pi t}{T_0} = \cos \frac{2\pi\left(\tau + \frac{T_0}{2}\right)}{T_0} = \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0} + \pi\right) = -\cos \frac{2\pi\tau}{T_0} \end{aligned}$$

da cui

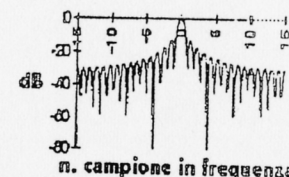
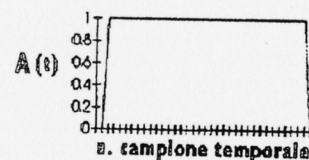
$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi\tau}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\tau}{T_0}\right) = \cos^2 \frac{2\pi\tau}{2T_0}$$

La finestra di Hamming è un coseno al quadrato con piedistallo, cioè rialzato. La finestra flat-top si usa ad es. per segnali sinusoidali puri utilizzati per eseguire delle calibrizioni; in questo caso si ha interesse soprattutto alla determinazione dell'ampiezza e non tanto della frequenza. Questa maggiore precisione di misura dell'ampiezza si paga con una notevole perdita di risoluzione in frequenza perché, come si vede, il lobo centrale in frequenza è molto allargato.

Quando si applica una finestra temporale, si alterano l'ampiezza e l'energia del segnale. La fig. 41 riporta il **fattore di correzione w_a dell'ampiezza** ed il **fattore di correzione w_e dell'energia**, calcolati per ogni singola finestra. Talora è importante avere una precisa stima dell'ampiezza del segnale; in altri casi, come nel caso di analisi a banda larga, non è importante avere una stima di elevata qualità dell'ampiezza di ogni linea spettrale, ma piuttosto ottenere una buona stima dell'energia del segnale.

FINESTRA RETTANGOLARE

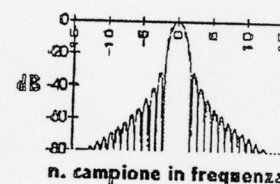
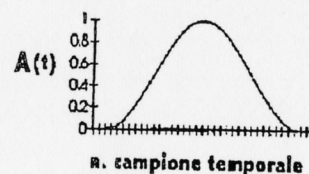
$$A(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq T_0$$



$$w_a = 1 \\ w_e = 1$$

FINESTRA DI HANNING

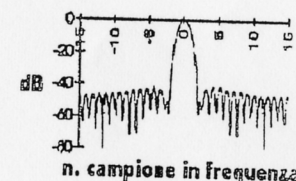
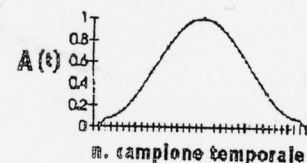
$$A(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \right] \quad 0 \leq t \leq T_0$$



$$w_a = 2 \\ w_e = 1,63$$

FINESTRA DI HAMMING

$$A(t) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \quad 0 \leq t \leq T_0$$



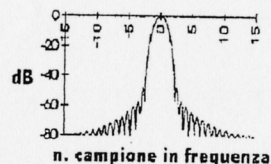
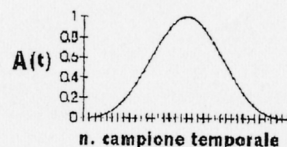
$$w_a = 1,85 \\ w_e = 1,59$$

Fig. 41

FINESTRA DI KAISER-BESSEL

$$A(t) = 0,402 - 0,498 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) + 0,098 \cos\left(\frac{4\pi}{T_0}\right) + 0,001 \cos\left(\frac{6\pi}{T_0}\right)$$

$$0 \leq t \leq T_0$$



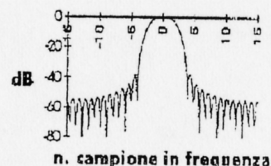
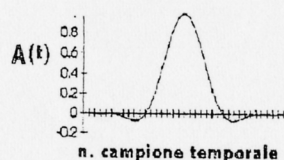
$$w_s = 2,49$$

$$w_e = 1,86$$

FINESTRA FLAT-TOP

$$A(t) = 0,2395 - 0,4481 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) + 0,2585 \cos\left(\frac{4\pi}{T_0}\right) + 0,0439 \cos\left(\frac{6\pi}{T_0}\right)$$

$$0 \leq t \leq T_0$$



$$w_s = 4,18$$

$$w_e = 2,26$$

Fig. 41 - Segue

Se si confronta ad esempio una finestra rettangolare ed una di Hanning (fig. 42), non solo il più alto lobo laterale è più basso di circa 20 dB nella finestra di Hanning, ma anche la pendenza di attenuazione dei lobi laterali è molto maggiore.

È interessante confrontare l'effetto di una finestra rettangolare e di una finestra di Hanning quando vengano applicate ad una senoide (fig. 43).

La fig. 43a corrisponde ad una durata dell'acquisizione pari ad un multiplo intero del periodo: non si rileva leakage.

La fig. 43b corrisponde a un numero dispari di semiperiodi; il segnale inizia e termina allo stesso livello ma la durata dell'acquisizione non è un multiplo intero del periodo: compare il leakage, che peraltro è molto minore con la finestra di Hanning.

Si noti anche la presenza di un componente DC, cioè, a frequenza zero, per effetto di un valor medio non nullo. Le ampiezze alle alte frequenze sono basse.

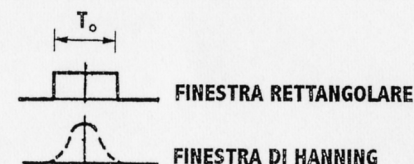
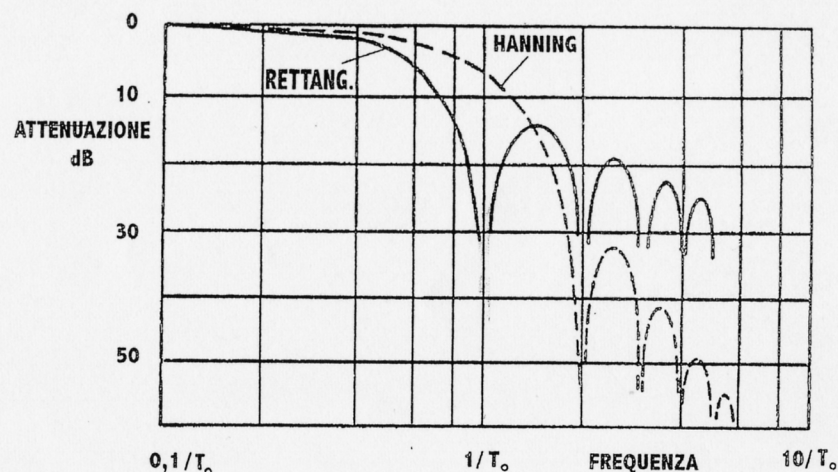


Fig. 42

La fig. 43c corrisponde allo stesso segnale della fig. 43b, ma con fase differente; si ha un numero dispari di semiperiodi, ma anche la massima discontinuità agli estremi, che sono a livelli differenti (uno massimo, l'altro minimo). Il leakage è ancora molto minore con la finestra di Hanning. Non si ha componente DC, essendo il valor medio nullo. La discontinuità agli estremi produce un elevato contenuto di alte frequenze.

Se si analizza in continuità una senoide senza alcuna sincronizzazione fra il segnale e le successive acquisizioni, con una finestra rettangolare un analizzatore di Fourier fornisce uno spettro che fluttua fra le situazioni limiti delle figg. 43b e 43c.

La finestra di Hanning può peraltro essere dannosa se il segnale analizzato è un transitorio, in quanto applica differenti pesature al transitorio stesso all'interno della finestra temporale. Nella fig. 44a il segnale transitorio è posizionato all'inizio della finestra temporale ed è fortemente alterato dalla finestra di Hanning rispetto a quello della fig. 44b, in cui il se-

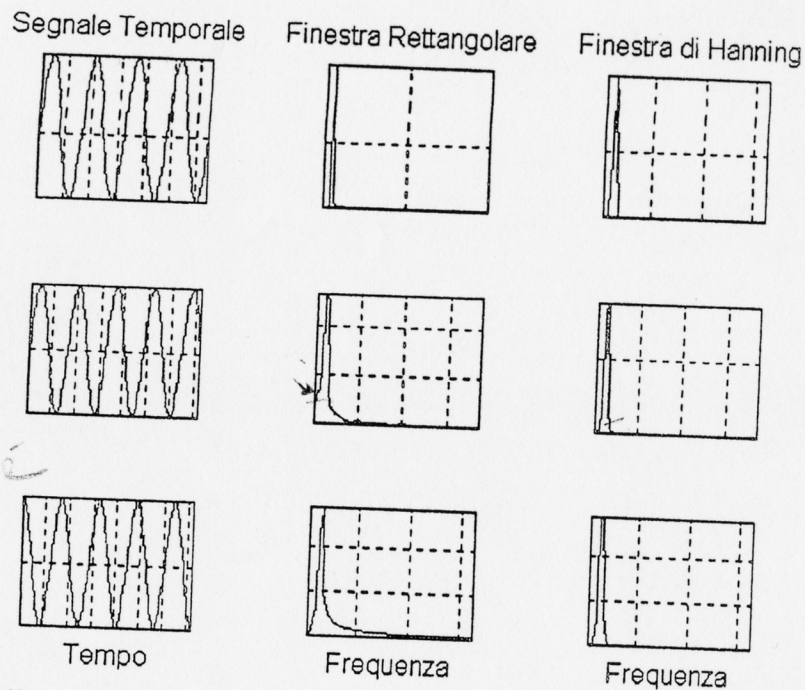


Fig. 43

gnale transitorio è posizionato al centro della finestra. Nella fig. 44b la forma d'onda data dalla finestra di Hanning, che è abbastanza piatta nella zona centrale, è simile a quella data dalla finestra rettangolare; il valore più elevato è dovuto al fatto che spesso si adotta un valore 2 per l'ampiezza di picco della finestra di Hanning, cioè, al suo centro.

In sintesi: la finestra di Hanning si usa per lunghi segnali continui, la finestra rettangolare per corti transitori.

Si usano finestre esponenziali (decrescenti) per transitori in cui la maggior parte dell'informazione importante è concentrata nella parte iniziale del record temporale (e si vuole ad esempio neutralizzare il rumore di fondo che si fa sentire nella parte finale dell'acquisizione quando il segnale principale tende a zero). Più specificamente si faccia ad esempio riferimento a prove mediante martello strumentato (ad es. per analisi modale): il segnale d'ingresso è il segnale impulsivo della forza misurata da un accelerometro e costituita dalle combinazioni di sinusoidi la cui ampiezza

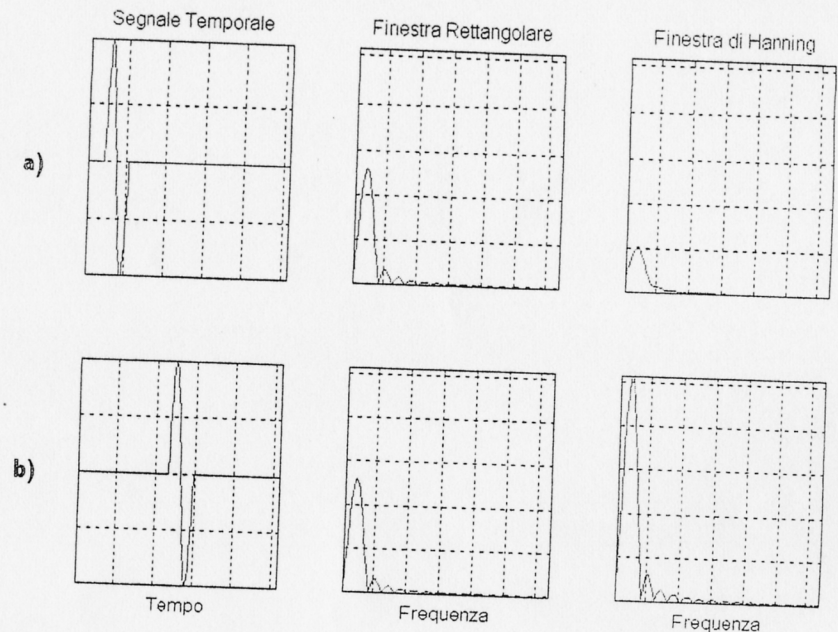


Fig. 44

decade nel tempo. Se la struttura è poco smorzata o se la durata dell'acquisizione è relativamente breve, la risposta non è ancora andata a zero al termine della finestra di misura, con conseguenti discontinuità e leakage. Moltiplicando la risposta per una funzione esponenziale, si porta praticamente a zero la risposta alla fine dell'acquisizione; ciò equivale ad aggiungere una quantità nota di smorzamento al sistema. Se al contrario la struttura è molto smorzata, nuovamente una finestra esponenziale può essere utile; in sua assenza il segnale, dopo essere andato a zero relativamente presto, sarebbe corrotto per i tempi successivi dal rumore di digitalizzazione presente intorno allo zero.

Per quanto riguarda il segnale di eccitazione, poiché l'impulso è di breve durata, ogni rumore durante il resto del tempo di acquisizione della forza è indesiderabile. Applicare una finestra che sia unitaria durante l'impulso e vada poi a zero, mantenendovisi fino alla fine dell'acquisizione, fornisce una soluzione a tale problema di rumore. La fig. 45 mostra andamenti tipici dell'eccitazione impulsiva e della risposta ad essa e le corrispondenti finestre della forza (normalmente chiamata force window) ed esponenziale.

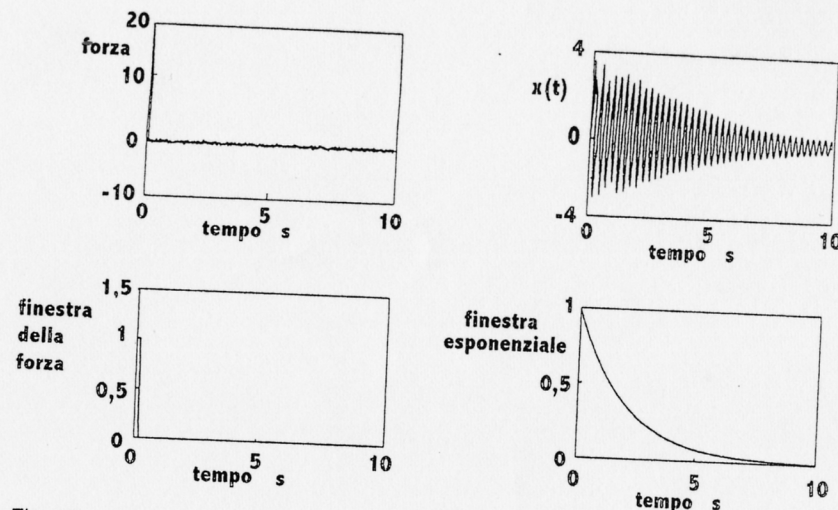


Fig. 45

Sintetizzando si può dire che la scelta della finestra dipende sia dallo scopo dell'analisi sia dal tipo di segnale. Più ampio è il lobo centrale, peggiore è la risoluzione in frequenza, perché diventa più difficile distinguere frequenze adiacenti di ampiezza simile. D'altro canto la selettività, cioè la capacità di rivelare un piccolo componente vicino ad un altro grande, cresce al crescere della pendenza di decadimento dei lobi laterali. La finestra rettangolare si usa quando il leakage non è un problema, quindi o con segnali periodici o nel caso di impulsi o transitori in cui la funzione è per sua natura nulla all'inizio ed alla fine del periodo di acquisizione. La finestra di Hanning è quella più usata per scopi generali, ma ha una bassa attitudine a distinguere fra frequenze vicine di ampiezza simile e quindi non è adatta per misure accurate di piccoli segnali. La finestra di Hamming differisce dalla precedente nell'altezza dei lobi laterali e per una minore pendenza di decadimento dei lobi laterali. La finestra di Kaiser-Bessel è adatta a distinguere segnali costituiti da toni multipli di livelli molto differenti; può causare più leakage di una finestra di Hanning quando usata per un segnale aleatorio. La finestra flat-top è utile per misure precise di ampiezza di segnali con una singola frequenza (toni puri). La finestra per la forza si usa per le prove di impatto, definendo la percentuale del blocksize durante la quale essa deve avere valore unitario. La finestra esponenziale si applica a segnali transitori per farli decadere entro il tem-

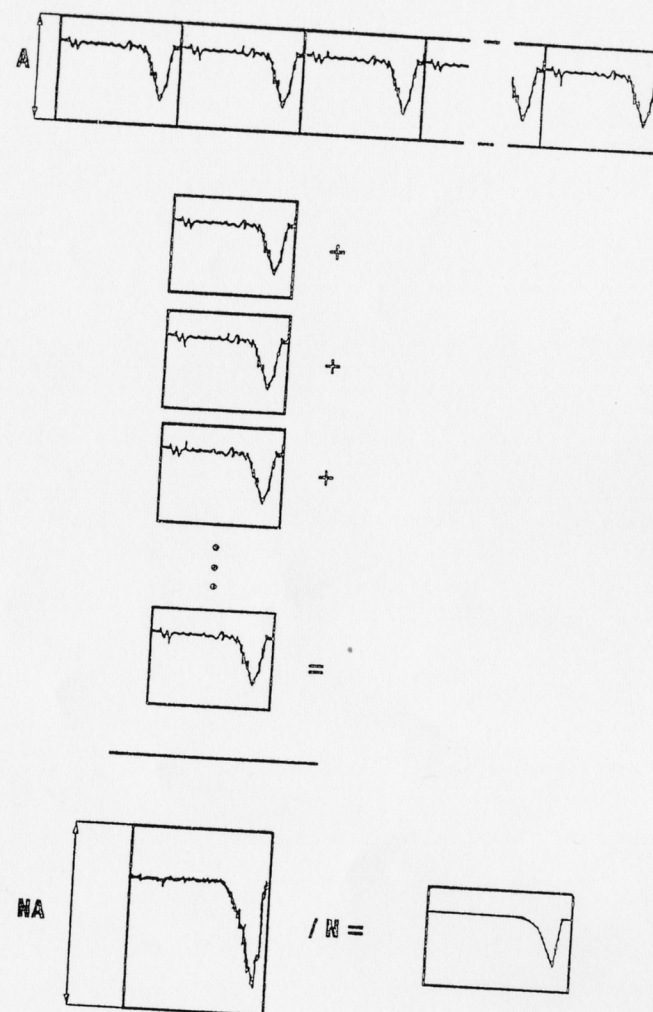


Fig. 46

po di acquisizione, definendo come parametro della finestra il livello percentuale del valore finale rispetto a quello iniziale.

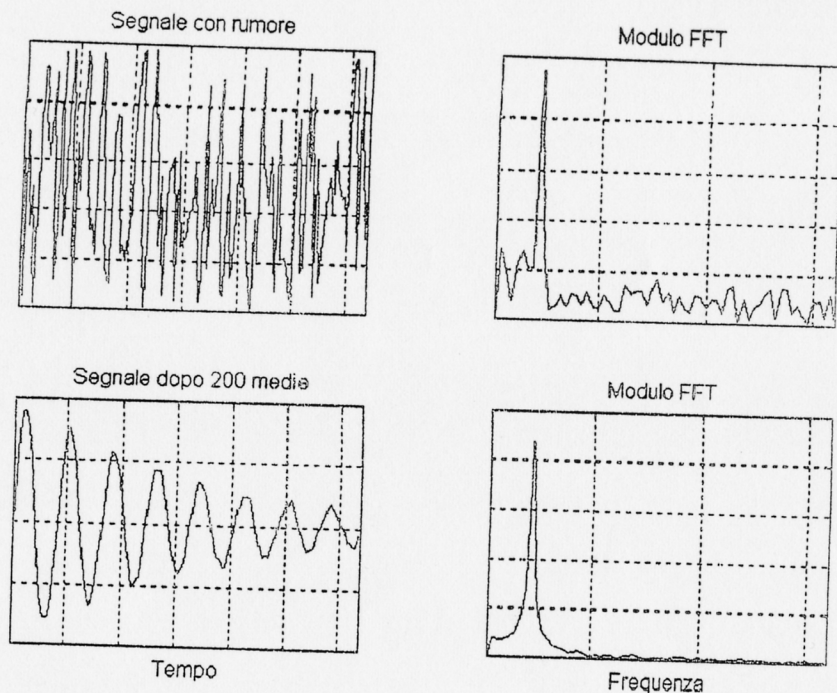


Fig. 47

2.2.6. Le medie

Nelle applicazioni di processamento del segnale vi è spesso una significativa quantità di rumore presente nelle misure. La tecnica statistica standard per migliorare la stima di un valore consiste nell'effettuare delle medie. Le medie possono essere fatte nel dominio del tempo o nel dominio delle frequenze. Quando il segnale è ripetitivo ed il rumore è casuale, se è disponibile un segnale di sincronizzazione (**segnale di trigger**) per unificare l'istante di inizio dei vari records, cioè delle varie storie temporali (time histories) che devono essere mediate, le medie si possono effettuare nel dominio del tempo (la procedura è comunemente chiamata **linear averaging**). Poiché il rumore della misura tende ad essere casuale e ad avere valor medio nullo, il contributo del rumore alla media è ridotto; inoltre la natura ripetitiva del segnale di interesse rinforza il suo contributo alla media (fig. 46). Gli effetti sono tanto più marcati quanto maggiore è il numero di medie.

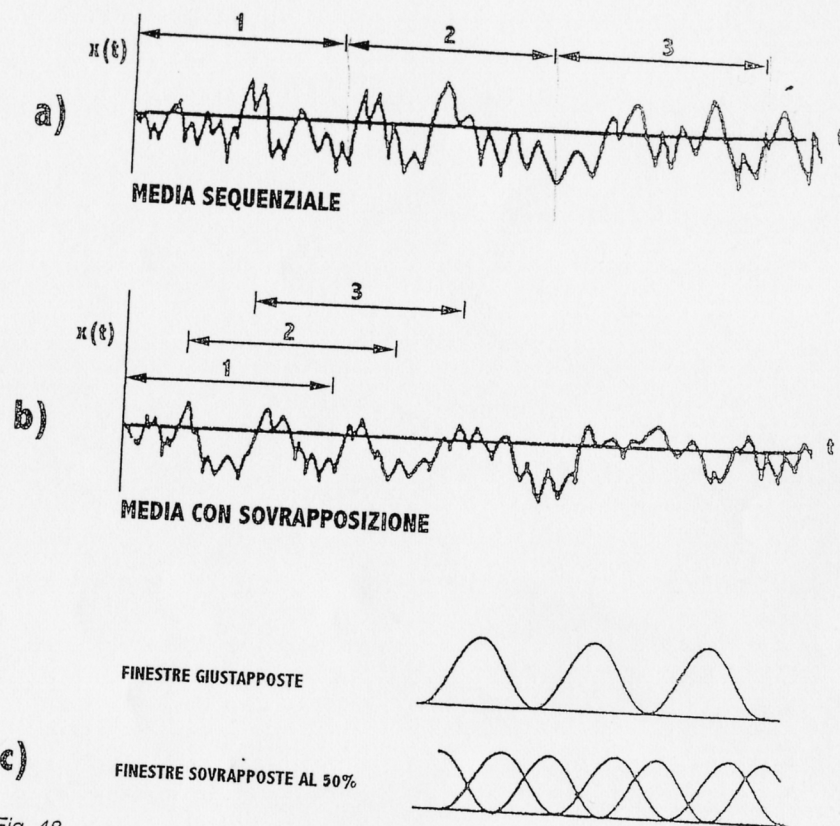


Fig. 48

La fig. 47 mostra un notevole miglioramento nel rapporto segnale/rumore.

Talora, operando nel dominio delle frequenze, si effettua invece soltanto una media fra i corrispondenti componenti dello spettro (procedura comunemente chiamata **RMS averaging o Power averaging**) determinando l'ampiezza media dello spettro e ignorando le differenze di fase che possono esistere fra gli spettri.

Fin qui si sono considerate acquisizioni del segnale con campioni mutuamente esclusivi, come indicato nella fig. 48a.

Poiché, gli attuali analizzatori sono in grado di calcolare la DFT in un tempo brevissimo, inferiore al ciclo di campionamento, si può iniziare una

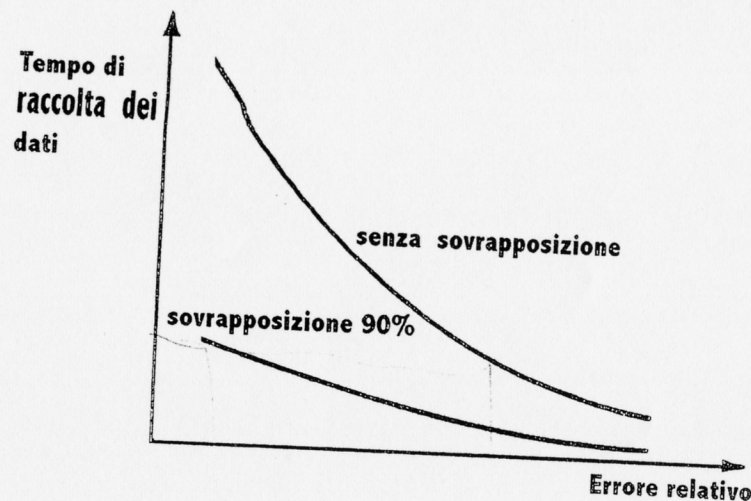


Fig. 49

nuova valutazione della DFT appena finita la precedente, utilizzando di volta in volta gli ultimi N valori acquisiti, anche se alcuni di essi sono già stati usati nella trasformata precedente (fig. 48b). Il risultato di queste medie con sovrapposizioni (overlap averaging) sono spettri più avviati rispetto a quelli che si otterrebbero usando solo una volta ogni dato campionato.

Le motivazioni per effettuare medie con sovrapposizione sono:

- fare miglior uso di un insieme di dati già acquisiti, effettuando un numero maggiore di medie;
- ridurre il tempo richiesto per acquisire un nuovo insieme di dati, mantenendo il livello richiesto di significatività statistica;
- considerando la presenza di una finestra di pesatura (ad es. di Hanning), fare, mediante una elevata sovrapposizione (ad es. 50%), un miglior uso dei dati permettendo a tutti i valori (eccettuati i primi e gli ultimi punti del record complessivo dei dati) di partecipare in modo uguale alla determinazione delle medie finali.

In genere non si va oltre il 75% di sovrapposizione perché la correlazione fra gli spettri contigui diviene talmente elevata da impedire ulteriori incrementi della significatività della media.

La durata totale di acquisizione T_0 corrispondente al complesso degli n record necessari ad effettuare n medie (cioè a quello che successivamente

divido in n record per effettuare le medie), nel caso di *processamento sequenziale* è:

$$T_0 = b \Delta t n$$

dove:

b = numero di punti acquisiti per record (blocksize)

Δt = intervallo di campionamento

mentre nel caso di *processamento con sovrapposizione* è:

$$T_0 = b \Delta t \{1 + [1 - (p/100)] (n-1)\}$$

dove:

p = percentuale di sovrapposizione.

Si potrebbe dimostrare che gli andamenti del tempo di raccolta dei dati in funzione dell'errore relativo è del tipo indicato nella fig. 49; dalla maggiore pendenza della curva nella zona in cui l'errore relativo è prossimo a zero, si evince che i maggiori miglioramenti nel tempo di raccolta dei dati si ottengono quando la precisione richiesta è elevata.

Molte forme d'onda hanno un valor medio non nullo, cioè una componente DC. La rimozione del valor medio del segnale nel dominio del tempo spesso migliora la risoluzione nel dominio delle frequenze, rimuovendo il picco corrispondente al valor medio nel dominio delle frequenze, la cui elevata ampiezza potrebbe comprimere la visualizzazione delle altre componenti frequenziali aventi ampiezze minori.

Se si esaminano gli **effetti della conversione analogico-digitale**, il rumore generato dal convertitore A/D può essere virtualmente eliminato mediante idonee procedure di progetto; tuttavia vi sono due principali cause di rumore che sono più legate al processo che all'hardware: esse sono il **"time jitter"** e il rumore di quantizzazione. Il *time jitter* si manifesta ad esempio quando una forma d'onda analogica attiva un trigger che abilita la porta di acquisizione. Per vari motivi, fra cui la presenza di rumore nel segnale analogico l'istante in cui si raggiunge il livello di trigger può essere leggermente differente in successive finestre della stessa forma d'onda (un analogo problema, però legato all'hardware anziché, al processo, potrebbe essere dovuto a instabilità nel clock del convertitore). Le ampiezze di variazione dovute al *time jitter* sono legate alla pendenza dx/dt del segnale in prossimità dell'istante di trigger; se tali variazioni di pendenza sono dovute a rumore e, come è ragionevole, tale rumore ha valor medio nullo, effettuare delle medie attenua gli effetti del *time jitter* (fig. 50).

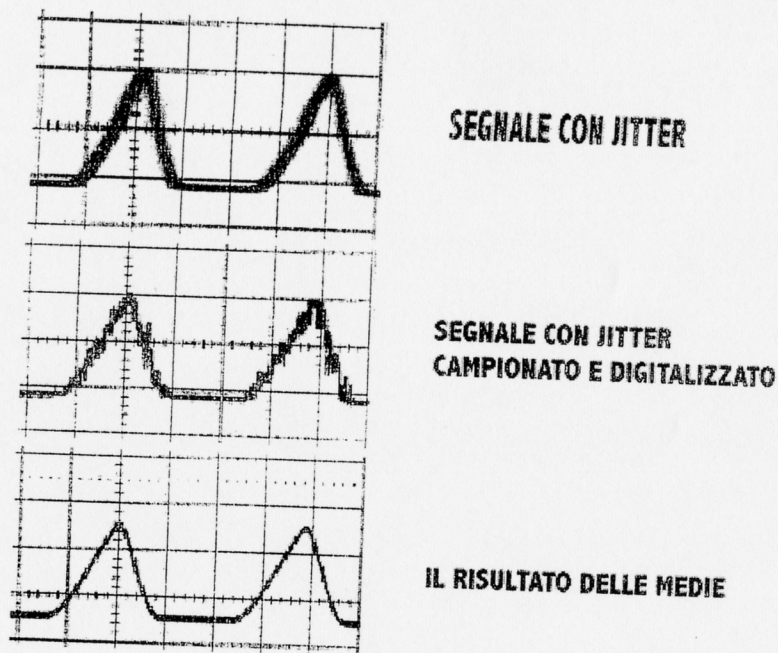


Fig. 50

Passando ad esaminare l'errore di quantizzazione, esso in linea di principio è inerente alla lunghezza finita della parola del convertitore A/D e non è di tipo aleatorio. Ad esempio, considerando la digitalizzazione di due funzioni temporali a rampa (fig. 51), mentre la rampa superiore non viene alterata dal campionamento, quella inferiore, come accade in generale, è soggetta a lievi errori rispetto all'andamento tratteggiato per effetto del fatto che i livelli assumibili dall'uscita del convertitore sono in numero finito, ancorché elevato. Il segnale analogico, intrinsecamente continuo, viene codificato digitalmente con numeri binari di N bit e quindi quantizzato su 2^N livelli.

La fig. 51 è ovviamente solo indicativa nelle scale, per motivi di chiarezza, in quanto in realtà un tipico convertitore A/D potrebbe avere ad esempio 512 punti nella finestra temporale (ascisse) ed avere una parola a 10 bit, cioè tale da poter esprimere $2^{10} = 1024$ livelli digitali (ordinate). La quantizzazione introduce un errore additivo inversamente proporzionale al numero di bit usati per la codifica. Ovviamente un convertitore a 16

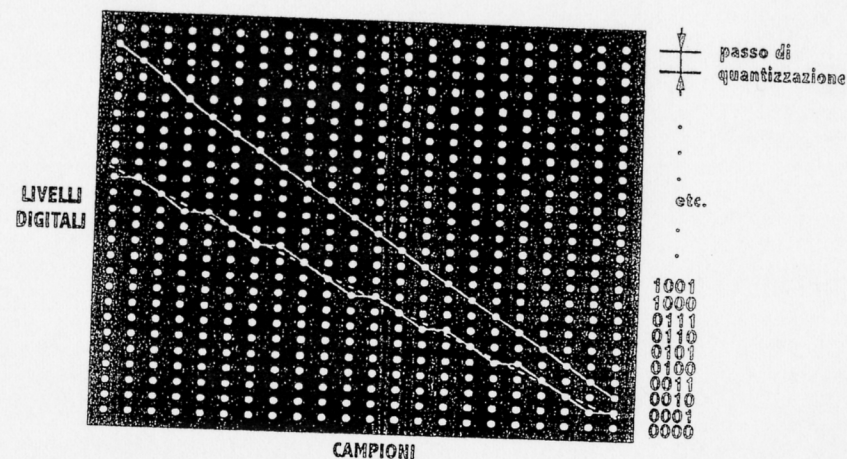


Fig. 51

bit è più costoso, ma causa un errore di quantizzazione inferiore rispetto ad uno a 10 bit, purché, ovviamente, se ne faccia un uso corretto, cioè si regoli correttamente il guadagno del preamplificatore del segnale che è a monte del convertitore, in modo che fornisca un segnale sufficientemente intenso da utilizzare gran parte dei bit disponibili (anziché lasciarli inutilizzati dopo averli pagati!). Nella pratica, in alcuni casi, può rivelarsi ugualmente utile effettuare delle medie. Se ad esempio si è contemporaneamente in presenza di jitter, se il jitter è casuale (*random*) anche l'errore di quantizzazione tende a divenire un rumore di quantizzazione con un carattere casuale (come si comprende pensando di attribuire un jitter casuale alla rampa precedentemente considerata). Il successo delle tecniche di media è però legato a due condizioni: 1) che vi sia abbastanza rumore addizionale (rumore o jitter) da iniettare una qualche aleatorietà nell'errore di quantizzazione e portare il livello totale di rumore al di sopra di 2 o 3 livelli digitali; 2) che la media del segnale sia fatta con un mezzo di calcolo avente una maggiore risoluzione (minor errore di quantizzazione) rispetto al convertitore A/D (ad esempio un minicomputer con parola a 16 bit per mediare i dati di un convertitore A/D con parola a 10 bit).

2.2.7. Le tecniche zoom

Un altro problema che può presentarsi nell'esecuzione di una DFT può essere quello di una insufficiente risoluzione in frequenza (ad esempio nell'esame di vibrazioni di strutture poco smorzate e quindi dotate di picchi molto stretti nella funzione di risposta in frequenza), specialmente nell'estremo di bassa frequenza dell'intervallo di frequenze (in cui la distanza fra linee spettrali rappresenta un valore percentuale maggiore della frequenza in esame).

Ad esso si potrebbe ovviare calcolando una DFT con un numero maggiore di punti, ma ciò è più lento e non sempre è possibile su tutti gli analizzatori. La soluzione più comune è di effettuare una **DFT zoom** nell'intervallo di frequenze di interesse; essa consiste nel concentrare le linee spettrali (256, o 400, ecc.) in una stretta banda fra f_{\min} e f_{\max} invece che fra 0 e f_{\max} . Vi sono vari modi per farlo; uno di questi è basato sul produrre un aliasing controllato. Con riferimento alla fig. 52, se si vuole zoomare nell'intervallo compreso tra f_1 e f_2 , si applica un filtro passa-banda come indicato nella fig. 52b, si campiona il segnale d'ingresso con frequenza bassa, tale da produrre l'aliasing indicato nella fig. 53 e si effettua una DFT fra zero e $f_2 - f_1$.

Così i componenti di frequenza, inizialmente presenti fra f_1 e f_2 risulteranno spostati specularmente fra 0 e $f_2 - f_1$ (fig. 53) ma la DTF avrà una maggiore risoluzione in quanto lo stesso numero di linee spettrali è presente nell'intervallo $0 \div f_2 - f_1$ che è minore dell'intervallo originario $0 \div f_2$.

Un altro modo per effettuare una DFT zoom consiste nello spostare le frequenze dello spettro mediante una moltiplicazione della *time history* originaria per $\cos \omega_1 t$ e nell'eliminare con un filtro la componente più elevata delle due che così si ottengono. Se ad esempio il segnale è:

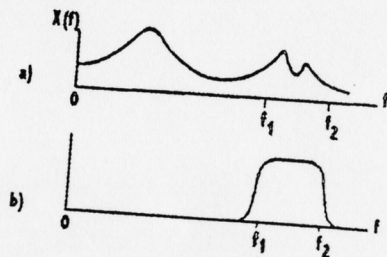


Fig. 52

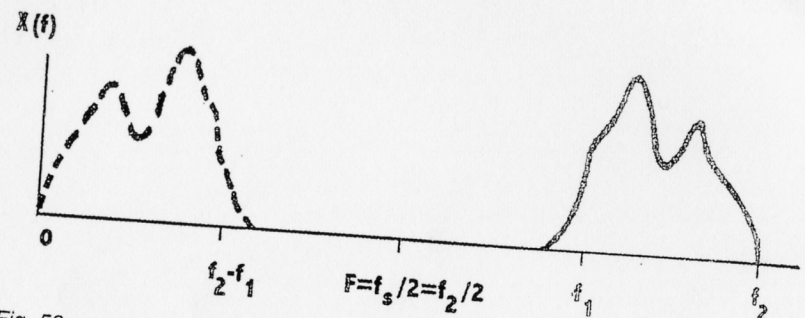


Fig. 53

$$x(t) = A \sin \omega t$$

il prodotto per $\cos \omega_1 t$ fornisce

$$x'(t) = A \sin \omega t \cos \omega_1 t = \frac{A}{2} [\sin (\omega - \omega_1)t + \sin (\omega + \omega_1)t]$$

Filtrando il componente a frequenza più elevata rimane $\frac{A}{2} \sin (\omega - \omega_1)t$ cioè, a meno del fattore $\frac{1}{2}$, il segnale di partenza traslato di ω_1 , verso le basse frequenze.

Quindi un segnale di pulsazione ω_2 viene fatto corrispondere alla pulsazione $\omega_2 - \omega_1$.

In altri termini si è zoomato sul campo di frequenze $f_1 \div f_2$ portandolo ad essere $0 \div f_2 - f_1$ e quindi se si effettua la DFT il precedente campo $0 \div f_2$ è divenuto un intervallo più ristretto $0 \div f_2 - f_1$ che, a parità di linee spettrali, fornisce una maggiore risoluzione.

2.2.8. Le densità spettrali di potenza, di energia, l'autospettro

Si faccia riferimento ad un segnale continuo e si definisca $S_{xx}(f)$ la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$\text{Per } \tau = 0 \quad R_{xx}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

ma essendo

$$R_{xx}(\tau = 0) = E[x^2] \rightarrow \text{med. quadratica}$$

si ha

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

da cui si vede che $S_{xx}(f)$ è una densità di distribuzione [il valore medio dei quadrati dei valori della funzione $x(t)$ è l'area sottesa al grafico della $S_{xx}(f)$] e prende quindi il nome di **densità spettrale di potenza (PSD = Power Spectral Density o AutoPower Spectral Density)**; si esprime in (EU^2/Hz) . È la densità di distribuzione della media dei quadrati della x .

I grafici della PSD in funzione della frequenza vengono chiamati spettri di potenza.

La PSD può essere espressa in funzione della trasformata di Fourier del segnale $x(t)$.

Si può dimostrare che, dato un segnale casuale ed estratto un record temporale k -esimo $x_k(t)$ di durata finita T dal record globale, si ha

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} |X_k(f)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} X_k^*(f) X_k(f) \right]$$

Questo consegue dalla relazione di Parseval:

$$\text{energia totale} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

da cui

$$\text{potenza totale} = \frac{\text{energia totale}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

e da quest'ultimo integrale si vede che

$$\frac{|X(f)|^2}{T} = \text{densità di potenza} = S_{xx}(f)$$

Le operazioni di limite e di valore atteso derivano dal fatto che il segnale è casuale.

Occorrerebbe quindi avere durate di acquisizione dati infinite e mediare su un insieme totale dei records infinito; ciononostante si può ricavare una stima $\hat{S}_{xx}(f)$ della densità spettrale di potenza prendendo un numero finito di acquisizioni di durata finita e mediando i loro risultati. Si usa un tempo totale di acquisizione T_i e lo si divide in M segmenti ciascuno di durata T . L'approssimazione che è una stima della PSD è

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{T} |X_m(f)|^2$$

Si usano cioè M insiemi di dati e si valuta il "periodogramma" associato con ciascuno di essi.

Nel caso della *trasformata discreta* di Fourier, se si prende come definizione di X quella ricavata dalla trasformata continua valgono le stesse formule:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{xx}(r\Delta f) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{T} |X_m(r\Delta f)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N\Delta t} |X_m(r\Delta f)|^2 = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi r \frac{n}{N}} \right|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N\Delta t} (\Delta t)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left| x(n) e^{-j2\pi r \frac{n}{N}} \right|^2 \end{aligned}$$

Se invece si usa la definizione ricavata dalla serie di Fourier, che differisce per un fattore $1/N$ al posto del coefficiente Δt , occorrerà un fattore correttivo $N\Delta t = T$ davanti alle X ricavate dalla serie per avere le X ricavate dalla trasformata continua

$$\begin{aligned} \hat{S}_{xx}(r\Delta f) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{N\Delta t} \left| N\Delta t \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi r \frac{n}{N}} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M N\Delta t \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi r \frac{n}{N}} \right|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M T |X_m(r\Delta f)|^2 \end{aligned}$$

Si definisce autospettro il prodotto $X^*(f) X(f) = |X(f)|^2$.
 Nel caso di segnali campionati, la definizione usuale di DFT ha le dimensioni di EU, quindi le dimensioni dell'autospettro sono EU^2 , cioè $X^*(i) X(i) = |X(i)|^2$ è la potenza associata all'i-esimo valore di frequenza.

Nel caso di segnali continui, la trasformata integrale ha dimensioni $EU/Hz = EU s$ e quindi le dimensioni dell'autospettro sono $EU^2 s^2 = \frac{EU^2 s}{Hz}$
 $= \frac{\text{potenza tempo}}{Hz} = \text{densità spettrale di energia} = \text{ESD} = \text{Energy Spectral Density}$. Dividendo per il tempo T si ottiene, come si è visto, la PSD, in $\frac{EU^2 s^2}{s} = EU^2 s = \frac{EU^2}{Hz}$. Moltiplicando la PSD per l'ampiezza dell'intervallo in frequenza (cioè dividendo ancora per il tempo) si ottengono $\frac{EU^2 Hz}{Hz} = EU^2$, cioè si ottiene la potenza del segnale.

Per segnali transitori la misura della potenza non ha significato perché il segnale è di breve durata e si deve quindi far riferimento all'energia. Più precisamente si misura la densità spettrale di energia (ESD), in $\frac{EU^2 s}{Hz}$.

Analogamente alla $S_{xx}(f)$ si definisce $S_{xy}(f)$ la trasformata di Fourier della funzione di mutua correlazione.

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Analogamente ancora:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} X_k^*(f) Y_k(f) \right]$$

La $S_{xy}(f)$ è chiamata **densità spettrale mutua (o incrociata) di potenza (cross spectral density)**.

Dalle proprietà di simmetria delle funzioni di auto e mutua correlazione e delle conseguenti proprietà della trasformata di Fourier si ha

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f)$$

$$S_{xy}(-f) = S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f)$$

Le funzioni S_{xx} e S_{xy} sono definite nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ e sono quindi dette **bilaterali**. Può essere comodo definire delle densità spettrali di potenza $G_{xx}(f)$ e $G_{xy}(f)$ monolaterali, cioè non nulle solo per frequenze positive

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} 2S_{xx}(f) & f > 0 \\ S_{xx}(f) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

$$G_{xy}(f) = \begin{cases} 2S_{xy}(f) & f > 0 \\ S_{xy}(f) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

sfruttando il fatto che le frequenze negative esprimono un contributo di informazione già insito nella parte delle frequenze positive e raddoppiando quindi i valori per $f > 0$ e annullando quelli per $f < 0$.

Si noti che, mentre $S_{xx}(f)$ e $G_{xx}(f)$ sono reali, $S_{xy}(f)$ e $G_{xy}(f)$ sono funzioni complesse.

La parte reale $C_{xy}(f)$ e la parte immaginaria $Q_{xy}(f)$ della $G_{xy}(f)$ si chiamano rispettivamente **funzione di densità spettrale in coincidenza (o co-spettro)** e **funzione di densità spettrale in quadratura (o quad-spectrum)**

$$G_{xy}(f) = C_{xy}(f) - j Q_{xy}(f)$$

2.2.9. La risposta dei sistemi lineari

Si esamini ora la **risposta di un sistema lineare**. Con riferimento alla fig 54, detta $h(t)$ la risposta all'impulso, si ha:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(f) = H(f) X(f)$$

In pratica, tuttavia, **si usano metodi alternativi per misurare $H(f)$** , per ridurre il rumore non correlato, mediante medie.

Se si moltiplica per $X^*(f)$ si ha:

$$X^*(f) Y(f) = H(f) X^*(f) X(f)$$

ossia

$$s^2(t) = \left[(A_k + A_i)^2 \cos^2 \left(\frac{\omega_d t}{2} + \frac{\varphi_d}{2} \right) + (A_k - A_i)^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_d t}{2} + \frac{\varphi_d}{2} \right) \right] \cdot \cos^2 \left(\frac{\omega_s t}{2} + \frac{\varphi_s}{2} - \psi \right)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} s^2(t) &= \left[(A_k + A_i)^2 \frac{1 + \cos(\omega_d t + \varphi_d)}{2} + (A_k - A_i)^2 \frac{1 - \cos(\omega_d t + \varphi_d)}{2} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} = \\ &= \left[\frac{(A_k + A_i)^2}{2} + \frac{(A_k + A_i)^2}{2} \cos(\omega_d t + \varphi_d) + \frac{(A_k - A_i)^2}{2} - \frac{(A_k - A_i)^2}{2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \cos(\omega_d t + \varphi_d) \left. \right] \frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} = \\ &= \left[\frac{A_k^2 + A_i^2 + 2A_k A_i + A_k^2 + A_i^2 - 2A_k A_i}{2} + \frac{A_k^2 + A_i^2 + 2A_k A_i - A_k^2 - A_i^2 + 2A_k A_i}{2} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \cos(\omega_d t + \varphi_d) \left. \right] \frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} = \\ &= [(A_k^2 + A_i^2) + 2A_k A_i \cos(\omega_d t + \varphi_d)] \frac{1 + \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi)}{2} = \\ &= \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} + A_k A_i \cos(\omega_d t + \varphi_d) + \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi) + \\ &\quad + A_k A_i \cos(\omega_d t + \varphi_d) \cos(\omega_s t + \varphi_s - 2\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_s &= (k + i)\omega_D & \omega_d &= (k - i)\omega_D \\ s^2(t) &= \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} + A_k A_i \cos[(k - i)\omega_D t + \varphi_d] + \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} \cdot \\ &\quad \cdot \cos[(k + i)\omega_D t + \varphi_s - 2\psi] + A_k A_i \cos[(k - i)\omega_D t + \varphi_d] \cos[(k + i)\omega_D t + \\ &\quad + \varphi_s - 2\psi] \\ k &= i + 1 \\ s^2(t) &= \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} + A_k A_i \cos[\omega_D t + \varphi_d] + \frac{A_k^2 + A_i^2}{2} \cdot \\ &\quad \cdot \cos[(2i + 1)\omega_D t + \varphi_s - 2\psi] + A_k A_i \cos(\omega_D t + \varphi_d) \cos[(2i + 1)\omega_D t + \\ &\quad + \varphi_s - 2\psi] \end{aligned}$$

La pulsazione del segnale modulante, che fornisce la pulsazione ω_D del difetto, può essere determinata con una trasformazione di Fourier applicata all'involuppo del segnale portante.

L'involuppo di un segnale può essere ottenuto per via analogica mediante raddrizzamento del segnale (elevazione al quadrato) e filtraggio passa-basso del segnale raddrizzato. Frequentemente l'involuppo è ottenuto per altro via, cioè mediante trasformata di Hilbert.

2.4.3. La trasformata di Hilbert e l'involuppo di un segnale

Si definisce **trasformata di Hilbert** $\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)]$ di una funzione temporale $x(t)$ l'espressione

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} x(t) * \frac{1}{t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

dove * indica convoluzione.

La **trasformata inversa di Hilbert** è

$$x(t) = \mathcal{H}^{-1}[\tilde{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \tilde{x}(t) * \frac{1}{t} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Le trasformate di Hilbert godono di alcune importanti proprietà, verificabili per sostituzione.

Indicando con $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{x}(t)] &= -jX(f) & f &> 0 \\ \mathcal{F}[\tilde{x}(t)] &= 0 & f &= 0 \\ \mathcal{F}[\tilde{x}(t)] &= +jX(f) & f &< 0 \end{aligned}$$

ossia $\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = -jX(f) \operatorname{sgn}(f)$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{x}(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi} x(t) * \frac{1}{t}\right] = \mathcal{F}\left[x(t) * \frac{1}{\pi t}\right] \\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] &= -j \operatorname{sgn}(f) \end{aligned}$$

Ricordando che la trasformata di Fourier di una convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier, si ha:

$$\mathcal{F}[\tilde{x}(t)] = X(f)[-j\operatorname{sgn}(f)] = -jX(f)\operatorname{sgn}(f)$$

La $x(t)$ e la sua trasformata di Hilbert sono ortogonali nell'intervallo $(-\infty, \infty)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\tilde{x}(t)dt = 0$.

Inoltre se si effettua due volte la trasformazione di Hilbert, sotto condizioni piuttosto generali si ha:

$$\tilde{\tilde{x}}(t) = -x(t)$$

La trasformata di Hilbert è un utile mezzo per ricavare l'involuppo di una forma d'onda. Infatti si può dimostrare che l'involuppo è dato da

$$\operatorname{env} x(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

Se si definisce **segnale analitico** $x_a(t)$ l'espressione

$$x_a(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$$

l'involuppo è il modulo del segnale analitico

$$|x(t) + j\tilde{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} = \operatorname{env} x(t)$$

Per verificare che la precedente definizione di involuppo soddisfi il nostro concetto intuitivo di involuppo esaminiamo il caso semplice in cui

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\cos\omega_0 t \\ \tilde{x}(t) &= \mathcal{H}[A(t)\cos\omega_0 t] = A(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A(t)\cos\omega_0 t] &= \mathcal{F}[A(t)\cos 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2}[A(f+f_0) + A(f-f_0)] \\ \mathcal{F}[\tilde{x}(t)] &= -j\operatorname{sgn}(f)\frac{1}{2}[A(f+f_0) + A(f-f_0)] = \\ &= -\frac{j^2}{j}\frac{1}{2}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]\operatorname{sgn}(f) = \frac{1}{2j}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]\operatorname{sgn}(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[\tilde{x}(t)]\} &= \tilde{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\operatorname{sgn}(f)\frac{1}{2j}[A(f+f_0) + A(f-f_0)]\right\} = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2j}[A(f+f_0) - A(f-f_0)]\right\} = A(t)\sin 2\pi f_0 t = A(t)\sin\omega_0 t \\ \operatorname{env} x(t) &= |x_a(t)| = |x(t) + j\tilde{x}(t)| = |A(t)\cos\omega_0 t + jA(t)\sin\omega_0 t| = \\ &= \sqrt{A^2(t)\cos^2\omega_0 t + A^2(t)\sin^2\omega_0 t} = \sqrt{A^2(t)(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)} = A(t) \end{aligned}$$

che è proprio ciò che si intende con involuppo.

La **proprietà che lega le trasformate di Hilbert alle trasformate di Fourier** facilita le procedure di calcolo. Se la si applica al segnale analitico si ha:

$$\mathcal{F}[x_a(t)] = X_a(f) = \mathcal{F}[x(t) + j\tilde{x}(t)] = X(f) + j[-jX(f)\operatorname{sgn}(f)] = X(f)[1 + \operatorname{sgn}(f)]$$

$$\begin{aligned} X_a(f) &= 2X(f) & f > 0 \\ &= X(f) & f = 0 \\ &= 0 & f < 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{x}(t) = \operatorname{Im}\{\mathcal{F}^{-1}[X_a(f)]\}$$

Tali relazioni permettono un immediato calcolo della trasformata di Hilbert e dell'involuppo.

3. Le caratteristiche dello stato di salute delle macchine, il monitoraggio delle macchine ed i criteri di giudizio della vibrazione

3.1. Le caratteristiche dello stato di salute delle macchine

La **temperatura** è prevalentemente un indicatore della condizione di funzionamento della macchina, cioè del carico sotto cui essa sta lavorando; tuttavia essa in molti casi può essere anche un indicatore dello stato di salute della stessa.

Infatti la temperatura di parete di un carter di un riduttore a ingranaggi può segnalare difetti di lubrificazione (mancanza o tipo inadeguato di olio) o, in condizioni estreme, il suo stato meccanico, la temperatura della carcassa di una pompa può segnalare cavitazione o danneggiamento degli anelli di usura, la temperatura di un cuscinetto a rotolamento può indicare difetti di lubrificazione o, in condizioni estreme, il suo stato meccanico.